Altes und Neues zur Quersumme

Jan–Christoph Puchta, Jürgen Spilker

Zusammenfassung. Man lernt schon in der Schule, daß eine natürliche Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme es ist. Wie schnell die Quersummenfunktion im Mittel wächst, ist schon seit 50 Jahren bekannt. Andererseits gibt es erstaunlicherweise auch neue Aspekte dieses Themas. Was passiert, wenn man die Quersummenbildung wiederholt anwendet? Wann teilt das Ergebnis die Ausgangszahl? Was passiert, wenn man statt der Summe der Ziffern die Summe der Quadrate der Ziffern nimmt und diesen Prozess iteriert? Diese und weitere Fragen behandelt der vorliegende Artikel. Alle Beweise sind elementar.

1. Einleitung

Will man eine natürliche Zahl explizit angeben, dann benutzt man meistens ihre Darstellung mittels Ziffern. Diese hängt ab von der Grundzahl g. Es gilt der fundamentale

Satz 1. *(siehe z.B. [5], theorem 134). Sei $g \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann hat jede ganze Zahl $n \geq 0$ genau eine Darstellung von der Form*

$$n = \sum_{r \geq 0} e_r(n)\, g^r \quad \text{mit} \quad e_r(n) \in \{0, 1, \ldots, g-1\},$$

die „g–adische Zifferndarstellung“. Es gilt $e_r(n) = 0$, falls $r > \dfrac{\log n}{\log g}$ ist.

Am bekanntesten sind die Dezimaldarstellung ($g = 10$) und die Binärdarstellung ($g = 2$). Ist eine Grundzahl $g \geq 2$ fest gewählt, dann kann man jeder natürlichen Zahl n ihre Quersumme $s_g(n) := \sum_{r \geq 0} e_r(n)$ zuordnen. In dieser Arbeit werden mehrere Eigenschaften der Quersumme untersucht.

In Abschnitt 2 sind es die Teilereigenschaften, die bei Dezimalzahlen die schulbekannte Neunerprobe ergeben.

Aus der Quersumme einer natürlichen Zahl kann man diese nicht immer zurückgewinnen. Wieviele Quersummen einer Zahl n zu verschiedenen Basiszahlen braucht man, um die Zahl n zurück zu bestimmen? Wir schätzen im 3. Abschnitt diese Anzahl nach oben und unten ab.

Die Quersumme von $m + n$ ist meistens kleiner als $s_g(m) + s_g(n)$, denn die Überträge bei der Addition können die Quersumme verkleinern. Im 4. Abschnitt schätzen wir den mittleren Fehler

$$\frac{1}{x^2} \sum_{0\le m,n<x} \big(s_g(m)+s_g(n)-s_g(m+n)\big)$$

ab.

Vom Wachstum der Quersummenfunktion $n \mapsto s_g(n)$ handelt der 5. Abschnitt. Sie verhält sich sehr unregelmäßig, doch verläuft sie nach einer Mittelung gleichmäßiger.

In Paragraph 6 wird gezeigt, daß sich die Werte der Quersummenfunktion auf alle Restklassen modulo m gleichmäßig verteilen.

In den letzten beiden Abschnitten wird die Quersummenbildung iteriert. Die Folge $n, s_g(n), s_g\big(s_g(n)\big), \ldots$ hat schließlich einen konstanten Wert, etwa $s^{(\infty)}(n)$. Wir betrachten natürliche Zahlen n, welche von $s^{(\infty)}(n)$ geteilt werden („schlanke Zahlen"). Schließlich wird die Quadrat–Quersumme $\sum\limits_{r\ge 0}\big(e_r(n)\big)^2$ untersucht. Ihre wiederholte Anwendung endet in Fixpunkten oder Fixschleifen. Die Fixpunkte werden alle bestimmt.

Man kann die folgenden Abschnitte auch unabhängig voneinander lesen.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen : $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen $1,2,3,\ldots$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$; $\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen, $\mathbb{R}$ die der reellen Zahlen. Sind d und n natürliche Zahlen und ist d ein Teiler von n, dann schreiben wir $d|n$. Für reelles x ist $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x und $\{x\} := x-[x]$ der gebrochene Anteil von x. Die auftretenden Logarithmen können zu einer beliebigen Basis genommen werden; es muß in jedem Abschnitt nur stets dieselbe sein.

2. Teilereigenschaften der Quersumme

Sei $g\ge 2$ eine feste Grundzahl. Wir benutzen die Zifferndarstellung $n=\sum\limits_{r\ge 0} e_r(n)\, g^r$ und zeigen den

Satz 2. *Jedes $n\in\mathbb{N}_0$ hat die Eigenschaft*

$$s_g(n)\equiv n \mod (g-1).$$

Beweis. Für alle $r\ge 0$ gilt $g^r\equiv 1 \mod (g-1)$, also

$$n-s_g(n)=\sum_{r\ge 0} e_r(n)\,(g^r-1)\equiv 0 \mod (g-1).$$

□

Hieraus folgt das

Teiler–Kriterium. Wenn $d \in \mathbb{N}$ und $d|g-1$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d|n \Longleftrightarrow d|s_g(n).$$

Bei Dezimalzahlen ergibt das die bekannte

Neuner–Probe :	$9|n \Leftrightarrow 9|s_{10}(n)$,
Dreier–Probe :	$3|n \Leftrightarrow 3|s_{10}(n)$.

Will man diese Regeln auf große n anwenden, dann ist es sinnvoll, die Quersummenbildung mehrfach anzuwenden.

Bemerkungen. 1. Auf dem Neuner–Kriterium beruht ein bekanntes Spiel: nimm eine Dezimalzahl, permutiere ihre Ziffern und bilde die Differenz dieser beiden Zahlen; sie ist stets durch 9 teilbar.

2. Sei $s'_g(n) := \sum_{r\geq 0}(-1)^r\, e_r(n)$ die alternierende Quersumme von n. Dann gilt $n \equiv s'_g(n) \bmod (g+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und man hat für jeden Teiler d von $g+1$ die Äquivalenz $d|n \Longleftrightarrow d|s'_g(n)$. Für $g = 10$ erhält man die Elfer–Probe: $11|n \Longleftrightarrow 11|s'_{10}(n)$.

