

Hilfsblätter zur Vorlesung  
GRUNDLAGEN DER ELEKTRISCHEN ENERGIETECHNIK

Lehrstuhl für Leistungselektronik und Elektrische Antriebe  
Prof. Dr.-Ing. Hans-Günter Eckel

Diese Hilfsblätter basieren auf einem Skript meines Doktorvaters Prof. Dr.-Ing. G. Pfaff von der Universität Erlangen-Nürnberg (Teile 1 bis 4) und auf einem Skript von Prof. Dr.-Ing. A. Steimel von der Ruhr-Universität Bochum (Teil 5). Beiden möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Für die datentechnische Aufarbeitung der vorliegenden Materialien gebührt Herrn Groll mein Dank.

Rostock, Sommersemester 2012

*Hans-Günter Eckel*

## Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Grundlagen rotierender elektrischer Maschinen.....	4
1.2 Physikalische Grundlagen .....	10
1.2.1 Leistungsbetrachtung .....	10
1.2.2 Physikalische Grundgesetze.....	12
1.2.3 Das magnetische Feld in elektrischen Maschinen .....	14
1.2.4 Drehmomentbildung .....	22
1.2.5 Spannungsbildung .....	25
1.2.6 Prinzip der elektromechanischen Energiewandlung .....	28

## 1. Allgemeine Grundlagen rotierender elektrischer Maschinen

Die Erzeugung elektrischer Energie aus den Primärenergieträgern (fossile Brennstoffe, Kernenergie, Wasser, Biomasse, Wind, Sonne im Fall von Solarthermie) geschieht auf dem Wege über die mechanische Energie, die anschließend in Synchrongeneratoren (bei thermischen Kraftwerken und Wasserkraftwerken, teilweise auch bei Windkraftanlagen) oder Asynchrongeneratoren (bei Windkraftanlagen) in elektrische Energie umgewandelt wird. Ausnahmen sind Photovoltaikanlagen und in Zukunft möglicherweise verstärkt Brennstoffzellen. Bild 1-1 zeigt eine entsprechende Übersicht.

Synchrongeneratoren und Asynchrongeneratoren sind rotierende elektrische Maschinen, denen die mechanische Energie über Turbinen an der Welle zugeführt wird, die sie dann nach der Energieumwandlung als elektrische Energie in einem Drehstromsystem abgeben. In modernen Kernkraftwerken sind heute bereits Einheiten mit Nennleistungen von mehr als 1000 MW im Einsatz.

Ein erheblicher Teil der zur Verfügung stehenden elektrischen Energie wird als Antriebsenergie genutzt. Die hierbei eingesetzten Elektromotoren sind ebenfalls rotierende elektrische Maschinen, denen die elektrische Energie zugeführt wird, die sie dann als mechanische Energie an ihrer Welle abgeben. Elektromotoren lassen sich in einem weiten Leistungsbereich und Drehzahlbereich bauen und können daher besonders gut an die sehr vielfältigen Aufgaben der Antriebstechnik angepasst werden.

Die Grundtypen der rotierenden elektrischen Maschinen sind die Synchronmaschine, die Asynchronmaschine und die Gleichstrommaschine. Ihr Aufbau und ihre Wirkungsweise sollen im Rahmen dieser Vorlesung besprochen werden. Alle diese Maschinen können als Generatoren oder als Motoren arbeiten; die Richtung des Energieumwandlungsprozesses wird durch die äußeren Bedingungen gegeben. Die elektrisch erregte Synchronmaschine wird vorwiegend als Generator zur Erzeugung elektrischer Energie eingesetzt, daneben als Motor im hohen Megawatt-Leistungsbereich. Permanent erregte Synchronmaschinen kommen als hochdynamische Servoantriebe und als Antriebsmaschine in Elektroautos zum Einsatz. Asynchronmaschine und Gleichstrommaschine finden heute fast ausschließlich als

Elektromotoren Verwendung. Eine Ausnahme ist der Einsatz von doppelt gespeisten Asynchronmaschinen in Windkraftanlagen.

Mit zu den elektrischen Maschinen gezählt werden die Transformatoren, weil in ihnen die gleichen physikalischen Grundprinzipien wirken, auch wenn die konstruktive Realisierung eine völlig andere ist. Für das Betriebsverhalten nicht von Bedeutung ist natürlich die Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld.



