

Modulprüfung
Mathematische Methoden in den Wirtschaftswissenschaften

Bitte heften Sie dieses Blatt vorne an Ihre Lösungen an.

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 5 Punkte	Aufgabe 2 4 Punkte	Aufgabe 3 5 Punkte	Aufgabe 4 6 Punkte	Aufgabe 5 5 Punkte	Summe 25 Punkte

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Gegeben ist die Rekursion

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} - 8.$$

- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzgleichung in expliziter Form an.
- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzgleichung in expliziter Form.
- (c) Bestimmen Sie die explizite Darstellung der Rekursion zu den Anfangswerten $a_0 = -5$, $a_1 = -7$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Berechnen Sie von der Matrix

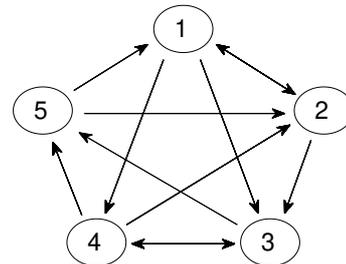
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) die Determinante,
- (b) die Eigenwerte,
- (c) einen Eigenvektor zu einem von Ihnen gewählten Eigenwert.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Gegeben sind 5 websites, die untereinander wie in der Abbildung rechts verlinkt sind.

- Geben Sie die Adjazenzmatrix der Verknüpfungen an.
- Approximieren Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ der Adjazenzmatrix aus (a) mittels Potenzmethode. Führen Sie 2 Schritte aus, nutzen Sie $(1, \dots, 1)^T$ als Startvektor und rechnen Sie ohne Normierung.
- Welche Rangfolge der 5 websites ergibt sich mit der Approximation aus (b)?



Aufgabe 4 (6 Punkte):

Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 & \leq & 120 \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 105 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leq & 150 \end{array}, \quad \begin{array}{l} x_1, x_2 \geq 0, \\ 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max! \end{array}$$

- Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.
- Führen Sie einen Schritt mit dem Simplex-Algorithmus aus. Starten Sie mit den Schlupfvariablen als Basisvariablen.
- Geben Sie das duale Optimierungsproblem an.
- Die optimale Lösung des dualen Problems wird für $y^* = (1.2, 0, 0.2)$ angenommen und beträgt 174. Nutzen Sie eine Rechnung mit Schattenpreisen um zu bestimmen, wie hoch der optimale Wert des primalen Optimierungsproblems ist, wenn 130 statt 120 Einheiten von Ressource 1 zur Verfügung stehen.

Aufgabe 5 (5 Punkte):

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= x \cdot (1 + y(x)), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

- Berechnen Sie 2 Schritte mit dem Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 0.1$.
- Berechnen Sie eine Schritt mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$.
- Zeigen Sie, dass $y(x) = -1 + 2 \exp(x^2/2)$ das Anfangswertproblem löst.