3. Es gibt viele ähnliche Teiler–Regeln, welche die Zifferndarstellung verwenden (siehe etwa [7]), z.B. für $n = \sum_{r\geq 0} e_r\, 10^r$:

$$\begin{aligned}
2|n &\Longleftrightarrow 2|e_0 \\
4|n &\Longleftrightarrow 4|(2e_1 + e_0) \\
8|n &\Longleftrightarrow 8|(4e_2 + 2e_1 + e_0) \\
99|n &\Longleftrightarrow 99|\sum_{r\geq 0}\big(e_{2r} + 10e_{2r+1}\big).
\end{aligned}$$

4. Die Neuner–Probe hat schon Adam Riese zur Prüfung von Addition und Multiplikation verwendet. Er hat sie im Andreas–Kreuz formalisiert (Abb. 1): auf der linken und rechten Seite stehen die Quersummen modulo 9 von den beiden Summanden (bzw. Faktoren), oben ihre Summe (bzw. ihr Produkt) modulo 9 und unten die Quersumme modulo 9 von dem Ergebnis. Stimmen die letzten beiden Zahlen nicht überein, dann erhält die Addition (bzw. Multiplikation) einen Fehler (andernfalls folgt aber nicht deren Richtigkeit). Von Leben und Werk des Rechenmeisters Adam Riese (1492–1559) handelt das Buch von Wußing [8].

.

Abbildung 1. Zwei Briefmarken der Deutschen Bundespost (1992, 1959), die das Andreaskreuz von Adam Riese enthalten.

3. Die Quersumme als Funktion der Grundzahl

Die Funktion $n \mapsto s_g(n)$ ist nicht injektiv. Kann man Eindeutigkeit erreichen, wenn man die Quersummen zu mehreren Basen oder gar zu allen gleichzeitig betrachtet? Eine Antwort enthält der

Satz 3. *1. Sind $g_1, g_2, \ldots, g_k$ paarweise verschiedene ganze Zahlen ≥ 2, dann ist die Abbildung*

$$n \mapsto \big(s_{g_1}(n), s_{g_2}(n), \ldots, s_{g_k}(n)\big) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^k$$

nicht injektiv ($k \in \mathbb{N}$).

2. Die Abbildung

$$S : n \mapsto \big(s_2(n), s_3(n), s_4(n), \ldots\big) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$$

ist injektiv.

Beweis. 1. Wir untersuchen für $k \geq 2$ die Abbildung

$$S_k : n \mapsto \big(s_2(n), s_3(n), \ldots, s_k(n)\big) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^{k-1}$$

Ist $N \in \mathbb{N}, n \leq N$ und $e_r(n) \neq 0$, dann gilt $g^r \leq e_r(n)\, g^r \leq n \leq N$, also $r \leq \frac{\log N}{\log g}$, folglich

$$s_g(n) \leq \sum_{\substack{r \geq 0 \\ e_r(n) \neq 0}} (g-1) \leq (g-1)\Big(\frac{\log N}{\log g} + 1\Big).$$

Somit existiert eine Konstante $c > 0$, so daß

$$s_g(n) \leq c \log N \quad \text{für alle} \quad N \in \mathbb{N},\ 0 \leq n \leq N,\ 2 \leq g \leq k$$

ist. Die Abbildung S_k bildet also die Zahlen $0, 1, \ldots, N$ ab in einen achsenparallelen Würfel im $(k-1)$–dimensionalen Raum, dessen Kantenlänge $c \log N$ ist. Er enthält höchstens $(c \log N + 1)^{k-1}$ Punkte, deren Koordinaten alle ganzzahlig sind. Wäre S_k injektiv, dann gälte

$$N + 1 \leq (c \log N + 1)^{k-1}, \tag{1}$$

was aber für große N falsch ist. Also ist kein S_k injektiv. Hieraus folgt die 1. Behauptung.

2. Angenommen es gäbe natürliche Zahlen $1 \leq n < n'$ mit der Eigenschaft $S(n) = S(n')$. Da n eine Ziffer im n'–System ist, würde $n = S_{n'}(n) = S_{n'}(n') = 1$, also $S(n') = S(n) = S(1) = (1, 1, \ldots)$ folgen. Somit gäbe es zu jedem $g \geq 2$ ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $n' = g^r$, also wäre auch $n' = 1$, ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Man kann auch die kleinste Anzahl k von Quersummen, die man zur Bestimmung von n braucht, abschätzen. Es gilt

$$c_1 \frac{\log n}{\log \log n} \leq k \leq c_2 \log n.$$

Ist nämlich S_k injektiv, dann ergibt (1) die untere Abschätzung. Gilt andererseits $s_g(n_1) = s_g(n_2)$ für 2 natürliche Zahlen $n_1, n_2 \leq n$ und alle $2 \leq g \leq c_2 \log n$, dann folgt nach Satz 2, daß $n_1 \equiv n_2 (\bmod p)$ für alle Primzahlen $p \leq c_2 \log n - 1$ ist, also auch $n_1 \equiv n_2 (\bmod P)$ für $P := \prod_{p \leq c_2 \log n - 1} p$; wegen $\sum_{p \leq x} \log p \geq c\, x$ ([5], theorem 414) gilt $P > n \geq n_2 - n_1$ bei genügend großem c_2, also $n_1 = n_2$. Damit ist auch die obere Abschätzung bewiesen.

4. Wie wahr ist $s_g(m+n) = s_g(m) + s_g(n)$?

Die Quersumme von der Summe zweier natürlicher Zahlen ist nicht immer gleich der Summe ihrer Quersummen. Das liegt daran, daß bei der Berechnung der Ziffern von $m + n$ Überträge auftreten können. Ein Maß für die mittlere Abweichung bis x ist der Ausdruck

$$\frac{1}{x^2} \sum_{0 \leq m, n < x} \left| s_g(m+n) - s_g(m) - s_g(n) \right|.$$

Wir schätzen den Fehler ab.

Lemma 4. *1.* $\quad s_g(n) = n - (g-1) \sum_{r \geq 1} \left[\frac{n}{g^r} \right], \; n \in \mathbb{N}_0.$

2. Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ sei die Folge $d_r = d_r(m, n), r \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch

$$d_0 := \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad e_0(m) + e_0(n) < g \\ 1 & \textit{falls} \quad e_0(m) + e_0(n) \geq g, \end{cases}$$

$$d_r := \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad e_r(m) + e_r(n) + d_{r-1} < g \\ \\ 1 & \textit{falls} \quad e_r(m) + e_r(n) + d_{r-1} \geq g, \end{cases} \qquad r \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $\qquad s_g(m+n) = s_g(m) + s_g(n) - (g-1)\sum_{r\geq 0} d_r,\ \ m,n \in \mathbb{N}_0.$

Bemerkung. Es gilt $\left[\dfrac{n}{g^r}\right] = 0$, sofern $r > \dfrac{\log n}{\log g}$ ist und $d_r = 0$, wenn $e_r(m) = e_r(n) = 0$ ist. Insbesondere sind die beiden Reihen endlich.

