Universität Rostock
Institut für Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 09.08.2023

Lösungsvorschläge (Alle Angaben ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

(a) Die Parameter sind $K_0 = -120\,000$, $p = 0.003$, $n = 120$ und $K_n = 0$. Dies führt auf $E = 1\,192.3$ als monatliche Einzahlung.

(b) Der neue Parameter ist hier $E = 1\,000$ und es ergibt sich $K_n = 27\,721$ als Restschuld.

Aufgabe 2:

(a) Die zu optimierende Funktion besitzt die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x-1)\exp\big((x-1)^2+y^2\big) \\ f_y &= 2y\exp\big((x-1)^2+y^2\big), \\ f_{xy} &= 4(x-1)y\exp\big((x-1)^2+y^2\big). \end{aligned}$$

Nullsetzen von f_x und f_y führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(x-1)\exp\big((x-1)^2+y^2\big) &= 0 \\ 2y\exp\big((x-1)^2+y^2\big) &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung $(x^*, y^*) = (1, 0)$. Für diese Funktion ist dies die einzige kritische Stelle.

(b) Bei Berücksichtigung der Nebenbedingung ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$L(x, y, \lambda) = \exp\big((x-1)^2+y^2\big) + \lambda(x-y+2).$$

Deren partielle Ableitungen führen auf

$$\begin{aligned} L_x &= 2(x-1)\exp\big((x-1)^2+y^2\big) + \lambda = 0, \\ L_x &= 2y\exp\big((x-1)^2+y^2\big) - \lambda = 0, \\ L_x &= x - y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Umstellen der zweiten Gleichung nach λ und Einsetzen in die erste ergibt

$$\exp\big((x-1)^2+y^2\big)\big(2(x-1)+2y\big) = 0$$

und somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 2 \\ x - y &= -2. \end{aligned}$$

Damit ist die einzige kritische Stelle $(x^*, y^*) = (-0.5, 1.5)$.

Aufgabe 3:

(a) Partielle Integration zu $u = x$ und $v' = \exp(2x)$ ergibt mit $u' = 1$ und $v = 0.5\exp(2x)$

$$\begin{aligned} I &= 0.5x\exp(2x)\Big|_0^1 - \int_0^1 0.5\exp(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0.5x\exp(2x)\Big|_0^1 - 0.25\exp(2x)\Big|_0^1 \\ &= 0.5\exp(2x)(x-0.5)\Big|_0^1 = 2.0973. \end{aligned}$$

(b) Hier ergibt sich

$$T_4 = \frac{1}{8}\big(f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)\big) = 2.2068.$$

Aufgabe 4:

Das überbestimmte lineare Gleichungssystem ergibt sich mit $p(x) = ax + b)$ als

$$\begin{pmatrix} 21 & 1 \\ 22 & 1 \\ 23 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.4 \\ 22.0 \\ 20.8 \end{pmatrix}.$$

Das Normalengleichungssystem hat die Gestalt

$$A^T Ax = A^T b \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1454 & 66 \\ 66 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,369.8 \\ 62.2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung lautet $(a, b) = 0.7,\ 5.33)$ und das Polynom damit $p(x) = 0.7x + 5.33$. Die Auswertung für 2024 ergibt $p(24) = 22.1°\mathrm{C}$.

Aufgabe 5:

Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -0.3 \\ -1 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ K \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Dessen Lösung ist $(C, K, R)^T = (39, 6, 20)^T$ und somit werden es insgesamt 65 Windräder.