**Universität Rostock**
**Institut für Mathematik**

Rostock, 20.02.2024

# Modulprüfung
# Numerische Mathematik für Ingenieure

(Prüfungszeit 72 min.)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (1, -1, 0)^T$.

(b) Berechnen Sie weiter einen Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens zu demselben Startvektor.

(c) Konvergiert die Gauß-Seidel-Iteration für dieses Gleichungssystem gegen die exakte Lösung $x^*$ von $Ax = b$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und besitzt nur reelle Eigenwerte.

(a) Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise zu $A$.

(b) Führen Sie zwei Schritte mit der Potenzmethode aus. Nutzen Sie $x^{(0)} = (0, 1, 0)^T$ als Startvektor und geben Sie für die letzte Iterierte den Rayleigh-Quotienten an.

(c) Wird die inverse Potenzmethode angewandt, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der neuen Iterierten. Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von $x^{(1)}$ zum Startvektor $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ an.

Die neue Iterierte $x^{(1)}$ soll nicht berechnet werden.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Approximation an $f'(0.5)$ mittels Vorwärtsdifferenz zu $h = 0.01$.

(b) Bestimmen Sie eine Approximation an $f''(0)$ mittels zentraler Differenz und $h = 0.01$.

(c) Nutzen Sie die zusammengesetzte Simpson-Regel mit $n = 4$ und $h = 0.5$ und berechnen Sie einen Näherungswert $S_4$ für

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

(d) Berechnen Sie eine Approximation an $I$ mit der Gauß-Quadratur zu $m = 1$ und $h = 2$.

(e) Zur Approximation von $\int_0^b f(x)\, \mathrm{d}x$ mit $b = \sqrt{1/2}$ soll die zusammengesetzte Simpson-Regel genutzt werden. Wie groß ist $n$ zu wählen, um einen Fehler kleiner als $10^{-4}$ zu erhalten? Nutzen Sie dazu

$$\max_{0 \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right| \le 102.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{x}{y(x)}, \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem expliziten Euler-Verfahren zu der Schrittweite $h = 0.5$.

(b) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Euler-Heun Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$. Das Euler-Heun-Verfahren hat das Butcher-Diagramm

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

(c) Weiter soll das 2-stufige BDF-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$ sowie den Anfangsnäherungen $Y_0 = 1$ und $Y_1 = 0.866$ angewendet werden. Geben Sie eine nichtlineare Gleichung zur Berechnung von $Y_2$ für die konkrete Aufgabe an.

Die Berechnung von $Y_2$ ist nicht gefragt.

Hinweis: Das 2-stufige BDF-Verfahren besitzt die Verfahrensvorschrift

$$\frac{3}{2} Y_{k+1} = 2Y_k - \frac{1}{2} Y_{k-1} + h f(x_{k+1}, Y_{k+1}).$$

Aufgabe 5 (5 Punkte):

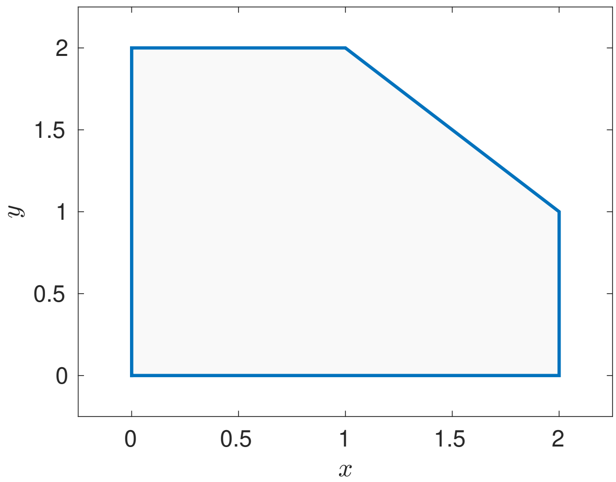
Gegeben sind das Gebiet

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2,\ x + y < 3\right\}$$

sowie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u(x, y) &= 3 \quad \text{für } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= x - y \quad \text{für } (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie ein Gitter der Gitterweite $h_x = h_y = 0.5$ in die folgende Abbildung und numerieren Sie die acht Knoten.




(b) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Approximation der Lösung in den Gitterpunkten an.