Aufgabe. Für alle $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$d_r(m,n) = \left[\frac{m+n}{g^{r+1}}\right] - \left[\frac{m}{g^{r+1}}\right] - \left[\frac{n}{g^{r+1}}\right].$$

Beweis. 1. Sei $n = \sum_{r\geq 0} e_r\, g^r$; dann ist

$$\begin{aligned}
\left[\frac{n}{g^r}\right] &= e_r + e_{r+1}\, g + e_{r+2}\, g^2 + \dots \\
\sum_{r\geq 1} \left[\frac{n}{g^r}\right] &= \sum_{r\geq 1} e_r(1 + g + \dots + g^{r-1}) \\
(g-1)\sum_{r\geq 1} \left[\frac{n}{g^r}\right] &= \sum_{r\geq 1} e_r(g^r - 1) \\
&= n - s_g(n).
\end{aligned}$$

2. In der Formel $m + n = \sum_{r\geq 0} \big(e_r(m) + e_r(n)\big) g^r$ ist die Reihe noch nicht notwendig die g–adische Zifferndarstellung, weil $e_r(m) + e_r(n) \geq g$ sein kann. Deshalb muß man den Überschuß auf die nächst–höhere Potenz übertragen:

$$m + n = \big(e_0(m) + e_0(n) - d_0 g\big) + \sum_{e\geq 1} \big(e_r(m) + e_r(n) + d_{r-1} - d_r g\big) g^r.$$

In den runden Klammern stehen die Ziffern von $m + n$. Somit folgt

$$s_g(m+n) = s_g(m) + s_g(n) - \sum_{r\geq 0} d_r \cdot (g-1).$$

$\square$

Wir setzen $S(x) := \dfrac{1}{x^2} \sum_{0\leq m,n<x} \big(s_g(m) + s_g(n) - s_g(m+n)\big)$ und zeigen den

Satz 5. *Es gibt positive Konstanten* c_1, c_2 *so daß für alle reellen* $x \geq g$ *gilt*

$$c_1 \log x \leq S(x) \leq c_2 \log x.$$

Beweis. Zu $x \geq g$ wähle $R \in \mathbb{N}$ mit $g^{R-1} \leq x < g^R$. Dann ist $R \geq 2$ und

$$\frac{1}{g^2} S(g^{R-1}) \leq S(x) \leq g^2\, S(g^R). \tag{2}$$

Wir schätzen zunächst nach oben ab. Wegen Lemma 4, Teil 2 und der folgenden Bemerkung ist

$$S(g^R) = \frac{g-1}{g^{2R}} \sum_{0 \leq m,n < g^R} \; \sum_{0 \leq r < R} d_r(m,n).$$

Für jedes $0 \leq r < R$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq m,n < g^R} d_r(m,n) &\leq \sum_{\substack{0 \leq m,n < g^R \\ e_r(m)+e_r(n) \geq g-1}} \\ &= \sum_{0 \leq k < g} \Bigg(\sum_{\substack{0 \leq m < g^R \\ e_r(m)=k}} 1 \cdot \sum_{\substack{0 \leq n < g^R \\ e_r(n) \geq g-k-1}} 1 \Bigg). \end{aligned}$$

Das Produkt in der Klammer hat den Wert $g^{R-1} \cdot (k+1)^{R-1}$, somit folgt $\sum_{0 \leq m,n < g^R} d_r(m,n) \leq \dfrac{g+1}{2g}\, g^{2R}$ und insgesamt $S(g^R) \leq \dfrac{g^2-1}{2g}\, R$. Setzt man das in (2) um und betrachtet $R \leq \dfrac{\log x}{\log g} + 1$, dann erhält man $S(x) \leq c_2 \log x$ für $x \geq g+1$, wobei $c_2 := \dfrac{g(g^2-1)}{\log g}$ ist.

In ähnlicher Weise schätzen wir nach unten ab: sei o.E. $x \geq g+1$;

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq m,n < g^R} d_r(m,n) &\geq \sum_{\substack{0 \leq m,n < g^{R-1} \\ e_r(m)+e_r(n) \geq g}} 1 \\ &= \sum_{0 \leq k < g} \Bigg(\sum_{\substack{0 \leq m < g^{R-1} \\ e_r(m)=k}} 1 \cdot \sum_{\substack{0 \leq n < g^{R-1} \\ e_r(n) \geq g-k}} 1 \Bigg) \\ &= \frac{g-1}{2g}\, g^{2(R-1)} \end{aligned}$$

und erhalten $S(g^{R-1}) \geq \dfrac{(g-1)^2}{2g^3}\,(R-1)$, und wegen $R \geq \dfrac{\log x}{\log g}$ ist endlich

$$S(x) \geq \frac{1}{g^2}\, S(g^{R-1}) \geq \frac{(g-1)^2}{2g^3} \Big(\frac{\log x}{\log g} - 1 \Big) \leq c_1 \log x$$

mit $c_1 := \dfrac{(g-1)^2}{2g^3} \Big(\dfrac{1}{\log g} - \dfrac{1}{\log(g+1)} \Big)$. $\square$

Bemerkung. Mit derselben Methode kann man auch das analoge Problem für die Multiplikation behandeln. Es gilt

Satz 6. *Mit geeigneten positiven Konstanten c_3 und c_4 gilt*

$$c_3(\log x)^2 \leq \frac{1}{x^2} \sum_{0 \leq m,n < x} \big(s_g(m) \cdot s_g(n) - s_g(m \cdot n)\big) \leq c_4(\log x)^2$$

für alle $x \geq g$.

5. Mittleres Wachstum der Quersumme

Die Werte der Quersumme s_g springen hin und her: $s_g(g^r) = 1$, aber $s_g(g^r - 1) = (g-1)r$ kann beliebig groß sein (s. auch Abb. 2).

