

Elementargeometrie für Lehrer, 2. Auflage

Michael Dreher

FB Mathematik und Statistik, Universität Konstanz
MACS, Heriot-Watt University Edinburgh

20.07.2014

michael.dreher@uni-konstanz.de, m.dreher@hw.ac.uk

Etwas Juristisches:

Dieses Werk ist unter einem *Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported Lizenzvertrag* lizenziert. Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/> oder schicken Sie einen Brief an Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Inhaltsverzeichnis

Warum unterrichten wir Geometrie ? Wie sollten wir Geometrie unterrichten ? ✨	5
Die Ausgangssituation	5
Anwendungen der Geometrie	6
Die kulturell–historische Perspektive	9
Worauf es wirklich ankommt	11
Grunderfahrungen und Überfachliche Kompetenzen	12
1 Euklid, Hilbert, Konstruktionen	15
1.1 Allgemeines	15
1.2 Das Axiomensystem von Euklid	15
1.3 Das Axiomensystem von Hilbert	18
1.4 Diskussion der Axiomensysteme	20
1.5 Ein Modell der nicht-euklidischen Geometrie	21
1.6 Konstruktionen	22
2 Klassifikation der Bewegungen in der Ebene und im Raum	27
2.1 Vorbemerkungen	27
2.2 Der Fall $n = 2$	29
2.3 Der Fall $n = 3$	31
2.4 Weiterführende Aspekte ✨	33
3 Kegelschnitte	37
3.1 Allgemeine Aspekte	37
3.2 Der elliptische Fall 3.2.a: $\varphi + \psi < 90^\circ$	39
3.3 Der hyperbolische Fall 3.2.b: $\varphi + \psi > 90^\circ$	44
3.4 Der parabolische Fall 3.2.c: $\varphi + \psi = 90^\circ$	47
3.5 Rechnungen in kartesischen Koordinaten	50
3.6 Rechnungen in Polarkoordinaten	52
3.7 Weiterführende Aspekte ☉ ✨	55
4 Geometrie an Dreiecken und Kreisen	61
4.1 Grundlagen	61
4.2 Die Theoreme von Ceva und Menelaos ☹	70
4.3 Die Theoreme von Ptolemaios, Pappos, Pascal	73
4.4 Ein Zerlegungssatz für Sehnenneunecke ✨	78

4.5	Der Feuerbachkreis ☼	80
4.6	Potenzgeraden ☼	82
4.7	Der Satz von Brianchon und Potenzgeraden *	84
4.8	Die schönste Aufgabe zu Potenzgeraden *	86
4.9	Die Spiegelung am Kreis	90
4.10	Pole, Polaren und Dualität ☉	93
4.11	Harmonien und Doppelverhältnisse der Punkte	95
4.12	Noch mehr Harmonie und Dualität ☼	97
4.13	Der wahrscheinlich eleganteste Beweis des Theorems von Pascal ☼	100
5	Die Eulersche Polyederformel	103
5.1	Allgemeines ☉	103
5.2	Weiterführende Aspekte ✨	108
6	Fragmente der projektiven Geometrie	111
6.1	Grundideen. Überlegungen zur Axiomatik	111
6.2	Homogene Koordinaten und Punktbasen	113
6.3	Projektive Doppelverhältnisse	116
6.4	Quadratische Kurven ☉	118
6.5	Weiterführende Aspekte ✨	121
7	Fragmente eines Modells der hyperbolischen Geometrie	123
7.1	Definitionen	123
7.2	Grundkonstruktionen	127
7.3	Das h-Modell und die Axiome der absoluten Geometrie	129
7.4	Parallelität im h-Modell	130
A	Übungsaufgaben	135

Über das Skript und die Markierungen im Inhaltsverzeichnis:

Man behält langfristig nur das, was man sich durch eigene Anstrengung angeeignet hat. Klavierspielen und Radfahren erlernt man nur dadurch, daß man Klavier spielt und Rad fährt. Genau das Gleiche gilt für die Geometrie — man erlernt Geometrie nur durch das eigenständige Betreiben von Geometrie. In diesem Sinne ist dieses Skript für das Selbststudium gedacht; es hat nicht besonders viel didaktischen Sinn, wenn ein Dozent alles hier vorgestellte Material an der Tafel vorführt. Der Skizzenmangel bei den meisten Beweisen ist deshalb auch methodische Absicht.

Das stilisierte Zahnrad ☼ bezeichnet *den* Anwendungsabschnitt. Einer der tieflegendsten Gedanken der Geometrie steckt im Dualitätsprinzip, dessen Auftreten durch ☉ markiert wird.

Die mit Blumen (oder Kleeblatt) markierten Abschnitte dienen der anwendungsfreien Schönheit; dort werden Ergebnisse entwickelt, auf denen höchstens andere Blumen-Abschnitte aufbauen, aber keine unmarkierten Abschnitte. Die Dienstaufgabe von Lehrerinnen und Lehrern besteht darin, den Kindern authentisch vorzuleben, daß Kultur, Bildung und Neugier das menschliche Dasein überhaupt erst schön machen. Im Schulunterricht geht es nicht darum, Wasser in ein Faß zu schütten, sondern ein Feuer zu entfachen. Aus diesem Grunde lade ich die Lehramtsstudierenden von Herzen ein, sich die Blumen-Abschnitte mit Freude selbst anzueignen, auch wenn sie für das Verständnis der restlichen Abschnitte im technischen Sinne unnötig sind. Kein Witz !

Und das weiterführende Selbststudium bringt die Erleuchtung ✨, was sonst ? Das Lernen hört nie auf.

Warum unterrichten wir Geometrie ? Wie sollten wir Schulgeometrie unterrichten ? ☼

Die Ausgangssituation

Seit 2004 gelten in Baden–Württemberg neue Bildungsstandards in der Mathematik, die einige Veränderungen mit sich brachten. Der Geometrieunterricht der gymnasialen Mittelstufe gipfelt seitdem im Satz des Pythagoras (ohne die historisch gebräuchliche Begleitung durch Kathetensatz bzw. Höhensatz), dem Innenwinkelsummensatz, den Sätzen über die Transversalen (informativ) und den Strahlensätzen. Der Thalesatz ist in den Bildungsstandards nur implizit vorgesehen; lediglich in Umsetzungshinweisen zur Beachtung der KMK–Standards wird er genannt, als ein kleiner Rest der Kreisgeometrie.

Aus fachdidaktischen Übungen der Uni Konstanz habe ich bei Studierenden den pädagogischen Ansatz kennengelernt, die mathematischen Fachinhalte in kleinste Einzelteile zu zerlegen, die anschließend nie wieder zusammengefügt werden. Zum Beispiel scheint es relativ populär zu sein, den Innenwinkelsummensatz dadurch zu beweisen, „daß man einen Bleistift ums Eck schiebt“, und die Begründung lautet dann gelegentlich „mir ist es wichtig, mich um die schwachen Kinder zu kümmern !“.

Was ist eigentlich das Hindernis am traditionellen Beweis ? Um ein didaktisches (oder sonstiges) Problem lösen zu können, muß man es zuerst verstehen. Also listen wir den traditionellen Beweis doch mal auf: zuerst zeichnen wir eine Parallele zu c durch C (wofür man Phantasie braucht); als zweites bringt man α hoch mit dem Wechselwinkelsatz; als drittes β analog; als viertes schaut man hin und erkennt, daß α , γ , β schön nebeneinander liegen. Wir haben also vier Handlungen, davon die erste überraschend. Eine Pädagogik, die (im Interesse der schwachen Kinder natürlich !) vierschrittige Handlungsabläufe vermeidet, sollte doch bitte diesen Ansatz konsequent vollenden und die Kinder auch am Betrachten von Spongebob–Videos hindern, denn diese zwanzigminütigen Episoden haben mindestens 50 Handlungsschritte, davon mindestens zehn überraschende Wendungen, was diese Kinder doch kognitiv total überfordern müßte ???

