Universität Rostock
Institut für Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 13.02.2023

Lösungsvorschläge (Alle Angaben ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

(a) Für den Materialverbrauch v_k im Jahre k ergibt sich folgende Rekursion

$$v_{k+1} = 0.9v_k + 0.03v_{k-1}.$$

(b) Zu den Anfangswerten $v_{2020} = 38$ und $v_{2021} = 34.2$ ergeben sich in den Folgejahren

$$\begin{aligned} v_{2022} &= 31.92, \\ v_{2023} &= 29.75. \end{aligned}$$

(c) Die charakteristische Gleichung der Rekursion ergibt sich mittels des Ansatzes (siehe Fibonacci) $v_k = \lambda^k$

$$\begin{aligned} &v_{k+1} = 0.9v_k - 0.03v_{k-1}, \\ &\lambda^{k+1} - 0.9\lambda^k - 0.03\lambda^{k-1} = 0, \\ &\lambda^2 - 0.9\lambda - 0.03 = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

(a) Die zu optimierende Funktion besitzt die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= 8x + 2y - 26 \\ f_y &= 2x + 2y - 14. \end{aligned}$$

Nullsetzen führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 8x + 2y - 26 &= 0 \\ 2x + 2y - 14 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $(x^*, y^*) = (2, 5)$. Für diese Funktion ist dies die einzige kritische Stelle.

(b) Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$f_{xx} = 8, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2, \qquad f_{yy} = 2$$

und die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese ist unabhängig von (x, y) und es gilt

$$f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 16 - 4 = 12 > 0.$$

Da zudem $f_{xx} > 0$, handelt es sich um eine lokale Minimalstelle.

Aufgabe 3:

(a) Eine sinnvolle Wahl ist etwa

$$f(p) = N(p) - A(p) = \frac{10}{p^2+10} - \exp(0.1p) + 1.$$

(b) Für das Bisektionsverfahren ergeben sich mit $f(3) > 0$ und $f(4) < 0$ die Intervalle

Iteration	a	b	$f((a+b)/2)$
1	3	4	> 0
2	3.5	4	< 0
3	3.5	3.75	< 0

sodass $I^{(3)} = [3.5,\ 3.625]$ eine Einschließung des Schnittpunktes ist.

(c) Für das Newtonverfahren brauchen wir

$$f'(p) = -\frac{10 \cdot 2p}{(p^2+10)^2} - 0.1\exp(0.1p).$$

Die Iterierten sind dann

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= 3.5 \\ x^{(1)} &= x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)}}{f'(x^{(0)}} = 3.6072. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Vorwärtselimination in Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 12 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 & 11 \\ & -1 & 0 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 & 11 \\ & -1 & 0 & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Die Lösung ist abhängig von einem Parameter. Für die Rücksubstitution ergeben sich

$$\begin{aligned} x_4 &= \alpha, \\ x_3 &= -1 + \alpha \\ x_2 &= 1 + \alpha \\ x_1 &= 11 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 11 - 2 - 2\alpha + 2 - 2\alpha - \alpha = 11 - 5\alpha \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Matrix hat den Rang 3, da 3 Nichtnullzeilen bei der Vorwärtselimination übrig bleiben.

(c) Aus den Nichtnegativitätsrestriktionen ergeben sich folgende Grenzen für den freien Parameter

$$\begin{aligned} x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \geq 0, \\ x_3 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \geq 1, \\ x_2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \geq -1, \\ x_1 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \leq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

und die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \left[1, \frac{11}{5}\right] \right\}.$$

Aufgabe 5:
Zu Berücksichtigen sind $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sowie

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & & \leq & 9 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 13\,. \end{array}$$

Der zulässige Bereich ist unten links dargestellt. Für die Optimierung gilt

- Zielfunktion $f(x) = x_1 + 3x_2$,
- also $x + 3y = c \to \max$,
- Geradengleichung $y = \frac{c}{3} - \frac{1}{3}x$ mit $c \to \max!$,
- optimale Lsg.: $x = 9$, $y = 1$, $c = 12$.