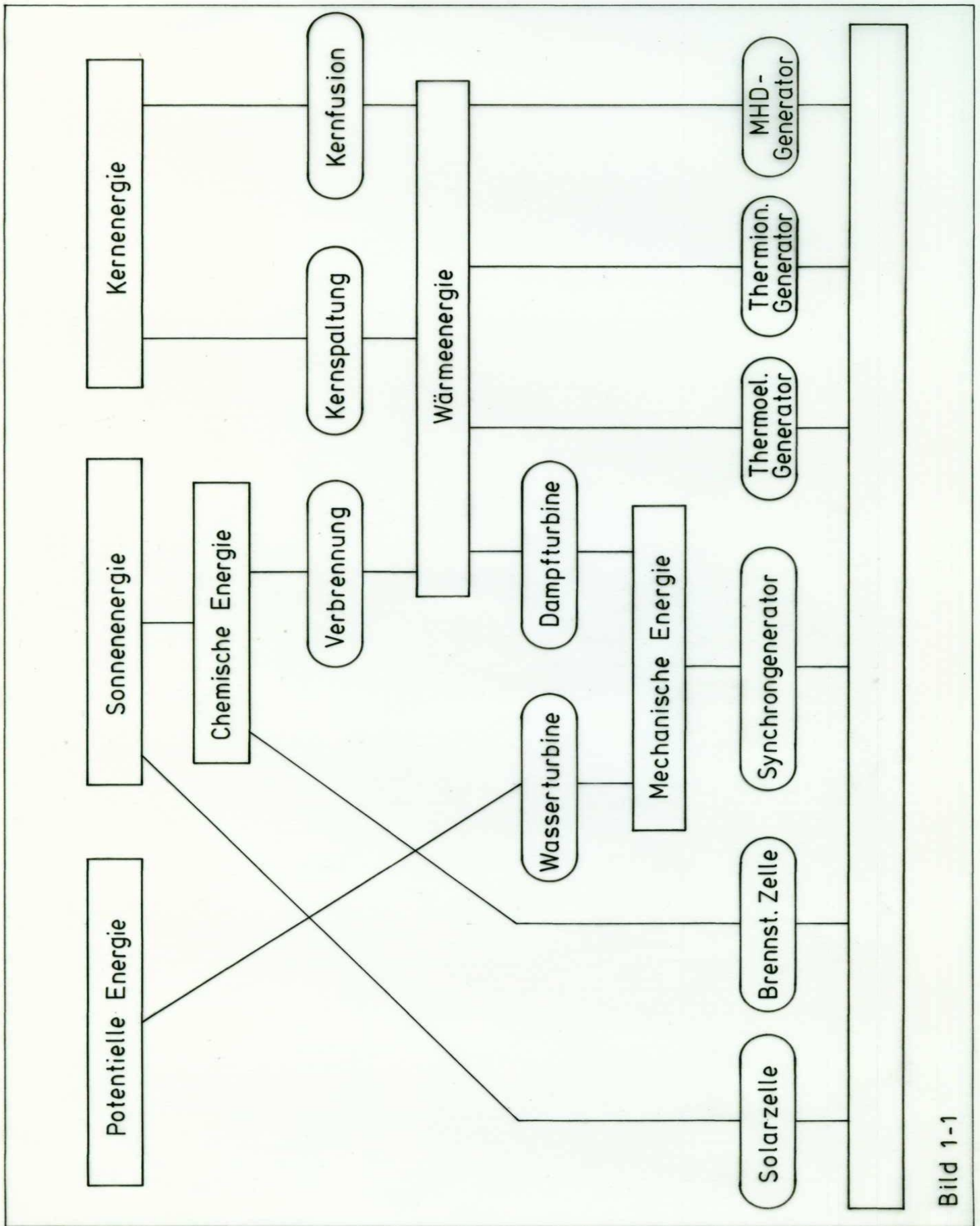


Bild 1-1

Bei der Betrachtung des Betriebsverhaltens der Maschinen unterscheidet man zwischen einer allgemeineren Betrachtungsweise, welche auch das transiente Verhalten beim Übergang von einem Betriebszustand in einen anderen berücksichtigt und einer Darstellung, die nur das stationäre Verhalten der Maschinen beschreibt, welches durch zeitlich konstante Drehmomente und Drehzahlen gekennzeichnet ist. Bei der Gleichstrommaschine sind im letzteren Falle auch die Spannungen und Ströme zeitlich konstante Größen, bei den Wechselstrommaschinen ergeben sich zeitlich sinusförmig veränderliche Größen mit konstanten Effektivwerten und konstanter Frequenz, welche als Zeiger dargestellt und mit Hilfe der komplexen Rechnung beschrieben werden können. Eine allgemeine Beschreibung des Betriebsverhaltens elektrischer Maschinen, welche auch das dynamische Verhalten berücksichtigt, muss dagegen mit Hilfe von Differentialgleichungen erfolgen. Im Rahmen dieser Vorlesung soll vorwiegend das stationäre Verhalten der Maschinen behandelt werden.

Die ersten elektrischen Maschinen wurden bereits im 19. Jahrhundert gebaut. Von diesen bis zu den modernen elektrischen Maschinen führt ein weiter Weg. Den Stand der Technik auf diesem Gebiet kann man am besten an den Forderungen ablesen, die man heute an elektrische Maschinen stellt. Ein Blick auf diese Forderungen lässt gleichzeitig auch erkennen, welche theoretischen Grundlagen zum Bau und Betrieb elektrischer Maschinen erforderlich sind. Die erste und wichtigste Forderung lautet natürlich, dass jede Maschine imstande ist, die ihr zugeordneten Aufgaben funktionssicher zu erfüllen. Hierzu muss das elektrische und auch das mechanische Verhalten im stationären Betrieb und meist auch im transienten Zustand bekannt sein. Kurzzeitige Überlastungen sollen möglich sein. Bei Kurzschlüssen darf die Maschine in den üblichen Zeiten bis zur Abschaltung nicht beschädigt werden. Hierfür hat man oft bereits beim Entwurf die mechanischen Kräfte zu berechnen, denen die Wicklungen und andere Teile ausgesetzt sind.

Sehr wichtig ist ferner die Wirtschaftlichkeit einer Maschine. Sie wird bestimmt durch Herstellungskosten und Lebensdauer sowie Verlustleistung und Wartung. Im allgemeinen lässt sich die Verlustleistung durch Vergrößern der Abmessungen vermindern, wodurch die Maschine allerdings teurer wird. Daneben spielt die Verringerung der Verluste bei gleichem Materialaufwand durch geschickte Konstruktion eine Rolle. Das lässt sich meist nur durch ausführliches Studium der magnetischen und elektrischen Felder erreichen.



Die Lebensdauer hängt in starkem Maße von der Erwärmung der Wicklungen ab. Aus diesem Grunde hat man sich mit der Temperaturverteilung innerhalb der Maschinen zu befassen. Andererseits interessieren Erwärmung und Abkühlung bei kurzzeitigen Überlastungen. Bei großen Einheiten tritt das Kühlungsproblem immer mehr in den Vordergrund, d.h. das Problem, die entstehende Verlustwärme möglichst schnell aus dem Inneren der Maschine abzutransportieren. Neuester Entwicklungsstand ist hier die direkte Wasserkühlung der stromdurchflossenen Leiter.

In zunehmendem Maße verlangt man heute geräuscharme elektrische Maschinen und Transformatoren. Das Studium des Geräuschproblems enthält die ganze Wirkungskette von der Entstehung der erregenden Kräfte über die mechanischen Schwingungen, die Abstrahlung und Ausbreitung des Schalls bis zum subjektiven Höreindruck. Beim Beginn des Studiums der elektrischen Maschinen empfiehlt sich eine Beschränkung auf wenige Probleme. So wird man in jedem Falle die Geräuschfrage zurückstellen. Es empfiehlt sich ferner, zunächst auf Einzelheiten zu verzichten, die für Entwurf, Berechnung und Konstruktion wichtig sind.

Ziel dieser Vorlesung ist es zum einen, das Verständnis für die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge und die Funktionsprinzipien der elektrischen Maschinen zu vermitteln. Zum anderen soll das Betriebsverhalten in stationären Arbeitspunkten rechnerisch untersucht werden. Dazu werden die Gleichungen hergeleitet, die das Betriebsverhalten, also den Zusammenhang zwischen elektrischen und mechanischen Größen, beschreiben. Besonders eingegangen wird auf Verfahren zur Drehzahlstellung. Nicht näher behandelt wird in dieser Vorlesung die Auslegung und Konstruktion elektrischer Maschinen.

## 1.2 Physikalische Grundlagen

### 1.2.1 Leistungsbetrachtung

Die Belastbarkeit einer elektrischen Maschine wird im allgemeinen durch ihre sogenannte Nennleistung gekennzeichnet. Es ist die Leistung, welche die Maschine über einen längeren Zeitraum, also im Dauerbetrieb, abzugeben vermag, ohne dass unzulässig hohe Temperaturen in ihrem Inneren auftreten, welche ihre Lebensdauer beeinträchtigen würden. Natürlich müssen hierbei bestimmte äußere Bedingungen (z.B. Umgebungstemperatur) eingehalten werden. Bei Generatoren ist die Nennleistung die an den Klemmen der Maschine elektrisch abgegebene Leistung, bei Motoren die an der Welle des Motors mechanisch abgegebene Leistung. Im Betrieb treten in der Maschine Verluste auf, die in Form von Wärmeenergie anfallen (Stromwärmeverluste in den Wicklungen, Wirbelstrom- und Ummagnetisierungsverluste in den magnetischen Eisenwegen, Reibungsverluste). Der Maschine muss also eine entsprechend höhere Leistung zugeführt werden, dem Generator als mechanische Leistung an der Welle, dem Motor als elektrische Leistung aus dem Netz. Natürlich wird man insbesondere bei größeren Maschinen anstreben, dass die anfallende Verlustleistung möglichst gering gehalten wird, wobei allerdings ein zweckmäßiger Kompromiss zwischen der Verlustleistung und den Herstellungskosten geschlossen werden muss. Über die in der Maschine auftretende Verlustleistung in Relation zur abgegebenen Leistung gibt der Wirkungsgrad  $\eta$  Aufschluss.