Ich habe boshaft zugespitzt, klar. Und die Bücher der Harry–Potter–Reihe belegen eindrücklich, daß Kinder ganz selbstverständlich kognitiv in der Lage sind, hochkomplexe Geschichten mit ausgeprägter innerer Vernetzung zu erfassen. Die oben erwähnte didaktisch populäre Zerlegung des Lesestoffes in kleinste Einzelteile würde das Lesevergnügen bei Harry Potter hingegen komplett ruinieren.

Die relevanten Fragen der Kinder sind doch ganz andere:

„Stufenwinkel an Parallelen sind gleich, ja und ? Ich hab es nie bezweifelt, und ich glaub es auch so !“

„Ich versteh es, aber was hab ich davon ? Meine Eltern und Onkel/Tanten haben das nie gebraucht !“

„Was hat das mit meiner Lebenswirklichkeit zu tun ?“

Es scheint, daß die Schüler und Schülerinnen darauf in der Schule leider nur selten eine Antwort bekommen. Die auf Lehramtsseite spiegelbildlichen Fragen wären:

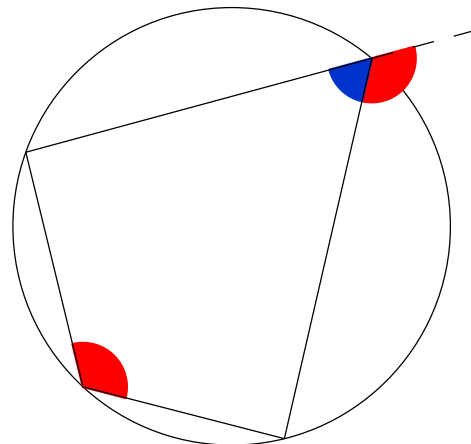
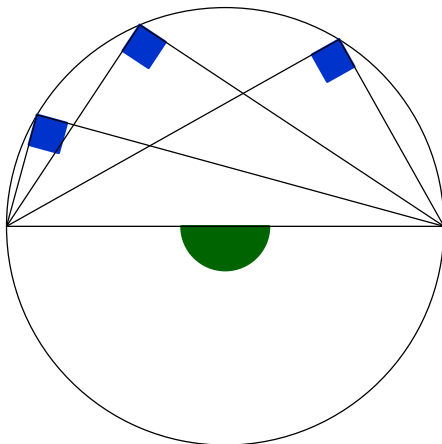
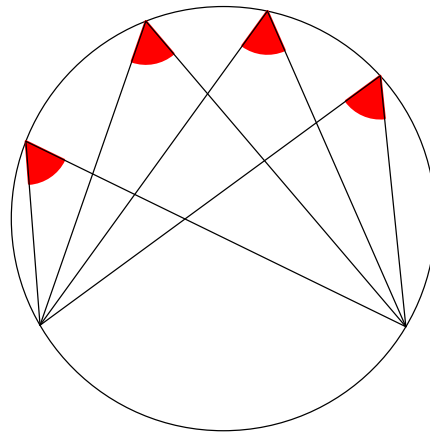
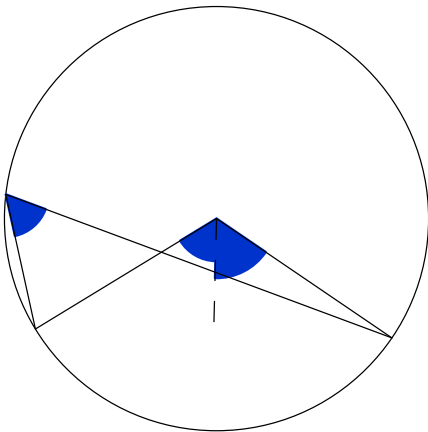
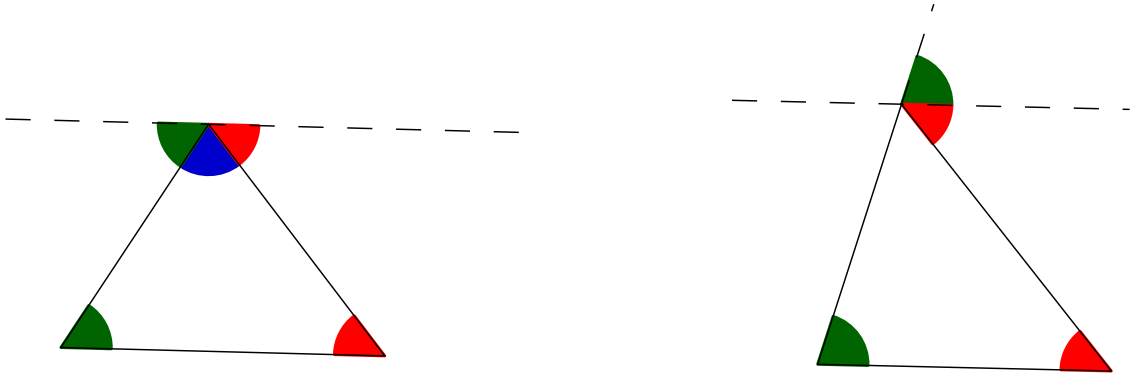
„Warum unterrichten wir, was wir unterrichten ?“

„Wo wollen wir mit unserem Unterricht hin ? Was sind unsere Ziele ?“

Anwendungen der Geometrie

Es gibt so gut wie gar keine Anwendungen der Mittelstufengeometrie. Kennen Sie vielleicht eine handwerkliche oder industrielle Anwendung des Thalesatzes? Eben. Ich auch nicht.

Lassen Sie doch mal bitte folgende 12 Graphiken auf sich wirken:



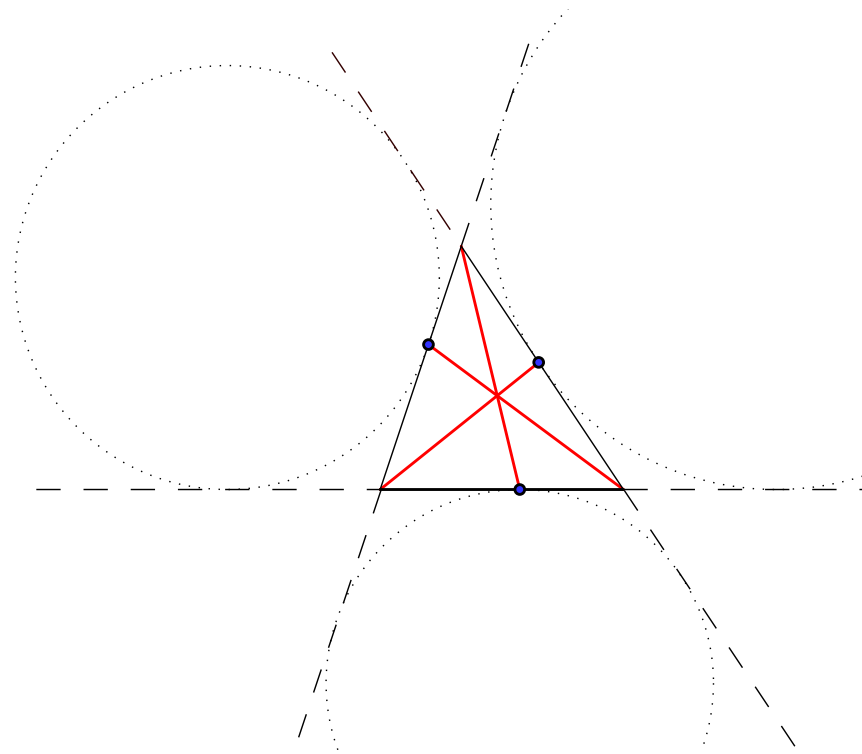
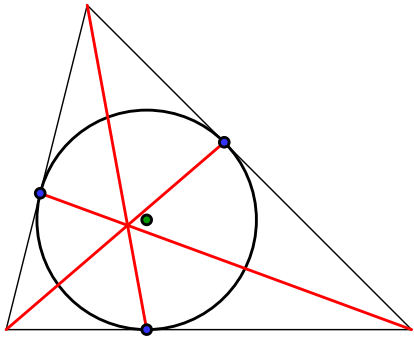


Abbildung 1: Die Ecktransversalen zu den Inkreisberührungspunkten schneiden einander in einem Punkt. Die Ecktransversalen zu den Ankreisberührungspunkten auch (im NAGEL-Punkt N).

