Universität Rostock
Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaften
Klausur 13.02.2023

Gruppe A

Aufgabe A1 (3 Punkte):

Der Materialverbrauch einer Firma sinkt seit Jahren. Der Verbrauch eines Jahres setzt sich jeweils wie folgt zusammen: Für die immer weiter optimierte Produktion fallen stets nur noch 90% des Materialverbrauchs vom Vorjahr an. Die Entwicklungsabteilung verbraucht aber auch etwas und so kommen noch 3% des Materialverbrauchs von vor zwei Jahren hinzu.

(a) Stellen Sie eine Rekursion zur Bestimmung des Materialverbrauchs v_k im Jahr k auf.
(b) Berechen Sie ausgehend von $v_{2020} = 38$ und $v_{2021} = 34.2$ den Wert v_{2023}.
(c) Geben Sie die charakteristische Gleichung der Rekursion an.

Aufgabe A2 (4 Punkte):

(a) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 26x - 14y + 3$.
(b) Überprüfen Sie die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums mittels der Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen. Welche Art von Extremum liegt vor?

Aufgabe A3 (4 Punkte):

Bestimmen Sie zur Nachfrage $N(p) = 10/(p^2 + 10)$ und zum Angebot $A(p) = \exp(0.1p) - 1$ den Gleichgewichtspreis p^* mit $A(p^*) = N(p^*)$. Das gesuchte p^* liegt im Interval $I = [3, 4]$.

(a) Stellen Sie dazu eine geeignete Funktion auf, deren Nullstelle p^* liefert.
(b) Nutzen Sie das Bisektionsverfahren (führen Sie 3 Schritte aus, startend mit I).
(c) Nutzen Sie das Newton-Verfahren (führen Sie 1 Schritte aus, startend mit $p = 3.5$).

Aufgabe A4 (5 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Welchen Rang hat die Matrix A?
(c) Geben Sie die Lösungsmenge für $Ax = b$, unter der Restriktion $x \geq 0$, an.

Aufgabe A5 (4 Punkte):

Für die Produktion werden die beiden Rohstoffe x_1 und x_2 benötigt. Lagermöglichkeiten und Liquidität führen auf die Beschränkungen

$$\begin{array}{ccccl} x_1 & & & \leq 9 \\ & & x_2 & \leq 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq 13 \end{array}.$$

Bei der Verarbeitung von Rohstoffmengen x_1 und x_2 ergibt sich ein Gewinn von $x_1 + 3x_2$.

(a) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich des Optimierungsproblems.
(b) Für welche Wahl von (x_1, x_2) wird der Gewinn maximal?