

## Existence of Specific Solutions to Systems of Linear Equations over Finite Fields

Ein Kartendeck des Kartenspiels „Set“ enthält 81 Karten. Jede dieser Karten hat vier Attribute, welche jeweils einen von drei Werten haben (Form: Oval, Raute, Welle; Farbe: Rot, Grün, Violett; Anzahl: eins, zwei, drei; Füllung: leer, schraffiert, voll). Ein *Set* ist eine Auswahl von drei Karten, die pro Attribut entweder alle denselben oder alle einen anderen Wert haben. Ziel des Spiels ist es, aus einer gegebenen Menge an ausgelegten Karten ein Set zu finden. Eine interessante Frage ist dabei, wie viele Karten maximal ausgelegt werden können, ohne dass ein Set existiert. Für  $n = 4$  Attribute ist die maximale Anzahl 20 bekannt, aber für  $n = 7$  Attribute ist sie bereits unbekannt. Eine schwächere Frage ist wie sich die maximale Anzahl asymptotisch verhält, wenn  $n$  beliebig groß wird.

Mathematisch lässt sich dies als Frage nach der Existenz von Lösungen von bestimmten linearen Gleichungssystemen (LGS) formulieren. In einer Menge von Vektoren („ausgelegte Karten“) soll eine Teilmenge existieren, die ein gegebenes LGS löst („ein Set bildet“) und gegebenenfalls noch weitere Eigenschaften erfüllt. Wie groß kann dabei die Menge an Vektoren sein, ohne dass eine solche Teilmenge existiert? Viele andere Fragestellungen in der Kombinatorik lassen sich auf ähnliche Weise formulieren.

Um Fragen dieser Art zu beantworten, hat Terence Tao die *slice-rank polynomial method* eingeführt, welche von Lisa Sauermann weiterentwickelt wurde. In meiner Masterarbeit stelle ich diese Theorie vor. Als Ergebnis wird gezeigt, dass sich die maximale Anzahl asymptotisch exponentiell klein verhält im Vergleich zur gesamten Menge an möglichen Vektoren („das gesamte Kartendeck“). Dabei werden verschiedene Werkzeuge aus der Theorie der Endlichen Körper, der Linearen Algebra, der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie benutzt. Eine besondere Rolle für die Entwicklung der Beweise spielen dabei die sogenannten *admissible sets*.

Weiterhin wird der Zusammenhang zwischen den *admissible sets* und Objekten in der Codierungstheorie untersucht. Die Codierungstheorie versucht Informationen so darzustellen, dass sie trotz Übertragungsfehlern noch zu entnehmen sind. Zum Beispiel kann bei QR-Codes ein gewisser Teil überdeckt oder übermalt werden und trotzdem lässt sich der QR-Code noch scannen. Dafür werden gewisse Strukturen mit speziellen kombinatorischen Eigenschaften benötigt.