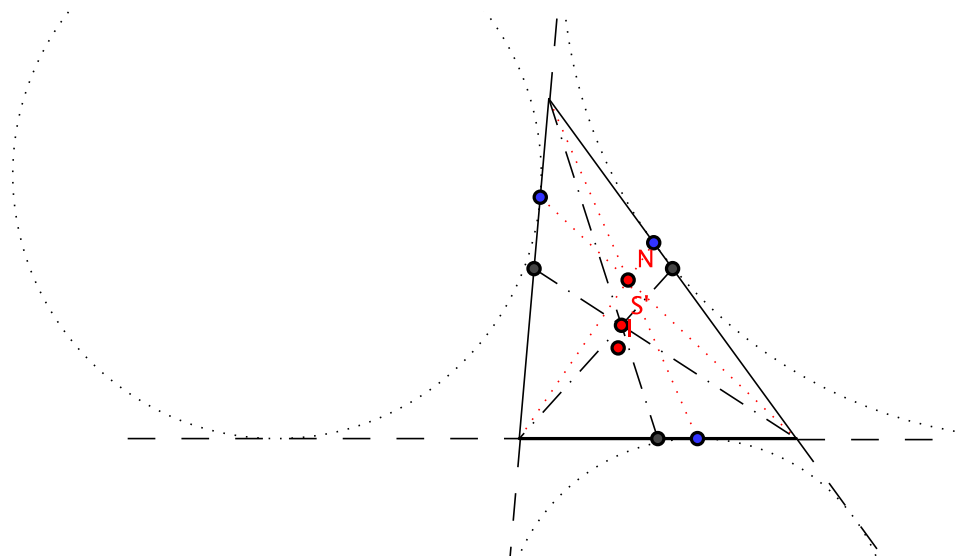
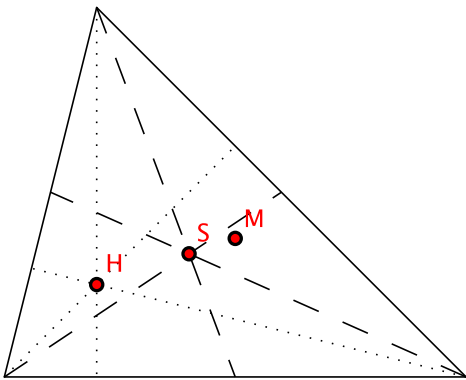


Abbildung 2: Links: der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt M liegen auf einer Geraden, mit $|SH| : |MS| = 2$. Rechts: Der Nagel-Punkt N , der Inkreismittelpunkt I und der Schwerpunkt S liegen auf einer Geraden, mit $|SN| : |IS| = 2$. Kann man die eine Aussage aus der anderen bekommen, indem man clever „spiegelt“ ?

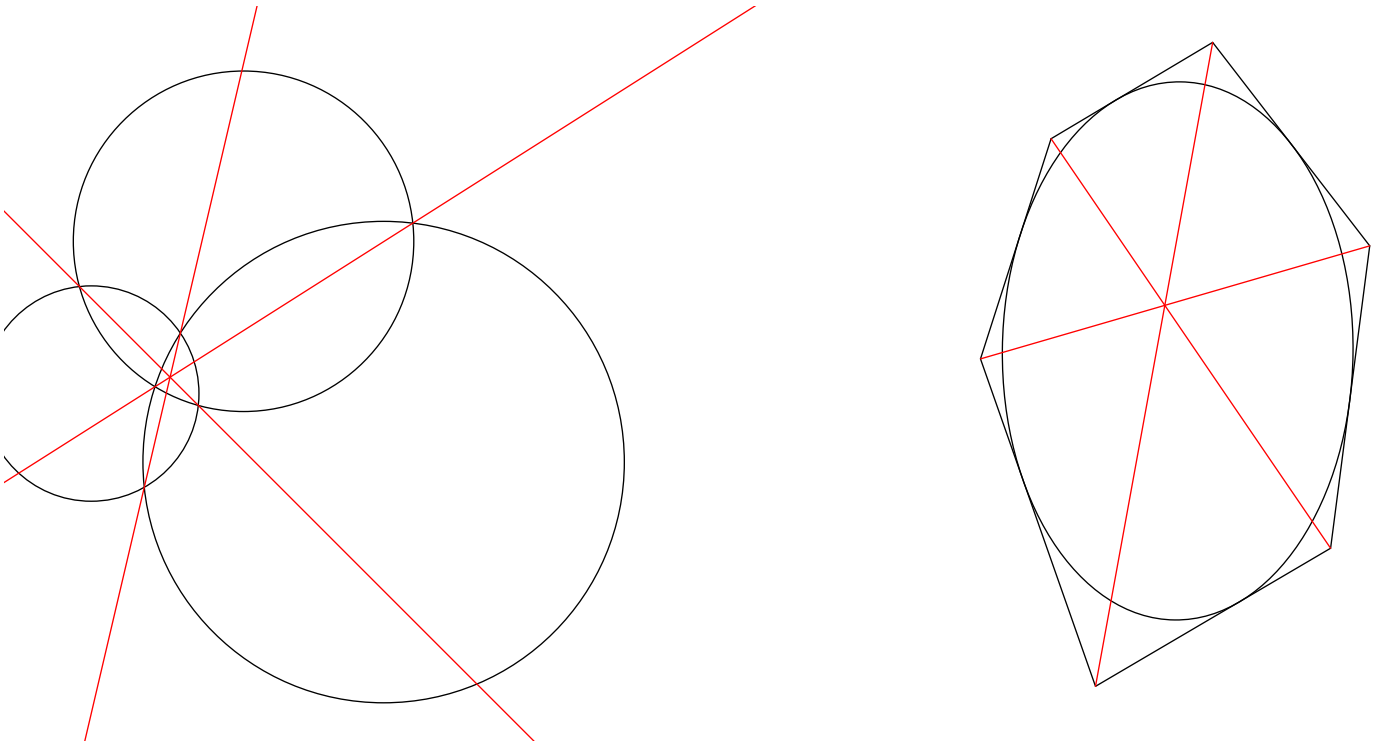


Abbildung 3: Der Satz über die Potenzgeraden und der Satz von Brianchon für Ellipsen.