Es gilt beim Generator

$$\eta = \frac{P_{el}}{P_{mech}} = \frac{P_{mech} - P_v}{P_{mech}} = 1 - \frac{P_v}{P_{mech}} \quad (1.1)$$

Für den Wirkungsgrad beim Motor gilt entsprechend

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{el}} = \frac{P_{el} - P_v}{P_{el}} = 1 - \frac{P_v}{P_{el}} \quad (1.2)$$

Für den Zusammenhang zwischen Leistung und Drehmoment gilt die folgende Beziehung

$$P = M_D \cdot \omega_{\text{masch}} = 2 \pi n M_D \quad (1.3)$$

Außer der Nennleistung gibt es weitere Daten, welche den Nennbetrieb einer elektrischen Maschine kennzeichnen, für den die Maschine entworfen wurde. Sie werden als Nenndaten und mit dem Index N bezeichnet und sind auf dem Leistungsschild der Maschine angegeben (z.B. Nennspannung, Nennstrom, Nenndrehzahl usw.). Außerdem werden die Wicklungsanschlüsse (Klemmen) einheitlich mit Buchstaben gekennzeichnet, die in den VDE-Vorschriften festgelegt sind. Überhaupt sind in diesen Vorschriften viele wichtige Begriffe und Kenngrößen elektrischer Maschinen definiert, was für die Aufgabenklärung und technische Abwicklung größerer Projekte, bei denen viele Ingenieure zusammenarbeiten müssen, von sehr wesentlicher Bedeutung ist. Auch die Durchführung von wichtigen Maschinenprüfungen und -messungen ist hier festgelegt (VDE 0530).

## 1.2.2 Physikalische Grundgesetze

Das physikalische Verhalten elektrischer Maschinen lässt sich aus den fundamentalen Grundgesetzen der Elektrotechnik - den Maxwell'schen Gleichungen und dem Lorentz'schen Kraftgesetz - herleiten. Es zeigt sich jedoch, dass diese Grundgleichungen für die Behandlung rotierender elektrischer Maschinen auf eine handlichere Form gebracht werden müssen. Dies ist möglich, wenn man die besonderen Verhältnisse berücksichtigt, die bei solchen Maschinen vorliegen.

Betrachtet man den prinzipiellen Aufbau einer rotierenden elektrischen Maschine, wie er im Bild 1-2 dargestellt ist, so besteht diese aus einem feststehenden Teil, dem Ständer, und einem um seine Rotationsachse drehbar gelagerten Teil, dem Läufer .

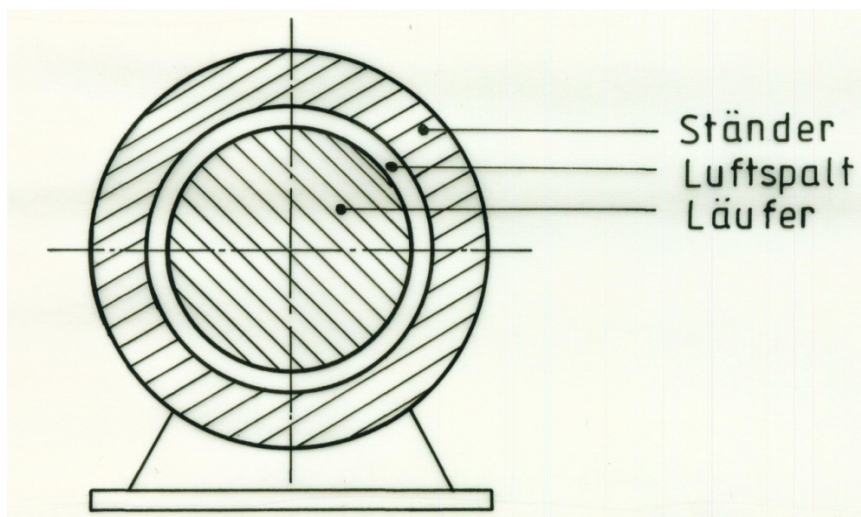


Bild 1-2: Schnitt senkrecht zur Achse einer rotierenden elektrischen Maschine

Ständer und Läufer werden durch einen Luftspalt getrennt. Auf beiden Seiten des Luftspaltes sind in axialer Richtung elektrische Leiter angeordnet, die an den Stirnseiten der Maschine in sogenannten Wickelköpfen zu Spulen zusammengeschaltet werden.

Soll die Maschine als Motor eingesetzt werden, so will man an ihrer Welle ein Drehmoment zur Verfügung haben. Dies kann man erreichen, wenn man einen physikalischen Effekt ausnützt, der als magnetische Lorentzkraft bezeichnet und durch die Gleichung

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.4)$$

beschrieben wird.

Soll die Maschine als Generator betrieben werden, so will man mit ihrer Hilfe eine belastbare Spannung erzeugen. Dazu nützt man eine Erscheinung aus, die durch das Induktionsgesetz

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (1.5)$$

beschrieben wird.

### 1.2.3 Das magnetische Feld in elektrischen Maschinen

Wie die Gleichungen (1.4) und (1.5) zeigen, ist sowohl für motorischen als auch für generatorischen Betrieb eine magnetische Induktion  $\vec{B}$  in der Maschine erforderlich. Diese Induktion wird gewöhnlich mit Hilfe von stromdurchflossenen Spulen erzeugt. Der Einsatz von Dauermagneten (Permanenterregung) ist nur in einigen speziellen Anwendungsfällen üblich.

Um die Gleichungen (1.4) und (1.5) auf elektrischen Maschinen anwenden zu können, müssen zunächst die Feldverhältnisse in den Maschinen geklärt werden. Dazu wertet man das Durchflutungsgesetz

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \left[ \iiint \vec{j} d\vec{A} + \epsilon_0 \iint \vec{E} d\vec{A} \right] \quad (1.6)$$

aus, das in allgemeingültiger Form den Zusammenhang zwischen der magnetischen Induktion und den erregenden Strömen bzw. Verschiebungsströmen herstellt. Der Anteil der Verschiebungsströme ( $\epsilon_0 \iint \vec{E} d\vec{A}$ ) kann bei der Anwendung auf elektrische Maschinen vernachlässigt werden, da sie um mehrere Größenordnungen kleiner sind als die übrigen auftretenden Ströme.

