Universität Rostock
Institut für Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 23.01.2023

## Lösungsvorschläge (Alle Angaben ohne Gewähr)

Aufgabe 1:
Für den Wert der Klemmbausteine nach 120 Monaten $W_{120}$ gilt

$$W_{120} = 3W_0$$

mit $W_0$ dem Wert beim Kauf. Eine Anlage zum monatlichen Zinssatz $p$ hätte andererseits

$$W_{120} = (1+p)^{120} W_0$$

ergeben. Gleichsetzen ergibt

$$(1+p)^{120} W_0 = 3W_0 \quad \Rightarrow \quad p = 3^{1/120} - 1 \approx 0.009197,$$

also einen monatlichen Zinssatz von ca. 0.92%.

Aufgabe 2:

(a) Die partiellen Ableitungen erster Ordnung lauten

$$\begin{aligned} f_x &= 8x + 3y - 17 \\ f_y &= 3x + 2y - 9. \end{aligned}$$

Nullsetzen führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 8x + 3y - 17 &= 0 \\ 3x + 2y - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $(x^*, y^*) = (1, 3)$. Für diese Funktion ist dies die einzige kritische Stelle. Der kritische Punkt lautet $(1, 3, -22)$.

(b) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$f_{xx} = 8, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 3, \qquad f_{yy} = 2$$

und die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese ist unabhängig von $(x, y)$ und es gilt

$$f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 16 - 9 = 7 > 0.$$

Da zudem $f_{xx} > 0$, handelt es sich um eine lokale Minimalstelle.

(c) Als Lagrange-Funktion ergibt sich

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 + 3xy + y^2 - 17x - 9y + \lambda(x + y - 6).$$

Es gelten

$$\begin{aligned} L_x &= 8x + 3y - 17 + \lambda, \\ L_y &= 3x + 2y - 9 + \lambda, \\ L_\lambda &= x + y - 6. \end{aligned}$$

Aus $L_x = L_y = L_\lambda = 0$ ergibt sich als Lösung $(x^*, y^*, \lambda^*) = (0.5, 5.5, -3.5)$. Der Wert für $\lambda$ ist nicht weiter nötig und der Punkt lautet $(0.5, 5.5, -18.5)$.

Aufgabe 3:

(a) Die Substitution $z(x) = x^2 + 2x - 1$ führt auf

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}z = (2x + 2)\,\mathrm{d}x$$

und weiter

$$\int_{z(0)}^{z(2)} \exp(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{7} \exp(z)\,\mathrm{d}z = (\exp(z))\big|_{-1}^{7} = \exp(7) - \exp(-1) = 1096.3.$$

(b) Als Stützstellen ergeben sich

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8, \quad x_3 = 1.2, \quad x_4 = 1.6, \quad x_5 = 2.$$

Die Funktionswerte sind

$$0.73576,\ 2.6902,\ 12.440,\ 75.309,\ 607.08,\ 6579.8$$

und die Approximation ist

$$T_5 = 0.4\left(\frac{0.73576}{2} + 2.6902 + 12.440 + 75.309 + 607.08 + \frac{6579.8}{2}\right) = 1595.1.$$

Aufgabe 4:

Der Einfachheit halber wird in Mio. $\mathrm{m}^2$ gerechnet. Aufstellen der Gleichungen aus den Bedingungen: *Annalena hat Solarmodule für 10 Mio. $m^2$ Fläche mitgebracht und will diese auf die Fürstentümer Brandenburg, Niedersachsen und Sachsen verteilen*

$$x_B + x_N + x_S = 10.$$

*Brandenburg und Niedersachsen sollen zusammen dreimal viel bekommen, wie Sachsen*

$$x_B + x_N = 3x_S.$$

*In Brandenburg ist mehr Platz, weshalb Niedersachsen nur 40% dessen bekommt, was an Brandenburg geht*

$$0.4x_B = x_N.$$

Das Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0.4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \\ x_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Gauß-Algorithmus ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0.4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & -3.5 & -1 & -10 \end{array}$$

Mehr ist nicht nötig und die Werte der Variablen sind

$$\begin{aligned} -4x_S = -10 \quad &\Rightarrow \quad x_S = 2.5 \\ -3.5x_N - x_S = -10 \quad &\Rightarrow \quad x_N = \frac{15}{7} \\ x_B + x_N + x_S = 10 \quad &\Rightarrow \quad x_B = \frac{75}{14}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Zu Berücksichtigen sind $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sowie

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 5 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 14. \end{array}$$

Der zulässige Bereich ist unten links dargestellt. Für die Optimierung gilt

- Zielfunktion $f(x) = 2x_1 + x_2$,
- also $2x + y = c \to \max$,
- Geradengleichung $y = c - 2x$ mit $c \to \max!$,
- optimale Lsg.: $x = 5$, $y = 3$, $c = 13$.