Meine Sichtweise als Autor ist:

- Das ist schön. Genauer heißt das: wenn drei Punkte, die sich nicht verabredet haben, auf einer Geraden liegen; oder wenn drei Geraden, die einander nicht kennen, durch denselben Punkt gehen, dann gefällt mir das. Oder wenn Winkel einander gleich sind, von denen man das nicht erwartet. Genau dies ist die Vernetzung: Objekte stehen auf mysteriöse Weise miteinander in Beziehung. Dies regt die Neugier an, Neugier ist wertvoll, nur so kommt man zur Erkenntnis.
- Jeder kann Geometrie verstehen, zumindest die ersten sechs Bilder, zusammen mit den zugehörigen seriösen Beweisen (diese ersten sechs Sachverhalte waren bis 2004 normaler Schulstoff). Termumformung und Variablenrechnen ist abstrakt und deshalb für einen Teil der Schülerschaft eine Strapaze, aber Geometrie ist konkret, zum Anfassen, zum Anschauen.
- Man lernt etwas dabei fürs Leben. Weniger auf der Ebene der Sachinformationen, sondern auf der Ebene von Fähigkeiten und Fertigkeiten, unter der Voraussetzung, daß genug Substrat an Sachinformationen auf seriöse Weise vermittelt wird.
- Geometrie ist Kultur.

Die kulturell–historische Perspektive



Abbildung 4: Frontispiz der *Opera Omnia* von Euklid, 1703

Abbildung 4 bezieht sich auf Buch 6 der *Baukunst* [14] des VITRUVIUS (≈ 70 v. Chr. – ≈ 15 v. Chr.), aus dessen Vorwort wir zitieren:

Aristipp, ein Sokratischer Philosoph, erzählt man, litt Schiffbruch und ward an die Rhodische Küste ans Land geworfen. Hier fand er geometrische Figuren — *schemata* — im Sande gezeichnet, und rief seinen Gefährten zu: Getrost, meine Freunde, ich sehe Menschenspuren! Sofort gieng er in die Stadt Rhodos und begab sich gerades Wegs ins Gymnasium, wo er mit solchem Beyfalle über Philosophie redete, daß er so reichliche Geschenke erhielt, daß er nicht allein sich selbst mit allem Nöthigen versehen, sondern auch seinen Gefährten Kleidung und Unterhalt schaffen konnte. Als diese endlich nach ihrer Heimat zurückkehren wollten, und ihn fragten, ob er etwas nach Hause zu bestellen habe? so trug er ihnen auf, dort auszurichten: Man möchte doch ja den Kindern kein anderes Reisegeräth und –Geld mitgeben, als was selbst im Schiffbruche mit ihnen an das Land schwämme; denn nur das seyn die zuverlässigsten Güter des Lebens, über die weder Glückswechsel, noch Staatsveränderungen, noch Kriegsverheerungen das Geringste vermöchten.

Theophrast, der diesen Gedanken noch weiter ausführt, beweist den Satz, daß man mehr auf Kenntnisse als auf Geld fußen müsse, folgendermaßen: Nur der unterrichtete Mann, sagt er, sey in der Fremde nicht fremd, noch selbst dann, wenn er von Freunden und Verwandten entblößt sey, nicht freundlos; sondern in jedem Staate sey er einheimisch, und könne furchtlos auf alle Unglücksfälle mit Verachtung herabblicken: dahingegen derjenige, der sich nicht mit Wissenschaft, sondern mit Glücksgütern ausrüste, auf schlüpferigen Wegen sich durch ein unstätes und mißliches Leben hindurch zu fechten habe.

Die drei Figuren im Sand haben ihre Bedeutungen:

Geometrie hilft der Ästhetik: links unten ist die Konstruktion für den Goldenen Schnitt (eine Strecke wird in zwei Teile geteilt, sodaß das Produkt aus gesamter Strecke und kurzem Anteil gleich dem Quadrat des langen Anteils ist);

Geometrie ermöglicht Erkenntnis: rechts unten die Figur für den Außenwinkelsatz (ausgehend von einfachen Tatsachen wie den Winkelsätzen an Parallelen kommt man durch logisches Schließen zu tieferen Wahrheiten);

Geometrie ist pingelig: rechts oben die Figur für den Beweis der Dreiecksungleichung (auch Dinge, an die jeder sofort glaubt, müssen trotzdem bewiesen werden).

Bemerkenswert ist der krasse Gegensatz zur Mathematik des alten Ägyptens bzw. Babylons: auch dort gab es schon geometrische Aufgaben: wieviele Steinblöcke muß man für die Pyramiden anfertigen, wie teilt man eine Ernte auf, wie groß ist ein Acker, wann kommt die nächste Nilüberschwemmung, wieviel Flüssigkeit paßt in ein Gefäß, wieviel Erde ergibt sich beim Auskoffern eines Bewässerungsgrabens usw. Interessant ist auch, daß die ägyptische Geometrie im Wesentlichen vom Finanzamt erschaffen wurde: die zu zahlende Steuer bemaß sich nach der Größe des Grundbesitzes, und jedes Jahr trat der Nil über die Ufer, was die Felder teilweise wegschwemmte, sodaß immer wieder aufs Neue die Felder ausgemessen werden mußten. Dies war einer der Startpunkte der messenden Geometrie.

In der griechischen Mathematik hingegen war alles ganz anders: das Messen von Längen, Flächen oder Winkeln interessiert die griechischen Mathematiker überhaupt nicht. Sie werden in allen 13 Büchern der *Elemente* keine einzige Winkelgrößenangabe finden, weil es für die neuartige Mathematik nicht relevant ist. Die Innenwinkelsumme des Dreiecks ist zwei Rechte, und ein Rechter ist definiert als ein Winkel, der kongruent zu seinem Nebenwinkel ist (denn dies ist diejenige Eigenschaft, die beweistechnisch am nützlichsten ist). Natürlich muß man dann zum Postulat erheben, daß alle rechten Winkel gleich sind (wenn Geraden a , b einander rechtwinklig schneiden, und Geraden c , d auch, dann folgt daraus nicht, daß die rechten Winkel an der ab -Kreuzung kongruent zu den rechten Winkeln der cd -Kreuzung sind). Das zentrale Anliegen der griechischen Mathematik ist das geordnete Denken entlang festgelegter Schlußfolgerungsregeln, damit man dann irgendwann, nach mehreren Jahren, reif ist für das Studium der Philosophie (= der Liebe zur Weisheit).

Dies macht die griechische Geometrie so einzigartig im Vergleich zu anderen Kulturen. Wenn also die Kinder der heutigen Zeit Schwierigkeiten haben, den Wert des Begründens zu erkennen, können wir uns trösten mit der Beobachtung, daß praktisch alle anderen Hochkulturen dies auch nicht erkannten.

Worauf es wirklich ankommt

(Mindestens) folgende Erwartungen an Schule und Mathematikunterricht halte ich für plausibel:

- die vermittelten Sachinhalte sollen einen Wert haben;
- Mathematikunterricht vermittelt die *Kunst des klaren Denkens*;
- Mathematikunterricht vermittelt die mathematische Fachkultur;
- Mathematikunterricht vermittelt die *Kunst der klaren Rede*;
- Schule soll Menschen stark machen;

und meine These ist, daß ein Innenwinkelsummensatzbeweis „Wir schieben einen Bleistift ums Eck“ gegen jede der fünf Erwartungen verstößt.

