Universität Rostock
Institut für Mathematik

Rostock, 29.07.2024

Modulprüfung Numerische Mathematik und Stochastik für Ingenieure

Bitte heften Sie dieses Blatt vorne an Ihre Lösungen an.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 7 Punkte	Aufgabe 2 6 Punkte	Aufgabe 3 6 Punkte	Aufgabe 4 6 Punkte	Summe 25 Punkte

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Gesucht ist die Lösung x^* der Gleichung $x + 1 = \tan(x)$ im Intervall $[1,\ 1.2]$.

(a) Zur Approximation von x^* soll eine Fixpunktiteration mit $\varphi(x) = \arctan(x+1)$ genutzt werden. Erfüllt diese für $I = [1,\ 1.2]$ die Voraussetzungen des Banchschen Fixpunktsatzes?

(b) Berechnen Sie 3 Schritte mit $\varphi(x)$ zu $x_0 = 1.1$.

(c) Wieviele Schritte wären für die Iteration aus (b) nötig, um x^* mit einem Fehler kleiner als 10^{-3} zu approximieren?

(d) Warum ist eine Fixpunktiteration zu $\varrho(x) = \tan(x) - 1$ hier nicht empfehlenswert, obwohl doch x^* auch ein Fixpunkt von ϱ über I ist? Welche Bedingung des Banachschen Fixpunktsatzes ist nicht erfüllt?

(e) Berechnen Sie zu $x_0 = 1.1$ einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x) = \tan(x) - x - 1$.

Hinweis: Es gelten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\arctan(t) = \frac{1}{t^2+1}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan(t) = 1 + \tan(t)^2.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Gesucht sind Approximationen an

$$I = \int_0^5 \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Approximieren Sie I mittels der zusammengesetzten Simpson-Regel zu $n = 4$.

(b) Wie groß ist n zu wählen, um bei der zusammengesetzten Simpson-Regel eine Abweichung kleiner als 10^{-3} zu erhalten? Für $f(x) = \exp(-x^2)$ gilt

$$\max_{x\in[0,5]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 12.$$

(c) Bestimmen Sie eine Approximation an I mittels Gauß-Quadratur zu $m = 2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(x) \cdot y(x), \quad x \in [0,1], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie zwei Schritte mit dem Euler-Verfahren zu $h = 0.5$.

(b) Bestimmen Sie einen Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zu $h = 1$.

(c) Berechnen Sie zur Schrittweite $h = 0.5$ und den Anfangsnäherungen $Y_0 = 1$ und $Y_1 = 1.615$ einen Schritt mit dem 2-stufigen BDF-Verfahren

$$\frac{3}{2}Y_{k+1} = 2Y_k - \frac{1}{2}Y_{k-1} + hf(x_{k+1}, Y_{k+1}).$$

Beachten Sie, dass Y_2 eine Näherung an $y(2h)$ ist. Werten Sie die Differentialgleichung also an $(x_2, Y_2) = (1, Y_2)$ aus.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie einen Schritt mit dem Gesamtschrittverfahren zu $x^{(0)} = (-1, -1, 1)^T$.

(b) Berechnen Sie einen Schritt mit dem Einzelschrittverfahren zu $x^{(0)} = (-1, -1, 1)^T$.

(c) Wie lautet für dieses Gleichungssystem die Fehlerfortpflanzungsmatrix des Gesamtschrittverfahrens?