Universität Rostock
Institut für Mathematik
PD Dr. M. Sawall

Rostock, den 16.02.2024

Lösungsvorschläge (Alle Angaben ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

(a) Die Parameter sind $K_0 = 600\,000$, $n = 25 \cdot 12 = 300$, $p = 0.003$ und $K_n = 0$ und es ergibt sich $E = -3036.02$.

(b) Hier sind die Parameter $K_0 = 600\,000$, $E = -2500$, $p = 0.003$ und $K_n = 0$ und es ergibt sich $n = 424.96$.

(c) Die Gesamteinzahlungen sind $300 \cdot 3036.02 = 910\,806$ und $1\,062\,400$.

Aufgabe 2:

(a) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x = 6x - 3y - 3 \quad f_y = -3x + 4y - 6 \quad f_{xx} = 6, \quad f_{xy} = -3, \quad f_{yy} = 4.$$

(b) Die Lagrange-Funktion und deren partielle Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} &L(x, y, \lambda) = 3x^2 - 3xy + 2y^2 - 3x - 6y + \lambda(1 - x - y), \\ &L_x = 6x - 3y - 3 - \lambda, \\ &L_y = -3x + 4y - 6 - \lambda, \\ &L_\lambda = 1 - x - y. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses LGS lautet $(x, y, \lambda) = (1/4, 3/4, -15/4)$.

Aufgabe 3:

Die Elastizität lautet

$$\eta(p) = \frac{p \cdot N'(p)}{N(p)} = \frac{-2p^2}{16 - p^2}.$$

Wegen $p \in [0, 4]$ gilt $|\eta(p)| = 2p^2/(16 - p^2)$ und die Bedingung $|\eta(p)| > 1$ ergibt

$$\eta(p) = \frac{2p^2}{16 - p^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2p^2 = 16 - p^2 \quad \Rightarrow \quad 3p^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{16/3} \approx 2.31.$$

Bleibt noch zu überprüfen, auf welche Seite die Nachfrage preiselastisch ist. Einsetzen von etwa $p = 0$ führt auf $\eta(0) = 0 < 1$ und somit ist $N(p)$ im Intervall $I = [2.31, 4]$ preiselastisch.

Aufgabe 4:

(a) Vorwärtselimination in Kurzschreibweise:

$$\begin{array}{rrrr|r}
-1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\
1 & 0 & 2 & 6 & 10 \\
1 & 1 & 2 & 5 & 10 \\
\hline
-1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\
 & 2 & 3 & 4 & 9 \\
 & 3 & 3 & 3 & 9 \\
\hline
-1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\
 & 2 & 3 & 4 & 9 \\
 & & 3 & 6 & 9
\end{array}.$$

Die Lösung ist abhängig von einem Parameter. Für die Rücksubstitution ergeben sich

$$\begin{aligned}
x_4 &= \alpha, \\
x_3 &= 3 - 2\alpha \\
x_2 &= 0 + \alpha \\
x_1 &= 4 - 2\alpha
\end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Aus den Nichtnegativitätsrestriktionen ergeben sich folgende Grenzen für den freien Parameter

$$\begin{aligned}
x_4 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \geq 0, \\
x_3 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \leq 1.5, \\
x_2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \geq 0, \\
x_1 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha \leq 2
\end{aligned}$$

und die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in [0, 1.5] \right\}.$$

(c) Es gilt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 - 2\alpha$, was für $\alpha = 1.5$ minimal wird und demnach ist die Lösung $x = (1, 1.5, 0, 1.5)^T$.

Aufgabe 5:

Zu Berücksichtigen sind $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ sowie

$$\begin{array}{rcrcr}
x_1 & & & \leq & 5 \\
 & & x_2 & \leq & 7 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18.
\end{array}$$

Der zulässige Bereich ist unten links dargestellt. Für die Optimierung gilt

- Zielfunktion $f(x) = 2x_1 + 3x_2$,
- also $2x + 3y = c \to \max$,
- Geradengleichung $y = \frac{c}{3} - \frac{2}{3}x$ mit $c \to \max!$,
- optimale Lsg.: $x = 4/3$, $y = 7$, $c = 71/3$.