Sachinhalte können einen Wert haben, wenn sie direkt für Anwendungen relevant sind (z.B. das Prozentrechnen oder die Statistik), oder indirekt als Werkzeug für benachbarte Wissenschaften (Differentialrechnung und Vektorrechnung für die Physik) oder wenn man mit diesem Sachinhalt eine Tätigkeit einübt (das sorgfältige Arbeiten oder das Begründen z.B.), oder wenn eine Vernetzung zu anderen Unterrichtsfächern hergestellt wird (Geschichte, Musik und das pythagoräische Komma) usw. Das Gegenteil liegt dann vor, wenn allen Anwesenden unklar bleibt, was die Unterrichtsstunde jetzt gebracht hat. Einen Sachinhalt einzuführen, der dann nie verwendet wird, ist wertarm. Für die typischen Winkelsätze heißt das: der Nebenwinkelsatz ist offensichtlich richtig, der Scheitelwinkelsatz auch (ein Beweisbedürfnis ist nicht vorhanden). Stufenwinkelsatz und Wechselwinkelsatz sind beinahe offensichtlich, aber auch nicht besonders spannend. Bei diesen vier Winkelsätzen geht es nicht ums Begründen, sondern ums Beobachten. Industrielle Anwendungen mag es sicherlich geben, aber letztlich bleibt der Wechselwinkelsatz immer noch banal. Der einzige Zweck, warum man überhaupt den Wechselwinkelsatz einführt, ist doch der Innenwinkelsummensatz. Wenn man also einen Bleistift ums Eck schiebt, stellt sich die Frage, warum man vorher die Kinder so gelangweilt hat. Ein besserer Ansatz scheint mir zu sein: nach einer methodischen Plackerei (nämlich vier Winkelsätze zu behandeln, die eh keiner anzweifelt) möchte man doch die Früchte ernten, damit die Anstrengung vorher eine Rechtfertigung bekommt.

Die *Kunst des klaren Denkens* erkennt man z.B. an der Fähigkeit, auf begründete Weise Sinn und Unsinn zu unterscheiden, was in Verantwortungspositionen eine wünschenswerte Kompetenz darstellt. Die Vermittlung im Mathematikunterricht geschieht dann natürlich über die Beweise, die auf logisch korrekte Weise ablaufen. Der Bleistift-Pseudobeweis ist einfach nicht schlüssig: man legt den Stift in die erste Kante (Spitze zeigt nach rechts), schiebt einmal um das Dreieck herum, und die Spitze zeigt jetzt nach links. **Also** ist die Innenwinkelsumme gleich 180° . Klingt schlüssig? Ist es aber nicht. Denn wir können ja die Fahrt mit einem Fünfeck wiederholen, und auch hier wechselt die Richtung der Bleistiftspitze. Wenn das obige fette „Also“ logisch korrekt ist, dann hätte auch das Fünfeck eine Innenwinkelsumme von 180° , was wir aber nicht glauben. Also war das obige fette „Also“ logisch unzulässig. Wenn man überhaupt etwas schlußfolgern könnte, dann eben, daß die Innenwinkelsumme beim Dreieck $180^\circ + i \cdot 360^\circ$ beträgt und beim Fünfeck $180^\circ + k \cdot 360^\circ$, mit noch zu bestimmenden $i, k \in \mathbb{N}_0$. Jetzt müßte man noch einen Gedanken einschieben: beim Dreieck ist jeder Winkel echt kleiner als 180° , also alle zusammen echt kleiner als $3 \cdot 180^\circ$, was $i = 0$ erzwingen würde. Und frühestens jetzt ist der Beweis komplett. Eine weitere Betrachtung zerstört diese Hoffnung aber: denn wenn dieser reparierte Pseudo-Beweis jetzt korrekt wäre, dann hätten ja auch die Dreiecke auf der Kugeloberfläche eine Innenwinkelsumme von 180° , was aber nicht stimmt. Also hat die Logik immer noch einen Mangel. Erfahrungsgemäß kommt an dieser Stelle der studentische Einwand, daß ich übertrieben pingelig wäre. Bin ich aber gar nicht — ich stelle einfach die Frage nach dem Lernziel, welches wir mit dem Innenwinkelsummensatz verknüpfen: wir wollen den Kindern das logische Denken beibringen, und dafür gibt es fachliche Standards. Das führt nahtlos zur dritten Erwartung.

Warum traktieren wir die Kinder in der Schule mit Beweisen? Oder etwas breiter gefragt: warum machen die Kinder im Deutschunterricht Literaturinterpretationsdiskussionen? Warum gibt es im Physikunterricht und Chemieunterricht Experimente? Warum gehen wir im Biologieunterricht in eine wissenschaftlich betreute Zooführung? Dies sind alles Tätigkeiten, die für die weitere berufliche Zukunft der Kinder wenig relevant sind. Die Antwort ist: die Schule soll eine vernünftige Auswahl des Wissens der Menschheit an die nächste Generation weitergeben (sonst geht das Wissen verloren), und zu dieser Auswahl gehört ein

authentischer Einblick in die unterschiedlichen Wissenschaften (die zweite Grunderfahrung weiter unten). Die Kinder sollen erfahren, daß unterschiedliche Wissenschaften unterschiedlich arbeiten, und die Arbeitsmethoden der einzelnen Disziplinen sollen präsentiert werden, ohne die Kinder zu belügen. Mathematiker arbeiten mit Beweisen, also gehören einige Beweise in die Schule. Die Kunst der Didaktik besteht in einer klugen Auswahl der zu behandelnden Beweise. Welche Beweise wollen wir wählen ? Beweise, die sich auf Termumformung oder funktionale Zusammenhänge beziehen (z.B. daß die Summe stetiger Funktionen wieder stetig ist, mit ε und δ) sind mit abstrakten Buchstaben und Formeltechnik derartig überfrachtet, daß das Lernziel (nämlich logisches Denken einzutüben) untergeht. Es gibt leider bemerkenswert viele Menschen, die den Schritt vom Zahlenrechnen zum Buchstabenrechnen nicht schaffen. Ein zweiter Nachteil: wenn der zu beweisende Satz zu nah am Buchstabenrechnen dran ist, dann entsteht der irriige Eindruck, das Lernziel bestünde im Rechnenlernen, was bei den Schülern mit der Alltagserfahrung kollidiert „Meine Eltern haben sowas nie gebraucht !“, und anschließend ergibt sich Konfusion, was dieser Unterricht eigentlich erreichen will. Der korrekte Eindruck wäre gewesen, daß das Lernziel im Begründenlernen besteht. All diesen Ärger erspart man sich, wenn man schöne Beweise aus der Geometrie nimmt und schön präsentiert.

Zur *Kunst der klaren Rede*: die braucht man in vielen Wissenschaften und auch sonst im Leben. Dazu gehört ein Gespür, daß jedes Wort eine Bedeutung besitzt, entsprechend der es dann auch eingesetzt wird. Dazu gehört auch, die Erfahrung gemacht zu haben, daß Definitionen etwas wertvolles sind, weil man sich daran festhalten kann. Zwei Beispiele: Studierende in den Sprachwissenschaften dürfen lernen, wie man feinsinnig und subtil unterscheidet zwischen den Fachbegriffen *Sem*, *Semem* und *Lexem*. Jurastudierende lernen, daß ein simpler Brötchenkauf beim Bäcker nicht aus einem Vertrag besteht, sondern aus drei Verträgen (bzw. mindestens vier Verträgen, falls man Wechselgeld zurückbekommt); und dazwischen korrekt zu unterscheiden, erfordert sprachliches Feingefühl und viel Übung. Diese Übung soll in den acht Jahren Gymnasium geschehen. Das Anwenden juristischer Paragraphen ist letztlich nichts anderes als textliche Arbeit mit Definitionen, wie es im Mathematikunterricht eingeübt werden sollte. Insbesondere für die schwächeren Schüler (aber auch für alle anderen) ist es wichtig, mit maximaler Klarheit zu unterrichten und einen Sachverhalt mal richtig auf den Punkt zu bringen. Der Bleistift-Pseudobeweis hat jetzt aber den Nachteil, daß ein Gedankengang kaum erkennbar ist, also auch nicht formulierbar.