Wenn man jedoch die Quersumme der ersten g^r nicht–negativen Zahlen mittelt, dann erhält man

$$\frac{1}{g^r} \sum_{0 \leq n < g^r} s_g(n) = \frac{1}{g^r}\, r g^{r-1}\, \frac{g(g-1)}{2} = \frac{g-1}{2}\, r,$$

denn an jeder der r Stellen kommt jede Ziffer $0, 1, \ldots, g-1$ genau g^{r-1}–mal vor. Man wird deshalb erwarten, daß sich das Mittel $\frac{1}{N} \sum\limits_{0 \leq n < N} s_g(n)$ für natürliche N ungefähr wie $\frac{g-1}{2 \log g} \log N$ verhält. Tatsächlich konnte Delange 1975 die Differenz der beiden Ausdrücke beschreiben:

Satz 7. *[1]. Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Periode 1, so daß für alle natürlichen N*

$$\frac{1}{N} \sum_{0 \leq n < N} s_g(n) = \frac{g-1}{2 \log g} \log N + f\Big(\frac{\log N}{\log g}\Big)$$

gilt. Die Funktion f ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Bemerkungen. 1. Insbesondere gilt die asymtotische Formel

$$\sum_{0 \leq n < N} s_g(n) = \frac{g-1}{2 \log g} N \log N + \mathrm{O}(N).$$

2. Eine genauere Analyse ergibt, daß die Funktion f an keiner Stelle differenzierbar ist (siehe [1]). Hier trifft man also in natürlicher Weise auf eine Funktion, die überall stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist.

3. Tieferliegende Varianten von Satz 7 erhält man, wenn man die Variable n ersetzt durch Primzahlen oder durch Potenzen $n^k (k \in \mathbb{N})$ oder durch $[\alpha\, n^k], \alpha > 0$ irrational. Diese Fragen sind jüngst von J.–Ch. Puchta und M. Peter behandelt worden.

.

Abbildung 2. Die Funktion $s_5(n)$ für $1 \leq n \leq 164$.

Beweis. Sei $n = \sum\limits_{r \geq 0} e_r(n)\, g^r$; dann ist $\left[\frac{n}{g^r}\right] = e_r(n) + e_{r+1}(n) g + e_{r+2}(n) g^2 + \ldots$ und folglich für alle $r \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} e_r(n) &= \left[\frac{n}{g^r}\right] - g\left[\frac{n}{g^{r+1}}\right] \\ &= \int\limits_n^{n+1} \left(\left[\frac{u}{g^r}\right] - g\left[\frac{u}{g^{r+1}}\right]\right) du. \end{aligned}$$

Diese Integraldarstellung der r–ten Ziffer ist überaus nützlich:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq n < N} e_r(n) &= \int\limits_0^N \left(\left[\frac{u}{g^r}\right] - g\left[\frac{u}{g^{r+1}}\right]\right) du \\ &= \frac{g-1}{2} N + \int\limits_0^N \left(\left[\frac{u}{g^r}\right] - g\left[\frac{u}{g^{r+1}}\right] - \frac{g-1}{2}\right) du. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt die Hilfsfunktion

$$h(x) := \int\limits_0^x \Big([gv] - g[v] - \frac{g-1}{2} \Big)\, dv, \quad x \in \mathbb{R}$$

ein. Sie ist stetig und hat die Periode 1, da $h(1) = 0$ ist. Substituiert man $u = g^{r+1}\, v$, dann findet man

$$\sum_{0 \le n < N} e_r(n) = \frac{g-1}{2}\, N + g^{r+1}\, h\Big(\frac{1}{g^{r+1}}\, N\Big)$$

und folglich für das Mittel der Quersummen

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{0 \le n < N} s_g(n) &= \frac{1}{N} \sum_{0 \le n < N} \sum_{0 \le r \le R} e_r(n), \quad R := \Big[\frac{\log N}{\log g}\Big] \\ &= \frac{g-1}{2}\,(R+1) + \frac{1}{N} \sum_{0 \le r \le R} g^{r+1} h\Big(\frac{1}{g^{r+1}}\, N\Big) \\ &= \frac{g-1}{2}\,(R+1) + \frac{1}{N} \sum_{0 \le s \le R} g^{R+1-s}\, h\big(g^{s-R-1}\, N\big). \end{aligned} \tag{3}$$

Man darf die letzte Summe über alle $s \ge 0$ erstrecken, denn für $s > R$ ist g^{s-R-1} eine ganze Zahl, also verschwindet h an diesen Stellen.
Jetzt können wir die gesuchte Funktion f angeben:

$$f(x) := \frac{g-1}{2}\big(1 + [x] - x\big) + g^{1+[x]-x} \sum_{s \ge 0} \frac{1}{g^s}\, h(g^s x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Da h beschränkt ist, konvergiert die Reihe gleichmäßig in x, und f ist stetig (für ganzzahlige x muß man zeigen, daß rechts– und linksseitiger Grenzwert von f im Punkt x verschwinden). Ferner hat auch f die Periode 1. Aus der Gleichung (3) ergibt sich nun die behauptete Formel

$$\begin{aligned} &\frac{g-1}{2\log g} \log N + f\Big(\frac{\log N}{\log g}\Big) = \\ &\quad = \frac{g-1}{2}(R+1) + g^{1-R-\frac{\log N}{\log g}} \sum_{s \ge 0} \frac{1}{g^s} h\big(g^{s+\frac{\log N}{\log g}-R-1}\big) \\ &\quad = \frac{1}{N} \sum_{0 \le n < N} s_g(n); \end{aligned}$$

hierbei ist noch $g^{\frac{\log N}{\log g}} = N$ verwendet worden.
Nun zur Eindeutigkeit der Funktion f! Die Werte von f sind an den Stellen $\frac{\log N}{\log g}$ durch die bewiesene Formel eindeutig bestimmt, also wegen der Periodizität auch auf der Menge $\big\{\frac{\log N}{\log g} - \big[\frac{\log N}{\log g}\big] : N \in \mathbb{N}\big\}$. Da diese Menge dicht im Einheitsintervall und f dort stetig ist, ist f auf $[0,1]$, also auch auf der ganzen Definitionsmenge $\mathbb{R}$ festgelegt. □

6. Werteverteilung auf Restklassen

Sei m eine feste natürliche Zahl ≥ 1. Da die Quersummen $s_g(0), s_g(1), \ldots$ ganze Zahlen sind, kann man sie auf die Restklassen modulo m verteilen. Bekommt dann jede Restklasse den gerechten Anteil $\frac{1}{m}$ ab, d.h. existiert für jedes ganze k der folgende Grenzwert und hat er den angemessenen Wert

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{0 \leq n < N : s_g(n) \equiv k \bmod m\} = \frac{1}{m} \ ?$$

Die Antwort ist ja.