Zur Auswertung der Gleichung (1.6) ist es erforderlich, den Aufbau von elektrischen Maschinen und deren Wicklungsanordnung näher zu betrachten. Bild 1-3 zeigt einen Schnitt durch eine zweipolige Gleichstrommaschine, bei der deutlich die beiden Pole und die Erregerwicklung zu erkennen sind.

Die Stromdichte  $\vec{j}$ , die hier als alleinige Ursache für die magnetische Induktion in der Maschine auftritt, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der eine Anteil rührt von den sogenannten freien Strömen in den Erregerwicklungen her und wird mit  $\vec{j}_f$  bezeichnet. Der zweite Anteil berücksichtigt die Tatsache, dass im Eisen mikroskopisch kleine magnetische Dipole vorhanden sind, die beim Auftreten einer magnetischen Induktion ausgerichtet

werden. Dieser Erscheinung wird durch die Magnetisierungsstromdichte  $\vec{j}_{mag}$  Rechnung getragen. Es gilt also

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_{mag} \quad (1.7)$$

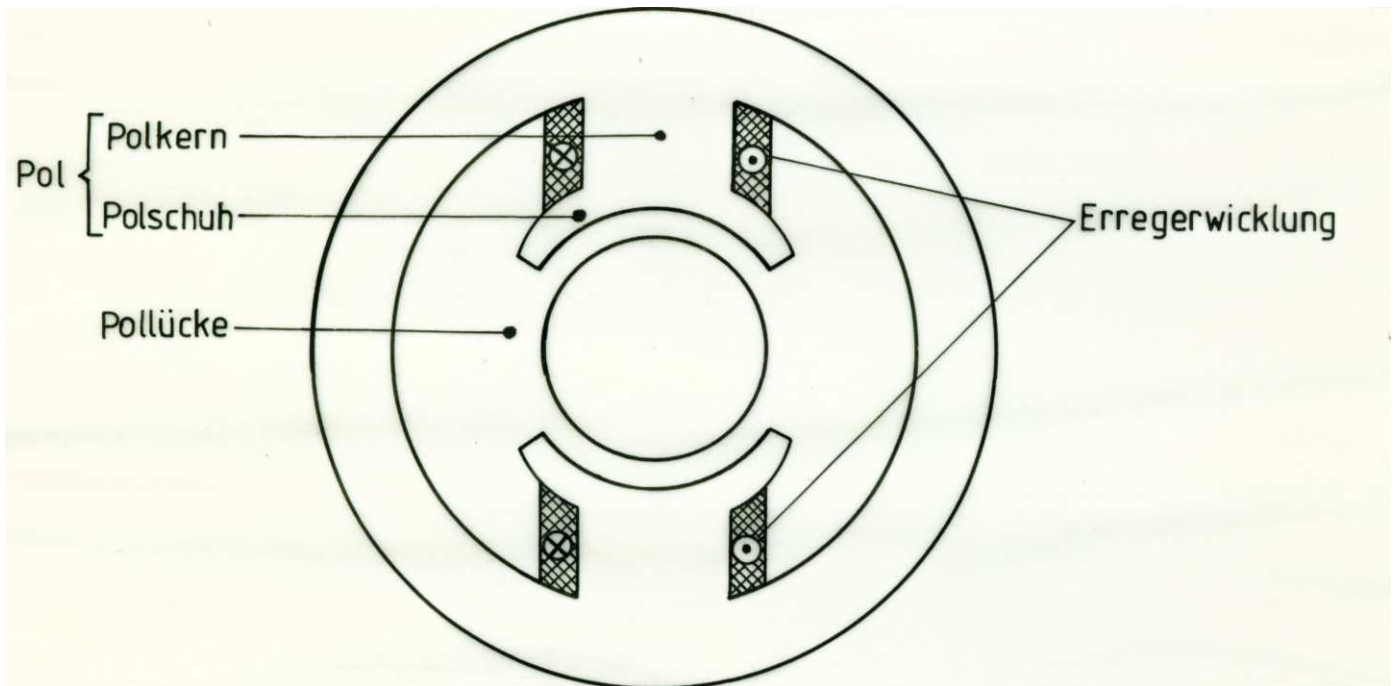


Bild 1-3: Schnitt durch eine zweipolige Gleichstrommaschine

Da die Magnetisierungsstromdichte von vornherein nicht bekannt ist, führt man anstelle der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ein, als deren einzige Ursache (bei Vernachlässigung der Verschiebungsströme) die freien Ströme  $I_f$  angesehen werden. Das Durchflutungsgesetz erhält damit die Form

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{j}_f d\vec{A} \quad (1.8)$$

Im Vakuum oder in Luft, wo keine Magnetisierungsströme auftreten, da keine elementaren magnetischen Dipole vorhanden sind, liefert ein Vergleich der Gleichungen (1.6) und (1.8) die Beziehung

$$\vec{B}_L = \mu_0 \vec{H}_L \quad (1.9)$$

Im Eisen muss diese Beziehung um den Vektor der Magnetisierung  $\vec{M}$  erweitert werden, der die Verstärkung der magnetischen Induktion durch das Eisen berücksichtigt. Es gilt dann

$$\vec{B}_{Fe} = \mu_0 (\vec{H}_{Fe} + \vec{M}) \quad (1.10a)$$

$\vec{M}$  steht mit  $\vec{H}$  in einem nichtlinearen Zusammenhang, der für das jeweils verwendete Material typisch ist und durch eine Kennlinie angegeben werden kann.

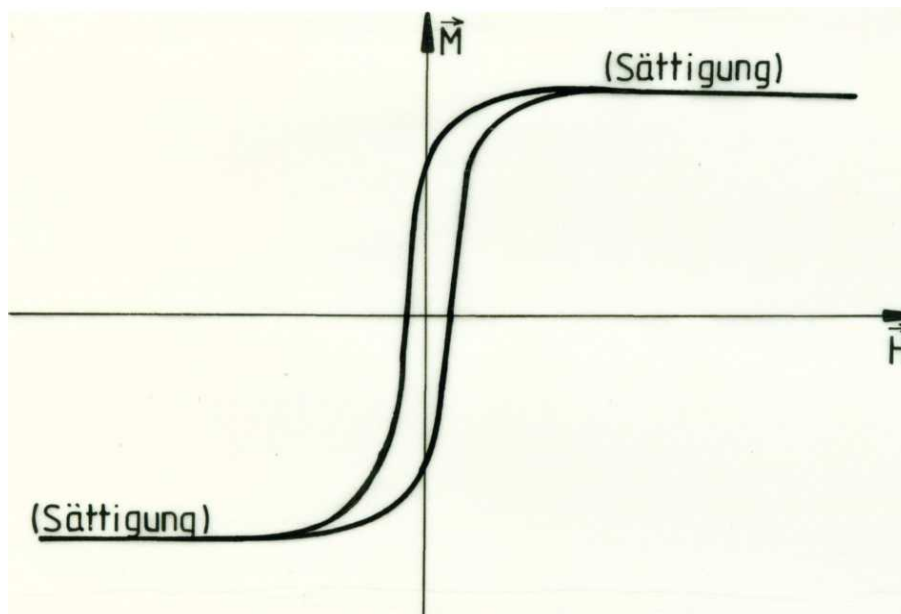


Bild 1-4:  $\vec{M}$ - $\vec{H}$ -Kurve eines ferromagnetischen Materials

Wie Bild 1-4 zeigt, wächst  $\vec{M}$  von einem bestimmten Wert der magnetischen Feldstärke an nicht weiter. Im waagrechten Bereich der Kurvenäste sind alle Elementarmagnete ausgerichtet; das Eisen ist gesättigt. In der Praxis legt man den magnetischen Kreis elektrischer Maschinen so aus, dass auch der gekrümmte Teil der Kennlinie ausgenutzt wird. Man kann dann einen Zusammenhang