Wie werden Menschen stark ? Sicherlich erinnern Sie sich an den Tag, als Sie das Fahrradfahren lernten und zum ersten Mal ohne Hilfe oder Stütze fuhren. Das war doch ein euphorisches Gefühl, oder ??? Dieses Gefühl hatte Sie anschließend noch tagelang begleitet. An diesem Tage hatten wir etwas Wichtiges gelernt: daß wir nämlich durch beharrliche Anstrengung und Ausdauer wirklich etwas erreichen können. Wir hatten erlebt, daß wir durch eigenes Handeln eine Wirksamkeit erzielen können, und daraus entsteht dann Selbstvertrauen. Wir sind eben kein Stück Treibholz, das von den Gewalten des Ozeans herumgeworfen wird, sondern wir können einen Weg wählen und dann auch gehen. Lehrende, die diese Sichtweise auf authentische Weise ausstrahlen und den Kindern vermitteln können, sind einfach besser. Die schönste pädagogische Situation besteht doch darin, daß die Lernenden freiwillig lernen und von sich aus motiviert sind. Und nichts motiviert einen Menschen stärker als ein Erfolg, *vorausgesetzt*, daß diesem Erfolg eine Anstrengung vorausging. Genau wie damals beim Erlernen des Fahrradfahrens; das konnten wir ja auch nicht gleich beim ersten Versuch. Ein geschenkter Erfolg ist nutzlos für die Motivation ! Die Kunst des Unterrichtens besteht auch darin, für jeden Schüler und jede Schülerin die jeweils passende Aufgabe zu finden, die den richtigen Schwierigkeitsgrad hat und Raum für Anstrengung bietet. Wir schauen uns an, was die schwerste Aufgabe ist, die der Schüler ohne Hilfe bewältigen kann, und was die schwerste Aufgabe ist, die der Schüler mit Hilfe schafft. Und in dieses Intervall zielen wir hinein, wenn wir die passende Aufgabe suchen. Daß man bei geometrischen Aufgaben oft eine Hilfslinie braucht, die man erstmal erraten muß — das ist didaktische Absicht ! Ich glaube an die Kinder; sie schaffen mehr, als man denkt.

Grunderfahrungen und überfachliche Kompetenzen

Im Jahr 1996 erschien ein berühmter Zeitschriftenartikel [19]¹ des Mathematik-Didaktikers HEINRICH WINTER, der darlegte, daß Schülerinnen und Schüler folgende **drei Grunderfahrungen** im Schulfach Mathematik gemacht haben sollten:

1. Mathematik ist eine Disziplin, die uns dabei hilft, echte Praxisprobleme zu lösen (z.B. beim Aufstellen eines Finanzplans einer Firma, oder bei der Prognose, ob eine noch zu bauende Brücke tragfähig sein wird, oder beim Erstellen eines Fahrplans eines Verkehrsunternehmens, ...).

¹Lektüre sehr empfohlen !

2. Mathematik ist ein großes Theoriengebäude, bei dessen Errichtung man von einem festen Fundament von Axiomen startet und auf logisch korrekte Weise eine Aussage nach der anderen beweist.
3. Mathematik ist eine Beschäftigung, bei der wir lernen können, wie man Probleme löst. Hierbei sollen die Schülerinnen und Schüler insbesondere lernen, auch dann noch eine Lösung zu finden, wenn der Lösungsweg noch nicht bekannt ist.

Die erste Grunderfahrung findet sich in der Modellierungsvorlesung des Mathematikstudiums wider, die zweite Grunderfahrung in praktisch jeder Mathematikvorlesung. Die dritte Grunderfahrung bezieht sich auf Ideen von GEORGE POLYA, dessen Buch *How to solve it* bzw. *Schule des Denkens* [13] auch heute noch lesenswert ist.

Problemlösen besteht aus vier Phasen:

Problem verstehen: wir finden heraus, was wir in der Aufgabe liefern sollen. Wir ermitteln Voraussetzungen und Behauptungen, und wir klären die Bedeutungen aller Fachbegriffe.

Plan erarbeiten: da bei dem jetzt zu lösenden Problem der Lösungsweg nicht bekannt ist (wir haben also gerade nicht die Situation vor uns, daß wir *einfach eine Rechenschablone runterrechnen*), müssen wir den Lösungsweg suchen. Diese Suche muß irgendwo anfangen. Typischerweise tragen wir unser Wissen zusammen, und wir versuchen uns ähnlicher Aufgaben zu erinnern, die wir früher erfolgreich lösen konnten, und von denen wir hoffentlich einige Ideen wiederverwerten können. Womöglich werden wir bei der zweiten Phase einiges ausprobieren müssen. Sackgassen sind keine Schande, Fehler sind Lerngelegenheiten !

Plan durchführen: aus der zweiten Phase entnehmen wir einen Lösungsplan, der zu funktionieren scheint. Diesen führen wir jetzt aus.

Rückblick: wir schauen auf das, was wir geleistet haben, und wir prüfen nach, ob wir wirklich die gestellte Aufgabe gelöst haben (oder ob hier noch etwas fehlt). Wir schauen auch nach, ob unser Lösungsweg vielleicht noch verschönert werden könnte, oder ob er noch einiges mehr leisten könnte. Wir merken uns leistungsstarke Arbeitstechniken.

Diese vierschrittige Arbeitsweise ist deshalb allgemeinbildungsrelevant, weil sie in den verschiedensten Berufen vorkommt: eine Anwältin, die die Interessen eines Mandanten zu vertreten hat und deshalb ein Schriftstück aufsetzen muß; oder ein Soziologe, der eine Studie (Meinungsumfrage) zu konzipieren hat; oder ein Automechaniker, der ein Klappergeräusch abstellen soll — stets kann der Arbeitsablauf in diese vier Schritte zerlegt werden. Oder stellen Sie sich vor, daß ein Schüler Schwierigkeiten hat, die Gleichung $x = \frac{2}{y}$ nach y umzustellen: zuerst sollten Sie verstehen, worin genau die Ursache liegt. Vielleicht verbindet er keine Vorstellung mit der Division (und hat bisher immer rein mechanisch dividiert); oder vielleicht kann er sich unter dem Buchstabenrechnen nichts vorstellen. Je nachdem, was vorliegt, unterscheidet sich dann die Verfahrensweise.

Ein sehr ähnlicher vierstufiger Ablauf findet sich auch in der mathematischen Modellierung, und das dortige Verfahren hat sogar einen Kreislaufcharakter.

Es gibt vier überfachliche Kompetenzen in Bezug auf den schulischen Mathematikunterricht: Lernen, Begründen, Kommunizieren, Problemlösen. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, wie man lernt, wie man begründet, wie man kommuniziert, wie man Probleme löst. Diese Kompetenzen heißen *überfachlich*, weil sie zwar im Mathematikunterricht vermittelt werden, aber aus dem Fach Mathematik herausgreifen und für das allgemeine Leben relevant sind.

Danksagung

Dieses Skript entstand auf Grundlage von Diskussionen über mehrere Jahre mit vielen Kolleginnen und Kollegen an der Universität Konstanz, wofür ich sehr dankbar bin. Ein weiterer Dank geht an die Studierenden für viele Anregungen zur Didaktik.

Kapitel 1

Euklid, Hilbert, Konstruktionen

1.1 Allgemeines

Was ist Geometrie (der Ebene, des Raumes) ?

Geometrie ist eine spezielle mathematische Theorie, das heißt eine Menge S von „allen“ gültigen Sätzen (=wahren Aussagen), bezüglich festgewählter *Grundbegriffe* und mittels dieser definierter *abgeleiteter Begriffe*.