Satz 8. *[2] théorème I. Sei $g, k, m \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{0 \leq n < N : s_g(n) \equiv k \bmod m\} = \frac{1}{m}.$$

Beweis. Wir benutzen die bekannte Technik der Exponentialsummen. Aus der Formel für die Summe der geometrischen Reihe folgt für alle $a, m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{m}\sum_{0\leq \ell<m} \exp\Big(2\pi i\,\frac{a}{m}\,\ell\Big) = \begin{cases} 1, & m|a \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases} \tag{4}$$

Mit $z := \exp\Big(-\dfrac{2\pi i}{m}\Big)$ und $t^{(N)}(\ell) := \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{0\leq n<N} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)$ $(N \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}_0)$ wird wegen (4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{0\leq \ell<m} z^{k\ell}\, t^{(N)}(\ell) &= \frac{1}{N}\sum_{0\leq n<N}\Big(\frac{1}{m}\sum_{0\leq \ell<m}\exp\Big(2\pi i\,\frac{s_g(n)-k}{m}\,\ell\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{\substack{0\leq n<N\\ s_g(n)\equiv k (\bmod m)}} 1.\end{aligned}$$

Wegen $t^{(N)}(0) = 1$ genügt es also zu beweisen

$$\lim_{N\to\infty} t^{(N)}(\ell) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \ell < m. \tag{5}$$

Wir zeigen (5) zunächst für die spezielle Folge $N = g^r, r \in \mathbb{N}$. Jedes ganze $0 \leq n < g^r$ hat die eindeutige Darstellung

$$n = e\,g^{r-1} + d \quad \text{mit} \quad 0 \leq e < g, 0 \leq d < g^{r-1}.$$

Wegen $s_g(n) = e + s_g(d)$ folgt

$$\frac{1}{g^r}\sum_{0\leq n<g^r}\exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big) = \frac{1}{g}\sum_{0\leq e<g}\exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}e\Big)\cdot\frac{1}{g^{r-1}}\sum_{0\leq n<g^{r-1}}\exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big),$$

somit $t^{(g^r)}(\ell) = t^{(g)}(\ell)\, t^{(g^{r-1})}(\ell)$. Wir iterieren diese Identität und bekommen

$$t^{(g^r)}(\ell) = \big(t^{(g)}(\ell)\big)^r \quad \text{für alle} \quad r \in \mathbb{N}_0. \tag{6}$$

Wegen $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$ und $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ erkennt man

$$\begin{aligned}
\big|t^{(g)}(\ell)\big|^2 &= \frac{1}{g^2} \sum_{0\le n<g} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,n\Big) \sum_{0\le n'<g} \exp\Big(-2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,n'\Big)\\
&= \frac{1}{g^2}\Big(g + 2\sum_{0\le n<n'<g} \cos\Big(2\pi\,\frac{\ell}{m}\,(n-n')\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{g^2}\Big(g + 2\sum_{0\le n<n'<g} \Big(1 - 2\sin^2\Big(\pi\,\frac{\ell}{m}\,(n-n')\Big)\Big)\Big)\\
&= 1 - \frac{4}{g^2} \sum_{0\le n<n'<g} \sin^2\Big(\pi\,\frac{\ell}{m}\,(n-n')\Big).
\end{aligned}$$

Der Summand $n = 0, n' = 1$ ist $\sin^2\Big(\pi\,\dfrac{\ell}{m}\Big) > 0$ wegen $0 < \ell < m$. Somit gilt $\big|t^{(g)}(\ell)\big| < 1$, und aus (6) folgt (5) für $N = g^r$.
Im allgemeinen Fall verwenden wir die für alle $N = \sum\limits_{0\le r\le R} e_r(N)\, g^r$ gültige Abschätzung

$$\Big|\sum_{0\le n<N} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big| \le \sum_{0\le r\le R} e_r(n) \Big|\sum_{0\le n<g^r} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big|. \tag{7}$$

Man erhält sie, wenn man die $n < N$ einteilt nach gleichen vorderen Ziffern:

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{0\le n<N} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big| =\\
&\quad = \Big|\sum_{0\le r\le R} \Big[\exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,\big(e_R(N) + e_{R-1}(N) + \cdots + e_{r+1}(N)\big)\Big)\cdot\\
&\qquad\quad \cdot \sum_{0\le n<e_r(N)g^r} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big]\Big|\\
&\le \sum_{0\le r\le R} \Big|\sum_{0\le n<e_r(N)g^r} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big|\\
&\le \sum_{0\le r\le R} \Big|\sum_{0\le e<e_r(N)} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,e\Big) \sum_{0\le n<g^r} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big|\\
&\le \sum_{0\le r\le R} e_r(n) \Big|\sum_{0\le n<g^r} \exp\Big(2\pi i\,\frac{\ell}{m}\,s_g(n)\Big)\Big|.
\end{aligned}$$

Jetzt kann man den allgemeinen Fall auf den schon bewiesenen Spezialfall zurückführen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r_0 \in \mathbb{N}$ mit $\big|t^{(g^r)}(\ell)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $r > r_0$. Es folgt aus (7) für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|t^{(N)}(\ell)\right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{r \leq r_0} e_r(N)\, g^r \,\left|t^{(g^r)}(\ell)\right| + \frac{1}{N} \sum_{r > r_0} e_r(N)\, g^r \left|t^{(g^r)}(\ell)\right| \\ &\leq \frac{1}{N}(g-1) \sum_{r \leq r_0} g^r \left|t^{(g^r)}(\ell)\right| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Hieraus erkennt man $\left|t^{(N)}(\ell)\right| < \varepsilon$ für alle $N > N_0$, und (5) ist bewiesen. $\square$

Offene Probleme. Wie verteilen sich die Quersummen der Primzahlen auf Restklassen? Gibt es unendlich viele Primzahlen, deren binäre Quersumme gerade ist?

