

Modulprüfung
Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Bitte heften Sie dieses Blatt vorne an Ihre Lösungen an.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 4 Punkte	Aufgabe 2 5 Punkte	Aufgabe 3 5 Punkte	Aufgabe 4 6 Punkte	Aufgabe 5 5 Punkte	Summe 25 Punkte

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Gegeben sind die Differentialgleichung

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

und die Anfangsbedingung

$$y(0) = 1.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- (b) Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung?
- (c) Berechnen Sie zwei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.5$.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A .
- (b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix B .

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Die Anbieter A, B und C stehen in Konkurrenz zueinander. Die Übergangswahrscheinlichkeiten, dass ein Kauf bei Anbieter X beim nächsten Mal zu einem Kauf bei Y bzw. keinem erneuten Kauf führt, lauten

- Kauf A \Rightarrow (0.7, 0.1, 0.15, 0.05)
- Kauf B \Rightarrow (0.2, 0.6, 0.1, 0.1)
- Kauf C \Rightarrow (0.05, 0.1, 0.8, 0.05)

kein Kauf \Rightarrow (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)

Bestimmen eine Approximation an die Marktaufteilung im Gleichgewicht. Berechnen Sie dazu 2 Schritte mit der Potenzmethode zu der Anfangsverteilung (0.3, 0.3, 0.3, 0.1).

Nutzen Sie zur internen Normierung der Iterierten der Potenzmethode die $\|\cdot\|_1$ -Norm mit $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Eine Bäckerei-Kette produziert an drei Standorten Brote, welche an 5 Verteillager zu liefern sind. Die aktuellen Vorräte und Bedarfe (in Stück) sind

$$v_1 = 190, v_2 = 250, v_3 = 215, \quad w_1 = 150, w_2 = 125, w_3 = 135, w_4 = 100, w_5 = 145.$$

Die Transportkosten in cent/Stück sind (Bedarfe W , Vorräte V)

	W1	W2	W3	W4	W5
V1	62	48	59	56	44
V2	45	38	43	29	46
V3	58	47	44	51	35

Lösen Sie das Transportproblem mittels Nord-West sowie der Matrixminimummethode.

Die Berechnung der gesamten Transportkosten ist nicht nötig.

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ \cos(x) - y \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(x, y)$.
- Geben Sie für das konkrete Problem die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an.
- Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (0, 1)^T$ aus.
- Berechnen Sie mittels Vorwärtsdifferenz zu $h = 0.01$ Approximationen an

$$g_x(x, y) \quad \text{und} \quad g_y(x, y)$$

für $(x, y) = (1, 1)^T$ und $g(x, y) = \cos(x) - y$.