Diese Sätze sind wahr, weil sie entweder

1. auf Grund der Erfahrung („Anschauung“) gelten, oder
2. *Folgerungen* aus einer festgewählten Menge von Aussagen („Axiomen“) sind, und stets dann gelten, wenn die Axiome gelten, oder
3. in Bezug auf eine andere („schon bekannte“) Theorie gelten (z.B. in Bezug auf die Theorie von \mathbb{R} oder \mathbb{C}).

Im zweiten Fall spricht man von einer axiomatischen Theorie, oder von einem axiomatischen bzw. synthetischen Aufbau der Geometrie. Die Axiomensysteme von Euklid (≈ 300 v.u.Z.) und von Hilbert (1862–1943) sind für uns von besonderem Interesse.

Ein Beispiel für den dritten Fall ist die *analytische Geometrie*, wie sie von Descartes (1596–1650) und Fermat (1601–1665) begründet wurde.

Die Formulierung „Menge S von allen gültigen Sätzen“ bedeutet, daß diese Menge S alle Sätze enthält, die sich durch „Folgern“ aus Sätzen aus S gewinnen lassen. Es ist also S *deduktiv abgeschlossen*.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen 2. und 3. : jedes Axiomensystem der Geometrie gehört zu den durch „Rechnen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} “ beweisbaren Sätzen der analytischen Geometrie. Das bedeutet: die *Begriffe* der analytischen Geometrie bilden ein spezielles *Modell* jedes Axiomensystems der axiomatischen Geometrie.

1.2 Das Axiomensystem von Euklid

Wir zitieren aus [7]:

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
2. Eine **Linie** breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene** Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein ebener **Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**; und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.
11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. **Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine **Grenze** ist das, worin etwas endigt.
14. Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.
15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die **Umfang (Bogen)** heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;
16. Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.
18. Ein **Halbkreis** ist die vom Durchmesser und den durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur; [und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise].
19. (20–23) **Geradlinige Figuren** sind solche, die von Strecken umfaßt werden, **dreiseitige** die von drei, **vierseitige** die von vier, **vielseitige** die von mehr als vier Strecken umfaßten.
20. (24–26) Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichen Seiten, ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten.
21. (27–29) Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein **rechtwinkliges** Dreieck jede mit einem rechten Winkel, ein **stumpfwinkliges** jede mit einem stumpfen Winkel, ein **spitzwinkliges** jede mit drei spitzen Winkeln.
22. (30–34) Von den vierseitigen Figuren ist ein **Quadrat** jede, die gleichseitig und rechtwinklig ist, ein **längliches Rechteck** jede, die zwar rechtwinklig aber nicht gleichseitig ist, ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist, ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig sind; die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen.
23. (35) **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Postulate

Gefordert soll sein:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. (Ax. 10) Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,
5. (Ax. 11) Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. [Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.]
5. (6) [Die Doppelten von demselben sind einander gleich.]
6. (7) [Die Halben von demselben sind einander gleich.]
7. (8) Was einander deckt, ist einander gleich.
8. (9) Das Ganze ist größer als der Teil.
9. (12) [Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.]

Ausgehend von diesen Grundlagen präsentiert Euklid ein Werk der Geometrie, das sich wie folgt gliedert:

Buch I: vom Punkt bis zum pythagoreischen Lehrsatz,

Buch II: geometrische Algebra,

Buch III: Kreislehre,

Buch IV: ein- und umbeschriebene Vielecke,

Buch V: Ausdehnung der Größenlehre auf Irrationalitäten,

Buch VI: Proportionen und Anwendung auf Planimetrie,

Buch VII: Teilbarkeitslehre, Primzahlen,

Buch VIII: Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen,

Buch IX: Lehre von Gerade und Ungerade

Buch X: Klassifikation der quadratischen Irrationalitäten; Methoden der Flächenanlegung zur geometrischen Lösung aller Typen quadratischer Gleichungen,

Buch XI: elementare Stereometrie,

Buch XII: Exhaustionsmethode: Pyramide, Kegel, Kugel,

Buch XIII: reguläre Polyeder.

1.3 Das Axiomensystem von Hilbert

Unsere Darstellung des Axiomensystems von Hilbert findet sich in der untigen Form in [9], beschränkt sich dabei aber auf die Axiome der ebenen Geometrie.

Axiomgruppe I: Axiome der Verknüpfung

Es gibt zwei Systeme von Dingen (Punkte und Geraden) und eine Verknüpfung („zusammengehören“, „Punkt liegt auf Gerade“, „Gerade geht durch Punkt“) zwischen diesen, sodaß gilt:

- I.1** Zu zwei Punkten A und B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A und B zusammengehört.
- I.2** Zu zwei Punkten A und B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A und B zusammengehört.
- I.3** Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Hierbei sind jeweils verschiedene Punkte bzw. verschiedene Geraden gemeint. Man beachte, daß ausdrücklich nicht gesagt wird, daß eine Gerade eine Menge wäre, die die mit ihr zusammengehörenden Punkte als Elemente enthält.

Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung

Für je drei Punkte gibt es eine Relation „zwischen“ mit folgenden Eigenschaften:

- II.1** Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkte A und einem Punkte C liegt, so sind A , B , C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A .
- II.2** Zu zwei verschiedenen Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC , sodaß C zwischen A und B liegt.
- II.3** Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Nachdem diese Zwischenrelation als Grundbegriff eingeführt ist, definiert man den Begriff „Strecke“ als abgeleiteten Begriff: für zwei Punkte A und B auf einer Geraden besteht die Strecke \overline{AB} (auch geschrieben als \overline{BA}) aus all jenen Punkten der Geraden, die zwischen A und B liegen. Die Punkte A und B heißen Endpunkte der Strecke \overline{AB} , und alle anderen Punkte der Geraden heißen „außerhalb von \overline{AB} gelegen“.

Mit diesem abgeleiteten Begriff wird verlangt:

- II.4 (Axiom von Pasch)** Es seien A , B , C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade, die keinen der Punkte A , B , C trifft. Wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke \overline{AB} geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke \overline{AC} oder durch einen Punkt der Strecke \overline{BC} .

Es läßt sich beweisen, daß die Gerade a nicht beide Strecken \overline{AC} und \overline{BC} treffen kann.

Axiomgruppe III: Axiome der Kongruenz

Für Paare von Strecken gibt es eine Relation „kongruent“, mit folgenden Eigenschaften:

- III.1** Wenn A , B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets (mindestens) einen Punkt B' finden, sodaß die Strecke \overline{AB} der Strecke $\overline{A'B'}$ kongruent ist.

Es wird also gefordert, daß sich Strecken abtragen lassen. Die Eindeutigkeit der Streckenabtragung wird nicht verlangt, sondern läßt sich beweisen.

III.2 Wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.

Damit ist die Kongruenzrelation also transitiv. Die Symmetrie und Reflexivität braucht man nicht fordern, da diese Eigenschaften bewiesen werden können.

Und die Kongruenz vererbt sich beim Streckenantragen:

III.3 Es seien \overline{AB} und \overline{BC} zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a , und ferner $\overline{A'B'}$ und $\overline{B'C'}$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' , ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist stets auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.

Hierbei verwenden wir das Symbol \cong für die Kongruenz.

Wir brauchen einen weiteren abgeleiteten Begriff: „Halbstrahl“. Es seien A, A', O, B vier verschiedene Punkte einer Geraden a , sodaß O zwischen A und B , aber nicht zwischen A und A' liegt; dann sagen wir: die Punkte A und A' liegen in der Geraden a auf ein und derselben „Seite“ von O , und die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten von O . Die sämtlichen auf ein und derselben Seite von O gelegenen Punkte der Geraden a heißen auch „ein von O ausgehender Halbstrahl“; somit teilt jeder Punkt einer Geraden diese in zwei Halbstrahlen.