7. Die iterierte Quersumme und schlanke Zahlen

Man kann die Quersummenbildung iterieren, also für jedes natürliche n die Folge

$$n,\ s_g(n),\ s_g\bigl(s_g(n)\bigr), \ldots, s_g^{(k)}(n), \ldots$$

betrachten. Sie wird schließlich konstant, denn es ist $s_g(n) < n$, sofern $n \geq g$ ist. Also existiert der Grenzwert

$$s_g^{(\infty)}(n) := \lim_{k \to \infty} s_g^{(k)}(n).$$

Der folgende Satz charakterisiert die iterierte Quersumme $s_g^{(\infty)}(n)$.

Satz 9. *[3]. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt*

$$1 \leq s_g^{(\infty)}(n) < g \tag{8}$$

$$s_g^{(\infty)}(n) \equiv n \mod (g-1). \tag{9}$$

Durch die beiden Eigenschaften (8) und (9) ist die natürliche Zahl $s_g^{(\infty)}(n)$ eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Will man $s_g^{(\infty)}(n)$ berechnen, dann muß man nicht die Quersumme wiederholt bilden, sondern kann n durch $g-1$ dividieren mit Rest, etwa

$$n = \ell(g-1) + m \text{ mit } \ell, m \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq m < g.$$

Dann ist $s_g^{(\infty)}(n) = m$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n = \sum_{r \geq 0} e_r(n)\, g^r \geq \sum_{r \geq 0} e_r(n) = s_g(n)$. Wenn $n \geq g$, dann existiert ein $r \geq 1$ mit $e_r(n) \neq 0$, also ist $n > s_g(n)$. Wegen $s_g\bigl(s_g^{(\infty)}(n)\bigr) = s_g^{(\infty)}(n)$ folgt $s_g^{(\infty)}(n) < g$.
Aus $g^r \equiv 1 \mod (g-1), r \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich $n \equiv s_g(n) \mod (g-1)$, also $n \equiv s_g^{(\infty)}(n) \mod (g-1)$. Damit sind (8) und (9) bewiesen.
Es gibt nur eine natürliche Zahl m mit den beiden Eigenschaften $1 \leq m < g$ und $m \equiv n \mod (g-1)$, denn haben m_1 und m_2 diese Eigenschaften, dann ist die Zahl $|m_1 - m_2| < g-1$ und durch $g-1$ teilbar, also ist sie Null. $\square$

Definition. Wir nennen eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ „g–schlank“, wenn $s_g^{(\infty)}(n)$ ein Teiler von n ist.

Beispiele. Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist 2–schlank wegen $s_2^{(\infty)}(n) = 1$.
Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist 3–schlank, denn

$$s_3^{(\infty)}(n) = \begin{cases} 1 & n \quad \text{ungerade} \\ 2 & n \quad \text{gerade.} \end{cases}$$

Es ist

$$s_4^{(\infty)}(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 (\bmod 3) \\ 2 & n \equiv 2 (\bmod 3) \\ 3 & n \equiv 3 (\bmod 3); \end{cases}$$

also sind genau die Zahlen $n \not\equiv 5 (\bmod 6)$ 4–schlank.
Gibt es unter den Dezimalzahlen mehr schlanke oder mehr nicht–schlanke Zahlen? Um das zu entscheiden, benötigen wir einen weiteren Begriff:

Definition. Eine Teilmenge M von $\mathbb{N}$ hat die „Dichte d“ genau dann, wenn der Grenzwert

$$d(M) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{n \leq N : n \in M\}$$

existiert und den Wert d hat.

Beispiel. Jede Restklasse $m\mathbb{N} + b (m \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z})$ hat die Dichte $\frac{1}{m}$.

Satz 10. *Die Menge G aller g–schlanken Zahlen hat die Dichte*

$$d(G) = \sum_{1 \leq m < g} \frac{1}{[m, g-1]};$$

dabei bezeichnet $[m, n]$ das kgV von m und n.

Beispiele. 1. Für $g = 10$ hat G die Dichte $\frac{1321}{2520} > \frac{1}{2}$. Also sind schlanke Dezimalzahlen häufiger als nicht–schlanke.
2. Ist $g - 1$ eine Fakultät, etwa $k!$, dann ist $[m, g-1] = k!$ für $1 \leq m \leq k$, also $d(G) \geq \frac{1}{(k-1)!}$.
3. Ist $g - 1$ eine Primzahl, dann ist

$$\begin{aligned} d(G) &= \frac{1}{g-1} \Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{g-2} + 1 \Big) \\ &\leq \frac{1}{g-1} \Big(\int_1^{g-2} \frac{1}{x} \, dx + 2 \Big) = \frac{\ln(g-2) + 2}{g-1}. \end{aligned}$$

Unter der Nebenbedingung, daß $g - 1$ prim ist, wird also die Dichte der g- -schlanken Zahlen mit wachsender Grundzahl g beliebig klein.

Beweis. Sei m eine natürliche Zahl, $1 \le m < g$ und $G_m := \{n \in \mathbb{N} : s_g^{(\infty)}(n) = m, m|n\}$. Dann ist $G = \bigcup\limits_{1\le m<g} G_m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_g^{(\infty)}(n) = m \Longleftrightarrow n = \ell(g-1) + m \text{ mit } \ell \in \mathbb{N}_0$$

und weiter

$$n \in G_m \Longleftrightarrow m \,|\, \ell(g-1) \Longleftrightarrow \frac{m}{d}\,\Big|\ell \Longleftrightarrow \ell \in \frac{m}{d}\,\mathbb{N}_0;$$

dabei ist $d := (m, g-1)$. Also besteht G_m aus allen natürlichen Zahlen in der Restklasse m mod $[m, g-1]$, und G_m hat die Dichte $\dfrac{1}{[m, g-1]}$ und G die Dichte $\sum\limits_{1\le m<g} \dfrac{1}{[m, g-1]}$. $\square$

Aufgaben. 1. Für alle natürlichen n gilt

$$\sum_{1\le m\le n} \frac{1}{[m,n]} = \frac{1}{n} \sum_{t|n} h\Big(\frac{n}{t}\Big),$$

wobei

$$h(n) := \sum_{\substack{1\le k\le n\\ (k,n)=1}} \frac{1}{k} = \sum_{s|n} \Big(\frac{\mu(s)}{s} \sum_{1\le \ell\le n/s} \frac{1}{\ell}\Big)$$

und $\mu(s)$ die Möbius–Funktion ist.
2. Das mittlere Wachstum der Dichten d_g aller g–schlanken Zahlen läßt sich abschätzen durch

$$\sum_{2\le g\le N} d_g \le c(\log N)^3$$

für alle $N \ge 2$.