$$\vec{B}_{Fe} = \mu_0 * \mu_r * \vec{H}_{Fe} \quad (1.10b)$$



angeben, bei dem eine nichtlineare Funktion von  $\vec{H}_{Fe}$  darstellt, deren Wert aber in jedem Fall sehr viel größer als 1 ist ( $\mu_r \approx 10^3 \dots 10^4$ ). Dies hat zur Folge, dass man bei einer vereinfachten Auswertung des Durchflutungsgesetzes den "magnetischen Spannungsabfall" im Eisen vernachlässigen kann.

Wird die Erregerwicklung der in Bild 1-3 dargestellten Maschine von einem Strom durchflossen, so wird sich ein magnetisches Feld ausbilden. Die Feldlinien sind in sich geschlossene Kurven, die die erregenden Ströme umschließen. Aufgrund der hohen Permeabilität verlaufen sie vorwiegend im Eisen. In Bild 1-5 ist der Verlauf einiger Induktionsfeldlinien dargestellt.

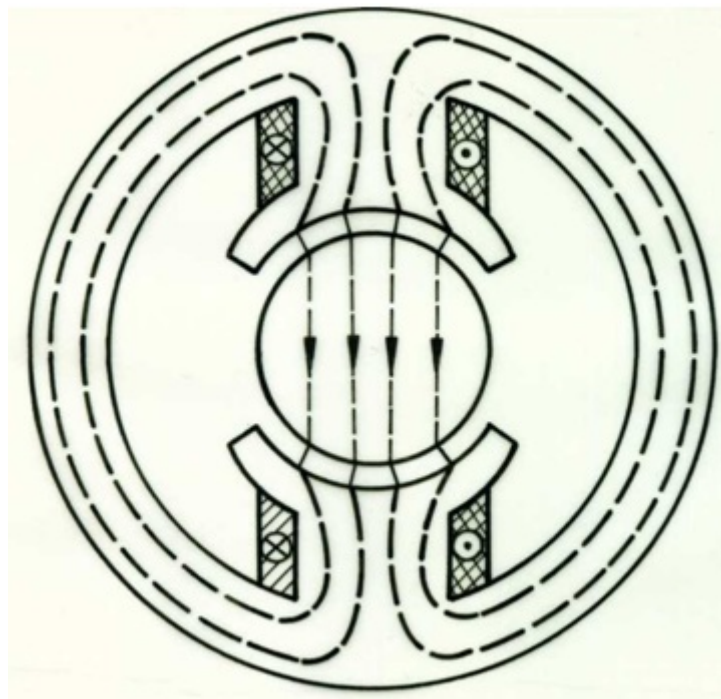


Bild 1-5: Verlauf der Induktionsfeldlinien in einer zweipoligen Gleichstrommaschine

Eine genauere Aussage über den Verlauf der Feldlinien ist im Bereich des Luftspaltes möglich. Man kann zeigen, dass an einer Übergangsfläche zwischen Eisen und Luft für die Normal- und Tangentialkomponenten der magnetischen Flussdichte folgende Beziehungen gelten

$$B'_{\perp} = B_{\perp} \quad \text{und} \quad B'_t = \frac{1}{\mu_r} B_t \quad (1.11)$$

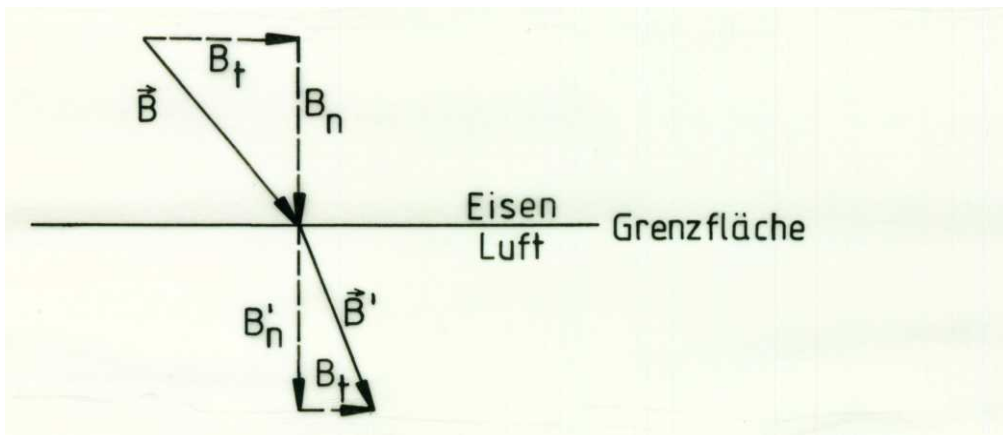


Bild 1-6: Übergang der Feldlinien der magnetischen Flussdichte an einer Grenzfläche

Daraus lässt sich folgern, dass die Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte beim Austritt aus Stoffen hoher Permeabilität nahezu verschwindet. Angewandt auf elektrische Maschinen bedeutet das, dass die Feldlinien der magnetischen Flussdichte im Luftspalt in radialer Richtung verlaufen.

Nach diesen vorbereitenden Überlegungen können die Integrale des Durchflutungsgesetzes (Gl. 1.8) ausgewertet werden. Wählt man als Integrationsweg eine Feldlinie, wie sie in Bild 1-5 eingezeichnet ist, so muss das Flächenintegral über die gesamte von dieser Feldlinie berandete Fläche gebildet werden. Wie leicht einzusehen ist, wird diese Fläche gerade  $w$ -mal ( $w$  = Windungszahl der Erregerwicklung) vom Erregerstrom  $I_f$  durchsetzt, so dass gilt

$$\iint \vec{j}_f \cdot d\vec{A} = w I_f \quad (1.12)$$

Nimmt man zur Vereinfachung der weiteren Überlegungen an, dass der Wert der magnetischen Flussdichte längs einer Feldlinie konstant ist, so ergibt sich

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = H_{F\vartheta} l_{F\vartheta} + H_L * 2\delta = \frac{1}{\mu_0} B \left( \frac{l_{F\vartheta}}{\mu_r} + 2\delta \right) \approx \frac{B}{\mu_0} 2\delta \quad (1.13)$$

wobei  $l_{Fe}$  die Länge des Eisenweges und  $\delta$  die Breite des Luftspalts ist.

