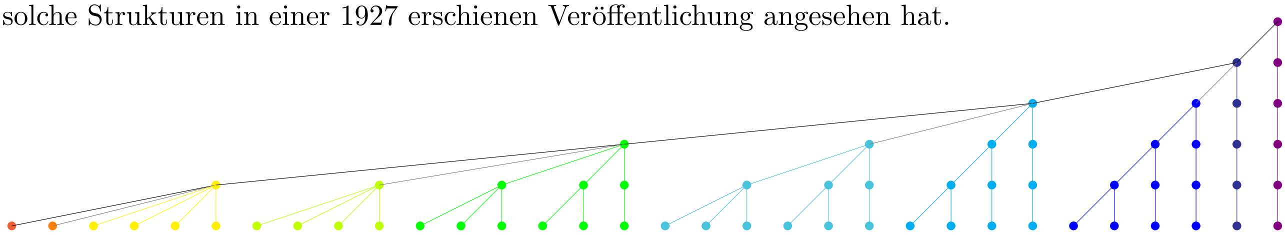
Über Eigenschaften spezieller Macaulay Posets

Duale Orthogonaler Produkte von Simplizes und das Duale der 0-1-Teilwort-Ordnung sind end-schattenvergrößernd

Was mich an der Mathematik und speziell an der Kombinatorik besonders begeistert, ist, wie wenig es für spannende und hübsche Strukturen braucht. Meine Masterarbeit handelt in erster Linie von Strichen und Punkten – und die meisten Beweise lassen sich durch einfache Schemata veranschaulichen. Zur Einführung in das Thema und um auf intuitive Begrifflichkeiten zurückgreifen zu können, möchte ich ein kleines Bild heranziehen: Betrachten wir eine Großfamilie von etwa Mäusen, unter denen keine sonderlichen Vorbehalte gegenüber Nachwuchs zwischen Verwandten bestehen. (Genau genommen ist auch die Anzahl der Eltern pro Kind nicht von Belang.) Wichtig ist, dass Nachwuchs ausschließlich zwischen Mäusen der gleichen Generation auftritt. Es lässt sich also eine Unterteilung des Stammbaums in Generationen vornehmen, sodass alle Verbindungen von Eltern und Kind zwischen aufeinanderfolgenden Generationen verlaufen. Diese Vorfahre-Nachkomme-Relation stellt eine *Halbordnung* auf der Menge der Mäuse dar; Mäuse der gleichen Generation lassen sich so zum Beispiel noch nicht vergleichen. Eine solche Struktur heißt *Poset*. Um auch die Mäuse innerhalb einer Generation vernünftig anordnen zu können, sortieren wir den Stammbaum zusätzlich von links nach rechts aufsteigend nach dem Alter. Dieses ist für zwei Mäuse stets vergleichbar und liefert uns eine *Totalordnung* auf dem Mäuse-Poset. Schließlich fordern wir noch, dass die jüngsten Mäuse einer Generation stets die wenigsten und die jüngsten Nachkommen haben – und schon wird aus unserem Mäuse-Poset ein *Macaulay Poset*, benannt nach dem Britischen Mathematiker F. S. Macaulay, der sich als erster solche Strukturen in einer 1927 erschienen Veröffentlichung angesehen hat.



Nun interessiere ich mich besonders für die Darstellung von Macaulay Posets, welche man erhält, wenn man im Stammbaum eine Maus nur mit ihrem *jüngsten* Elternteil verbindet. Das Hauptresultat meiner Masterarbeit besteht in dem Nachweis, dass jedes Macaulay Poset einer gewissen Klasse die folgende Eigenschaft – *end-schattenvergrößernd* genannt – hat: Wenn man aus zwei aufeinanderfolgenden Generationen gleich viele älteste Mäuse betrachtet, dann haben in der beschriebenen Darstellung die der oberen Generation zusammen stets mindestens so viele Nachkommen wie die der unteren. Daraus konnte ich weitere nette und bisher noch offene Eigenschaften für gewisse Macaulay Posets folgern.
In der Arbeit wird zudem die 0-1-Teilwort-Ordnung behandelt, deren obere Schichten auf der Abbildung dargestellt sind. Dazu betrachte man alle *Worte*, die sich aus dem *Alphabet* $\{0, 1\}$ bilden lassen. Diese teilen wir entsprechend ihrer Länge in Schichten ein, verbinden ein Wort mit allen, die sich durch Ergänzen eines Buchstabens an beliebiger Stelle erzeugen lassen und ordnen gemäß der Gesamtanzahl an Einsen bzw. der ersten auftretenden Eins von links nach rechts, um ein Macaulay Poset zu erhalten. Löscht man wieder von jedem Wort alle Verbindungen nach oben außer der ersten, so beobachtet man, dass die unterschiedlich eingefärbten Teilposets jeweils isomorph zu anderen sind. Dies konnte ich nutzen, um auch für die 0-1-Teilwort-Ordnung End-Schattenvergrößerung nachzuweisen.
Obwohl es sich dabei um ein recht theoretisches Thema hat, gibt es durchaus einige Anwendungen; insbesondere für gewisse Optimierungsprobleme sind Macaulay Posets mit zusätzlichen Eigenschaften von Interesse. Lediglich eine Anwendbarkeit auf Mäuse ist mir bislang nicht bekannt – vermutlich ist diesen ihr Stammbaum auch ziemlich egal.