Bemerkung. Grundman [3] konstruiert möglichst lange Folgen von aufeinanderfolgenden g–schlanken Zahlen. Sei $g \ge 4, \ell$ das kgV der Zahlen $1, 2, \ldots, g-1$ und $m_g := \min\{k \in \mathbb{N} : k > 1, k \not| \, g-1\}$. Es ist leicht einzusehen, daß die Zahlen

$$\ell, \ell+1, \ldots, \ell + m_g + g - 2$$

sämtlich g–schlank sind, und es keine längeren Sequenzen von g– schlanken Zahlen gibt.

8. Die iterierte Quadrat–Quersumme

Für feste Grundzahl $g \ge 2$ und $n = \sum\limits_{r\ge 0} e_r(n)\, g^r$ bezeichnen wir mit $t_g(n) := \sum\limits_{r\ge 0} \big(e_r(n)\big)^2$ die „Quadrat–Quersumme“. Wir untersuchen für jedes natürliche n die Iterierten

$$n, t_g(n),\ t_g^{(2)}(n), \ldots$$

Beispiel. $g = 10$. Für $n = 13$ wird die Folge schließlich konstant 1:

$$t_{10}(13) = 10,\ t_{10}^{(2)}(13) = 1,\ t_{10}^{(3)}(13) = 1, \ldots$$

Für $n = 11$ erhält man

$$t_{10}(11) = 2,\ t_{10}^{(2)}(11) = 4,\ t_{10}^{(3)}(11) = 16,\ t_{10}^{(4)}(11) = 37, \ldots$$

und schließlich eine Schleife $4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$ aus 8 verschiedenen Zahlen.
Der folgende Satz zeigt, daß sich jede natürliche Zahl entweder wie die 13 oder wie die 11 benimmt.

Satz 11. *[4], E34. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $n, t_{10}(n), t_{10}\big(t_{10}(n)\big), \ldots$ nach endlich vielen Schritten entweder konstant 1, oder sie mündet ein in die Schleife*

$$\begin{array}{ccccc} 4 & \to & 16 & \to & 37 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 20 & & & & 58 \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ 42 & \leftarrow & 145 & \leftarrow & 89 \end{array}$$

Offene Probleme. Welcher der beiden Fälle tritt häufiger auf? Charakterisiere die n, deren iterierte Quadrat–Quersummenfolge schließlich konstant 1 wird („glückliche“ Zahlen). Haben sie eine Dichte? Welche?

Beweis. Gegeben sei eine natürliche Zahl $n = \sum\limits_{0 \le r \le R} e_r\, 10^r$ mit $e_R > 0$. Es gilt

$$t_{10}(n) < n \quad \text{für alle} \quad n \geq 100, \tag{10}$$

denn wenn $n \geq 100$, also $R \geq 2$ ist, dann folgt $n - t_{10}(n) = \sum\limits_{0 \le r \le R} e_r\big(10^r - e_r\big) \geq e_0(1 - e_0) + e_R(10^R - e_R) \geq 9(1-9) + 1(10^2 - 1) = 27$. Wegen (10) braucht man also nur die natürlichen Zahlen $n \leq 100$ einzeln zu untersuchen. Eine leichte, direkte Rechnung zeigt: die 20 natürlichen Zahlen

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 7, & 10, & 13, & 19, & 23, & 28, & 31, & 32, & 44, \\ 49, & 68, & 70, & 79, & 82, & 86, & 91, & 94, & 97, & 100 \end{array}$$

führen schließlich auf die Konstante 1, und die restlichen 80 Zahlen münden in die angegebene Schleife ein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bei beliebiger Grundzahl $g \geq 2$ kann man in analoger Weise zeigen, daß es endlich viele Fixpunkte und Schleifen für die iterierte Quadrat– Quersummenfolgen gibt. Diese haben wir für kleine Grundzahlen explizit berechnet.

g	**Fixpunkte**	**Schleifen**
2	1	$-$
3	$1; 5; 8$	$2 \to 4$
4	1	$-$
5	$1; 13; 18$	$4 \to 16 \to 10$
6	1	$5 \to 25 \to 17 \to 29 \to 41 \to 26 \to 20 \to 13$
7	$1; 10; 25; 32; 45$	$2 \to 4 \to 16 \to 8;\ 13 \to 37 \to 29 \to 17$
8	$1; 20; 52$	$4 \to 16;\ 13 \to 26;\ 5 \to 25 \to 10$
9	$1; 41; 50$	$68 \to 74;\ 53 \to 89 \to 65$
10	1	$4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20$
11	$1; 61; 72$	$5 \to 25 \to 13;\ 74 \to 100 \to 82$
12	$1; 29; 125$	$5 \to 25;\ 80 \to 100;\ 20 \to 65 \to 50;$
		$8 \to 64 \to 41 \to 34 \to 104 \to 128 \to 164 \to 66 \to 61 \to 26$
13	$1; 17; 45; 85; 98; 136; 160$	$34 \to 68;\ 100 \to 130;\ 125 \to 145$

Tabelle der Fixpunkte und Schleifen (alle Zahlen sind Dezimalzahlen)

Im nächsten Satz wollen wir die Fixpunkte charakterisieren. Dazu müssen wir zunächst diophantische Gleichungen lösen. Wir notieren für $c \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$\begin{aligned} D_c &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x^2 + y(y-1) = c^2\big\}, \\ E_c &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : x(x-1) + y(y-1) = c(c-1)\big\}. \end{aligned}$$

Es gilt $(c,1) \in D_c, (c,1) \in E_c$. Sei ferner $a(d) := \sum\limits_{\substack{p^k \| d \\ p \equiv 1(\bmod 4)}} (k+1)$; dabei ist $d \in \mathbb{N}$, und $p^k \| d$ bedeutet, daß $p^k | d$, aber $p^{k+1} \not| \, d$.

Lemma 12. *Es gilt* $\#D_c = \dfrac{1}{2}\, a(4c^2+1)$ *und* $\#E_c = a(4c^2-4c+2)$ *für alle natürlichen* c.