Anmerkung: Die Vereinfachung, dass der Betrag von  $\vec{B}$  sich längs einer Feldlinie nicht ändert, entspricht im Eisen nicht den tatsächlichen Verhältnissen. Das Ergebnis wird davon aber nicht beeinflusst, da man bei hinreichend großem  $\mu_r$  den Anteil von  $\vec{H}_{Fe}$  am Umlaufintegral ohnehin vernachlässigen kann.

Fügt man die Gleichungen (1.12) und (1.13) wieder zusammen, so erhält man für die magnetische Flussdichte den Wert

$$B = \mu_0 \frac{w I_f}{2\delta} \quad (1.14)$$

Damit steht eine Beziehung zur Verfügung, die es gestattet, ohne großen mathematischen Aufwand Aussagen über den Betrag der magnetischen Flussdichte im Luftspalt einer elektrischen Maschine zu machen. Bei ihrer Anwendung sollte man sich jedoch stets über die bei der Herleitung gemachten Vernachlässigungen im klaren sein, da sie die Grenzen der Anwendbarkeit festlegen.

Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen kann also die magnetische Flussdichte an der Übergangsstelle einer Feldlinie vom Ständer zum Läufer bestimmt werden. Um die Verteilung der Flussdichte in Umfangsrichtung zu ermitteln, wählt man Feldlinien aus, die an verschiedenen Stellen den Luftspalt überqueren, und führt die angestellten Überlegungen entsprechend durch.

Man kommt zu dem Ergebnis, dass die Flussdichte im Bereich der Polschuhe annähernd konstant ist und im Bereich der Pollücke rasch auf null abklingt. Zur graphischen Darstellung der Verteilung der Flussdichte im Luftspalt ist es zweckmäßig, den Läuferumfang auf eine Gerade abzuwickeln. Bild 1-7 zeigt in einer solchen abgewickelten Darstellung die Läuferoberfläche mit den gegenüberliegenden Polen, sowie die dazugehörige Verteilung der Flussdichte.

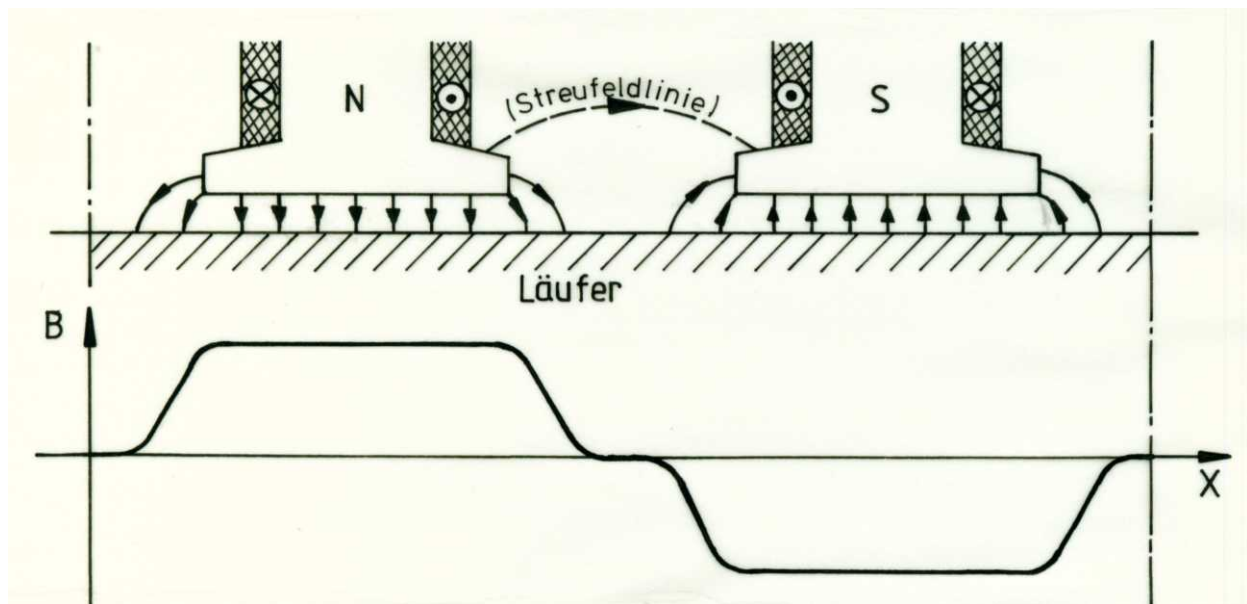


Bild 1-7: Verteilung der Flussdichte in Umfangsrichtung

Dass sich die Flussdichte im Luftspalt in axialer Richtung nicht ändert, kann man sich leicht klarmachen, wenn man bedenkt, dass sich der Aufbau der Maschine (abgesehen von den beiden Stirnseiten) in axialer Richtung nicht ändert. Die Auswertung des Durchflutungsgesetzes liefert dann überall die gleichen Ergebnisse.

Anstelle der magnetischen Flussdichte wird bei Berechnungen an elektrischen Maschinen häufig die daraus abgeleitete Größe des magnetischen Flusses  $\Phi$  verwendet. Man erhält  $\Phi$ , wenn man die Flussdichte  $\vec{B}$  gemäß der Gleichung

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (1.15)$$

über eine Fläche aufintegriert. Wählt man bei der Gleichstrommaschine nach Bild 1-3 eine Fläche, die von einer Windung der Erregerwicklung begrenzt ist, so kann man den Fluss angeben, der mit dieser Windung verkettet ist. Betrachtet man statt einer einzelnen Windung die gesamte Spule mit  $w$  eng beieinanderliegenden Windungen, so wird diese gerade  $w$ -mal vom Fluss  $\Phi$  durchsetzt. Da man es bei elektrischen Maschinen praktisch immer mit Spulen zu tun hat, die aus mehreren Windungen bestehen, führt man die Flussverkettung ein, für die gilt

$$\Psi = W * \Phi \quad (1.16)$$

Die Flussverknüpfung ist dem erzeugenden Strom proportional

$$\Psi = L * I \quad (1.17)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $L$  wird Induktivität genannt. Er ist auf Grund der Sättigungserscheinungen im Eisen arbeitpunktabhängig.