Beweis. Wir zählen zunächst die Menge

$$D'_c := \big\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : \quad x^2 + y(y-1) = c^2\big\}.$$

Sie enthält z.B. $(\pm\, c, 0)$ und $(\pm\, c, 1)$. Setzt man $u = 2x,\ v = 2y-1$, dann lautet die Bedingungs–Gleichung $u^2 + v^2 = 4c^2 + 1$, und es gilt

$$\begin{aligned} \#D'_c &= \#\big\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2; u \text{ gerade}, v \text{ ungerade},\ u^2 + v^2 = 4c^2 + 1\big\} \\ &= \frac{1}{2}\, \#\big\{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 : u^2 + v^2 = 4c^2 + 1\big\}. \end{aligned}$$

Nach [5], theorem 278 gilt $\#D'_c = 2a(4c^2+1)$. Benutzt man die Symmetrien

$$\begin{aligned} (x,y) \in D'_c &\Longleftrightarrow (-x,y) \in D'_c \\ (x,y) \in D'_c &\Longleftrightarrow (x,1-y) \in D'_c \end{aligned}$$

und beachtet, daß D'_c mit den Koordinatenachsen nur die beiden Punkte $(\pm c, 0)$ gemeinsam hat, dann sieht man $\#D'_c = 4\#D_c$. Daraus folgt die Formel für $\#D_c$; die andere zeigt man in ähnlicher Weise. □

Nun endlich zu der angekündigten Charakterisierung der Fixpunkte!

Satz 13. *1. Ist $g = 2c$, dann existieren genau $2\#D_c - 1$ Fixpunkte, nämlich*

$$1, (c-x)\, g + y, (c+x)\, g + y \quad \textit{für} \quad (x, y) \in D_c,\ x \neq c.$$

2. Ist die Grundzahl ungerade, etwa $g = 2c - 1$, dann gibt es genau $2\#E_c - 1$ Fixpunkte der iterierten Quadrat–Summenfolgen $\big(t_g^{(k)}(n)\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$, nämlich

$$1, (c-x)\, g + y, (c+x-1)\, g + y \quad \textit{für} \quad (x, y) \in E_c,\ x \neq c.$$

Offene Probleme. Wieviele Schleifen gibt es? Länge, Charakterisierung der Schleifen?

Beweis. Eine natürliche Zahl $n = \sum\limits_{0\le r\le R} e_r\, g^r$ ist genau dann Fixpunkt einer Folge $\big(t_g^{(k)}(m)\big)_{k\in\mathbb{N}_0}$, wenn

$$\sum_{0\le r\le R} e_r^2 = \sum_{0\le r\le R} e_r\, g^r \tag{11}$$

gilt. (11) hat keine Lösung $n \geq g^2$, denn wenn $e_R > 0, R \geq 2$ ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_r e_r\, g^r - \sum_r e_r^2 = \sum_r e_r(g^r - e_r) & \\ &\geq e_R(g^R - e_R) + e_0(1-e_0) \geq \quad g^R - 1 - (g-1)(g-2) \\ &\geq \quad g^2 - 1 - (g-1)(g-2) = 3(g-1) > 0.\end{aligned}$$

Also sind die Fixpunkte genau die Zahlen $n = e_1\, g + e_0$, mit $e_1(g - e_1) = e_0(e_0 - 1)$. Stets ist $n = 1$ Fixpunkt. Die weiteren Fixpunkte (sofern es sie gibt) zerfallen in Paare, denn mit $n = e_1\, g + e_0 > 1$ ist auch $n' := (g - e_1)\, g + e_0 > 1$ ein Fixpunkt, und es gilt $n \neq n'$, weil sonst $e_1 = g - e_1$, also sowohl e_0 als auch $e_0 - 1$ ein positives Quadrat wäre. Somit lautet die Fixpunktmenge

$$F_g = \{1\} \cup \{ag + e : (a, e) \in A_g\} \cup \big\{(g-a)\, g + e : (a, e) \in A_g\big\},$$

wobei $A_g := \big\{(a, e) \in \mathbb{N}^2 : a < g - a,\ a(g-a) = e(e-1)\big\}$ ist. Wir unterscheiden nun 2 Fälle.
1. $g = 2c,\ c \geq 1$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x < c$

$$(c - x, y) \in A_{2c} \Leftrightarrow (c-x)(c+x) = y(y-1) \Leftrightarrow (x, y) \in D_c,$$

und die Abbildung $f : D_c \backslash \big\{(c, 1)\big\} \to A_{2c} : (x, y) \mapsto (c - x, y)$ ist bijektiv. Damit ist der 1. Teil von Satz 13 bewiesen.
Den zweiten Teil beweist man analog. □

Offene Probleme sind die analogen Überlegungen für die kubische Quersumme $\sum\limits_{r\geq 0} \big(e_r(n)\big)^3$ und höhere Quersummen.

Schlußbemerkung. Damit endet unser Ausflug zu den Ziffernproblemen. Wir wollten zeigen, wie in einer so einfachen Funktion wie der Quersumme interessante altbekannte, aber auch neue unerwartete Probleme stecken. Es ist der Reiz der elementaren Zahlentheorie, daß man ohne großen Aufwand an Methoden zu schönen und auch neuen Ergebnissen kommen kann.

Literatur

[1] Delange, H.: *Sur la fonction sommatoire de la fonction „somme des chiffres“*. L'Enseignement math 21, 31–47 (1975)

[2] Gelfond, A.O.: *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*. Acta Arithm. 13, 259–265 (1968)

[3] Grundman, H.G.: *An analysis of n–riven numbers*. Fibonacci Quart. 39, 253–255 (2001)

[4] Guy, R.: *Unsolved problems in number theory*. New York: Springer 1994

[5] Hardy, G.H., Wright, E.M.: *An introduction to the theory of numbers*. Oxford: Clarendon 1960

[6] Remmert, R., Ullrich, P.: *Elementare Zahlentheorie*. Basel: Birkhäuser 1987

[7] Schubart, H.: *Einführung in die klassische und moderne Zahlentheorie*. Braunschweig: Vieweg 1974.

[8] Wußing, H.: *Adam Ries*. Stuttgart: Teubner 1992.

Mathematisches Institut der Universität Freiburg, Eckerstr. 1, D–79104 Freiburg
e-mail: jcp@arcade.math.uni-freiburg.de
e-mail: Juergen.Spilker@math.uni-freiburg.de

Abbildung 1. Zwei Briefmarken der Deutschen Bundespost (1959, 1992), die das Andreaskreuz von Adam Riese enthalten.

Abbildung 2. Die Funktion $s_5(n)$ für $1 \leq n \leq 164$.