Berücksichtigt man noch die Tatsache, dass einige Feldlinien der magnetischen Flussdichte nicht mit den Wicklungssystemen von Ständer und Läufer verknüpft sind, sondern dass sie sich auf sogenannten Streuwegen schließen (vgl. Bild 1-7), so kann man das magnetische Feld in ein Streufeld und ein Hauptfeld aufteilen. Dementsprechend kann auch der Spulenfluss in einen Hauptfluss  $\Psi_h$  und einen Streufluss  $\Psi_\sigma$  aufgeteilt werden.  $\Psi_h$  fasst dabei die Feldlinien zusammen, die mit den Wicklungssystemen von Ständer und Läufer verkettet sind,  $\Psi_\sigma$  diejenigen, die nur mit einer Wicklung verknüpft sind. Den beiden Flussanteilen kann dann jeweils eine Induktivität zugeordnet werden. Im Falle der Erregerwicklung der in Bild 1-3 betrachteten Gleichstrommaschine erhält man als Hauptinduktivität

$$L_{fh} = \frac{\Psi_{fh}}{I_f} \quad (1.18a)$$

und als Streuinduktivität

$$L_{f\sigma} = \frac{\Psi_{f\sigma}}{I_f} \quad (1.18b)$$

### 1.2.4 Drehmomentbildung

Nachdem die Verteilung der Flussdichte im Luftspalt der Maschine geklärt ist, kann auch das auf den Läufer ausgeübte Drehmoment berechnet werden. Dazu wird das Lorentz'sche Kraftgesetz

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

ausgewertet, das die Kraft beschreibt, die eine bewegte elektrische Ladung im magnetischen Feld erfährt.

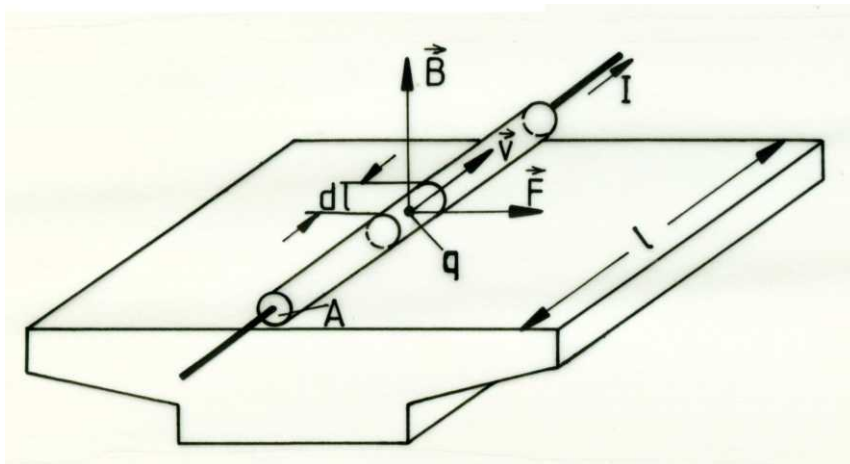


Bild 1-8: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

Bild 1-8 zeigt in abgewickelter Darstellung einen Pol einer Gleichstrommaschine, dem ein stromdurchflossener elektrischer Leiter gegenüberliegt. Betrachtet man statt eines einzelnen Ladungsträgers ein Leiterelement mit der Länge  $d\vec{l}$  und dem Querschnitt  $A$ , in dem die homogene Raumladungsdichte  $q$  herrscht, so kann man die Kraft auf dieses Leiterelement angeben als

$$d\vec{F} = q \cdot A \cdot d\vec{l} (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.19)$$

Führt man in diese Gleichung den Vektor der im vorliegenden Fall homogenen Stromdichte

$$\vec{j} = q \cdot \vec{v} \quad (1.20)$$

ein und verwendet statt des Produktes  $\vec{j} \cdot \vec{A}$  die Stromstärke  $I$  gemäß

$$\vec{j} \cdot \vec{A} = I \cdot \vec{n} \quad (1.21)$$

wobei  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor senkrecht zu  $A$  ist, so erhält man als Kraft auf das Leiterelement.

$$d\vec{F} = I \cdot dl(\vec{n} \times \vec{B}) \quad (1.22)$$

Diese Gleichung lässt sich auf einen ausgedehnten Leiter in einer elektrischen Maschine leicht anwenden, wenn man berücksichtigt, dass

- die Leiter geradlinig in axialer Richtung entlang dem Luftspalt der Maschine verlaufen
- die Luftspaltinduktion in axialer Richtung und damit über die gesamte Länge  $l$  des Leiters konstant ist
- die Vektoren  $\vec{n}$  und  $\vec{B}$  stets aufeinander senkrecht stehen.

Die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter der Länge  $l$  im Luftspalt einer elektrischen Maschine ergibt sich damit zu

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (1.23)$$

Ist dieser Leiter fest mit dem Läufer der Maschine verbunden, so übt er ein Drehmoment der Größe

$$\vec{M}_D = \vec{F} \cdot \vec{r} = r \times I \vec{l} \times \vec{B} \quad (1.24)$$

auf den Läufer aus, wenn  $r$  der Läuferradius ist. Das Gesamtdrehmoment auf den Läufer erhält man, wenn man die einzelnen Teildrehmomente, die von den über den Umfang verteilten Leitern herrühren, aufsummiert.

Anmerkung: In Wirklichkeit sind die Verhältnisse an der Läuferoberfläche etwas komplizierter als bei der obigen Betrachtungsweise angenommen. Die Leiter liegen nicht unmittelbar im Luftspalt, sondern in Nuten. Dies beeinträchtigt die prinzipielle Gültigkeit der Gleichungen (1.23) und (1.24) jedoch nicht.



### 1.2.5 Spannungsbildung

Die Spannungsbildung in elektrischen Maschinen lässt sich aus dem Induktionsgesetz herleiten. In seiner integralen Form

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = - \iint \vec{B} d\vec{A}$$

stellt es eine Beziehung her zwischen der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$ , die in einer geschlossenen Schleife herrscht, und der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$ , die eine von der Schleife berandete Fläche durchsetzt. Das negative Vorzeichen ergibt sich, wenn der Flächenvektor  $d\vec{A}$ , der auf dem jeweiligen Flächenelement senkrecht steht, im Sinne einer Rechtsschraube mit dem Umlaufintegral verknüpft ist.

Wählt man zur Auswertung des Induktionsgesetzes eine Leiterschleife der Läuferwicklung einer Gleichstrommaschine (vgl. Bild 1-9), so muss man die in dem läuferfesten Koordinatensystem  $\Sigma'$  gemessene elektrische Feldstärke  $\vec{E}'$  mit der im ständerfesten Koordinatensystem  $\Sigma$  gemessenen magnetischen Induktion  $\vec{B}$  verknüpfen. Da sich die Koordinatensysteme  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  gegeneinander bewegen, müssen bei der Anwendung des Induktionsgesetzes die Feldgrößen auf ein gemeinsames Koordinatensystem umgerechnet werden. Mit der Beziehung

$$\vec{E}' = \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.25}$$

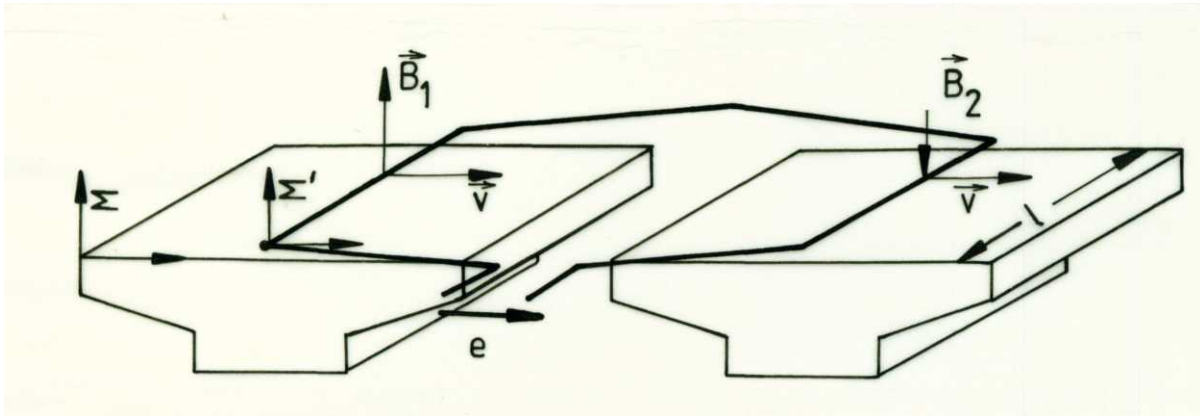


Bild 1-9: Spannungsinduktion in einer Leiterschleife

in der  $\vec{B}$  die in elektrischen Maschinen alleine vorhandene Komponente der Flussdichte senkrecht zur Geschwindigkeit bezeichnet, erhält man

$$\oint \vec{E}' d\vec{s} = \oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} = - \iint \dot{\vec{B}} d\vec{A} + \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s} \quad (1.26)$$

Die an den Klemmen der Leiterschleife auftretende Spannung  $e$  setzt sich demnach aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil, repräsentiert durch  $-\iint \dot{\vec{B}} d\vec{A}$ , wird auf eine Änderung der Induktion im ständerfesten Koordinatensystem zurückgeführt und als Spannung der Transformation bezeichnet. Der zweite Anteil, dargestellt durch  $\oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$ , geht auf eine Bewegung der Leiterschleife relativ zum Koordinatensystem  $\Sigma$  zurück und wird als Spannung der Rotation bezeichnet.

Wertet man die Gleichung (1.26) für die in Bild 1-9 angegebene Leiterschleife aus, so wird zunächst die Spannung der Transformation zu Null

$$-\iint \dot{\vec{B}} d\vec{A} = 0$$

da  $\vec{B}$  zeitlich konstant ist. Vernachlässigt man nun das Feld an den Stirnseiten der Maschine und berücksichtigt, dass  $\vec{B}$  in axialer Richtung konstant ist, so erhält man

$$u_t = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{s}$$

Die induzierte Spannung, auch als elektromotorische Kraft *EMK* bezeichnet, hängt also von der Induktion an den Stellen des Läuferumfangs ab, wo die beiden Spulenseiten liegen. Aus diesem Grund können wir auch von den Beiträgen der einzelnen Spulenseiten sprechen, oder kurz von der in einem Leiter induzierten EMK. Es ergibt sich für die in einem Leiter der Maschine induzierte Spannung der Rotation die einfache Beziehung

$$u_t = v \cdot l \cdot B \quad (1.27)$$

Diese Spannung erweist sich als zweckmäßige Rechengröße für den Elektromaschinenbau, wo sie üblicherweise als Stabspannung bezeichnet wird.

Zum Verständnis von Übergangsvorgängen in elektrischen Maschinen ist es oft nützlich,

die zeitliche Änderung der Flussverkettung  $\frac{d\psi}{dt}$  der untersuchten Spule zu betrachten. Aus dem Induktionsgesetz lässt sich herleiten, dass ein Stromkreis ohne eingeprägte äußere Spannung und mit vernachlässigbarem ohmschem Widerstand bestrebt ist, den mit ihm

verketteten Fluss konstant zu halten:  $\frac{d\psi}{dt} = 0$  (Lenz'sche Regel). Andererseits bewirkt eine von außen an den Stromkreis angelegte Spannung  $u$  eine entsprechende Änderung der Flussverkettung. Allgemein lässt sich für einen Stromkreis bei Verwendung der Flussverkettung als Variable die Beziehung anschreiben

$$u = R \cdot I + \frac{d\psi}{dt}$$

## 1.2.6 Prinzip der elektromechanischen Energiewandlung

Die beiden vorher getrennt beschriebenen Phänomene der Drehmoment- und der Spannungsbildung sind nicht voneinander unabhängig. So muss beim Motor eine induzierte EMK und beim Generator ein Drehmoment berücksichtigt werden.

Eine einfache Leistungsbetrachtung soll den Zusammenhang verdeutlichen. Belastet man die in der Leiterschleife nach Bild 1-9 induzierte Spannung  $u_i$  mit einem ohmschen Widerstand  $R$ , so wird ein Strom der Größe

$$i = \frac{u_i}{R} \quad (1.28)$$

zum Fließen kommen. Die von der Maschine abgegebene elektrische Leistung erhält man aus dem Produkt

$$P_{el} = u_i \cdot i = v l (B_1 + B_2) i \quad (1.29)$$

Dieser Strom bewirkt aber seinerseits, dass Kräfte auf die beiden Leiterstäbe ausgeübt werden. Für sie gilt nach Gleichung (1.23)

$$F_1 = -i \cdot l \cdot B_1 \quad \text{und} \quad F_2 = -i \cdot l \cdot B_2$$

wenn man  $F$  in Richtung positiver Geschwindigkeit positiv zählt.

Damit lässt sich die umgesetzte mechanische Leistung,

$$P_{mech} = F_1 v + F_2 v = -i \cdot l (B_1 + B_2) v \quad (1.30)$$

angeben. Die Leistungsbilanz

$$P_{el} + P_{mech} = 0 \quad (1.31)$$

zeigt, dass die elektrisch abgegebene Leistung mechanisch zugeführt werden muss.

Der Prozess der elektromechanischen Energiewandlung kann in beiden Richtungen stattfinden. Je nachdem, was bei dem Vorgang als Ursache und was als Wirkung anzusehen ist, können wir von Generatorbetrieb oder von Motorbetrieb sprechen. Im oben betrachteten Fall war die Ursache die Bewegung des Leiters und damit das Erzeugen einer belastbaren Spannung (Generatorbetrieb), hierbei tritt eine Kraft auf die Leiter auf, die ihrer Bewegung entgegenwirkt.

Wir können jedoch auch durch eine äußere Spannungsquelle der Leiterschleife Leistung zuführen, so dass diese infolge der magnetischen Lorentzkraft beschleunigt wird (Motorbetrieb). Als Folge dieser Bewegung tritt dann aber eine induzierte EMK im Stromkreis auf, die dem Strom entgegenwirkt.