Mit ähnlicher Definition spricht man von den beiden Seiten einer Geraden innerhalb einer „Ebene“.

Damit können wir „Winkel“ als einen abgeleiteten Begriff definieren. Es seien h, k zwei verschiedene Halbstrahlen, die von einem Punkt O starten und verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen nennen wir einen Winkel und bezeichnen diesen mit $\angle(h, k)$ oder $\angle(k, h)$. In naheliegender Weise definieren wir Schreibweisen der Art $\angle ABC$ für Punkte A, B, C , die nicht auf einer Geraden liegen.

Damit sind gestreckte oder überstumpfe Winkel nicht möglich, und wir unternehmen auch keinen Versuch, die Größe eines Winkels als eine Maßzahl zu definieren.

Der Halbstrahl h soll zur Geraden \overline{h} gehören, und der Halbstrahl k zur Geraden \overline{k} . Diejenigen Punkte, die mit h auf derselben Seite von \overline{k} liegen, und die gleichzeitig mit k auf derselben Seite von \overline{h} liegen, heißen „im Innern des Winkels $\angle(h, k)$ gelegen“, alle anderen Punkte heißen „außerhalb des Winkels $\angle(h, k)$ gelegen“.

Man kann zeigen, daß das Winkelinnere und das Winkeläußere nichtleere Mengen sind.

Für Winkel gibt es eine Relation „Kongruenz“ mit folgender Eigenschaft:

III.4 Es sei ein Winkel $\angle(h, k)$ und eine Gerade a' gegeben mit einem Punkte O' darauf, sowie eine bestimmte Seite von a' sei festgelegt. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a' , der von O' ausgeht. Dann gibt es genau einen Halbstrahl k' ab dem Punkte O' , sodaß der Winkel $\angle(h, k)$ kongruent zum Winkel $\angle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\angle(h', k')$ auf der festgelegten Seite von a' liegen. Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent.

Dieses Axiom verlangt, daß Winkel angetragen werden können, und zwar eindeutig.

Mit Hilfe des Begriffs „Strecke“ definiert man den abgeleiteten Begriff „Dreieck“ für drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

III.5 Wenn für zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Kongruenzen $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ gelten, so gilt auch die Kongruenz $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$.

Dieses Axiom verknüpft die Streckenkongruenz mit der Winkelkongruenz.

Mit den bisher bereitgestellten Axiomen kann man z.B. zeigen, daß in gleichschenkligen Dreiecken die Basiswinkel kongruent sind, und daß die Kongruenzsätze SWS und WSW gelten. Hierbei ist der abgeleitete Begriff der Dreieckskongruenz definiert als drei Kongruenzbeziehungen für die Strecken, und drei Kongruenzbeziehungen für die Winkel.

Ein „rechter Winkel“ ist definiert als ein Winkel, der beim Antragen an sich selbst eine Gerade ergibt. Die Existenz von rechten Winkeln kann bewiesen werden.

Axiomgruppe IV: Axiom der Parallelen

Zwei Geraden (in einer Ebene) werden parallel genannt, wenn sie einander nicht in genau einem Punkte schneiden. Mit den bisherigen Axiomen läßt sich zeigen, daß es zu einer Geraden a und einem Punkte P (nicht auf a) mindestens eine Gerade gibt, die zu a parallel ist und durch P geht.

IV (Euklidisches Axiom) Es sei a eine beliebige Gerade und P ein Punkt außerhalb von a . Dann gibt es höchstens eine Gerade, die zu a parallel ist und durch P geht.

Axiomgruppe V: Axiome der Stetigkeit

V.1 (Axiom des Messens, oder Archimedisches Axiom) Sind \overline{AB} und \overline{CD} irgendwelche Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß das n -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke \overline{CD} von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinwegführt.

V.2 (Axiom der linearen Vollständigkeit) Das System der Punkte auf einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I–III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz, und V.1 erhalten bleiben.

Mit V.2 ist anschaulich gemeint, daß es auf einer Geraden keine Lücken gibt. Es soll insbesondere nicht möglich sein, weitere Punkte zur Geraden hinzuzufügen, sodaß die genannten Axiome immer noch gelten.

1.4 Diskussion der Axiomensysteme

Euklid unternimmt den Versuch, die Grundbegriffe (Punkt, Gerade, ...) zu definieren.

Hilbert verzichtet auf diesen Versuch; stattdessen wird lediglich gefordert, daß es diese (unbestimmten) Grundbegriffe gibt.

Spätestens seit Hilbert hat es sich eingebürgert, zu unterscheiden zwischen einer Geometrie und einem Modell dieser Geometrie. Ein Modell für das Hilbert-Axiomensystem läßt sich in der Sprache der analytischen Geometrie angeben.

Die Axiomengruppen III, IV, V sind logisch voneinander unabhängig, denn in [9] werden verschiedene Modelle präsentiert, in denen alle Axiomengruppen gelten bis auf jeweils eine. (Es hat wenig Sinn, auf die Axiomengruppen I oder II zu verzichten, denn dann wird es schwer, die Axiome der Gruppen III, IV, V überhaupt zu formulieren).

Von besonderem Interesse ist das Parallelenaxiom. Auch bei Euklid ist dieses Postulat erheblich länger als die anderen. Alle Versuche, dieses Postulat aus den anderen zu beweisen, waren gescheitert, sodaß der Wunsch aufkam, Modelle für Geometrien zu entdecken, in denen dieses Axiom nicht gilt. Ein Modell einer solchen nicht-euklidischen Geometrie werden wir uns in einem späteren Kapitel näher anschauen.

Eine Geometrie mit den Axiomengruppen I, II, III, V heißt *absolute Geometrie*, und diese umfaßt alle diejenigen Sätze, die in der euklidischen Geometrie und nicht-euklidischen Geometrie gleichermaßen gelten. Dazu gehören z.B.

- die Winkelsumme eines jeden Dreiecks ist kleiner oder gleich zwei Rechten,
- in jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber [11]. Hierbei heißt ein Winkel kleiner als ein anderer, wenn er „nach Antragen im anderen Winkel enthalten“ ist (Maßzahlen für Winkel haben wir nirgendwo definiert!).

Das Parallelenaxiom ist äquivalent ([11]) zu folgenden Aussagen:

- die Innenwinkelsumme eines jeden Dreiecks ist gleich zwei Rechten,
- es gibt ein Dreieck mit Innenwinkelsumme gleich zwei Rechten,
- jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck (hat also vier rechte Winkel),

- es gibt ein Rechteck,
- die Parallelität von Geraden ist transitiv,
- es gibt zwei nicht-kongruente Dreiecke mit gleichen Innenwinkeln.

1.5 Ein Modell der nicht-euklidischen Geometrie

Das KLEINSche Modell der hyperbolischen Geometrie verwendet folgende Grundbegriffe [3] und abgeleiteten Begriffe:

h-Punkt: Ein Punkt der euklidischen Ebene heißt *h-Punkt* genau dann, wenn er im Inneren des Einheitskreises liegt (also auch nicht auf der Einheitskreislinie).

h-Ebene: Das ist die Menge aller h-Punkte.

Randpunkt: Ein euklidischer Punkt heißt Randpunkt, wenn er auf dem Einheitskreis liegt.

h-Gerade: Das ist eine Sehne im Einheitskreis, ohne ihre beiden Randpunkte.

Verknüpfung: Ein h-Punkt liegt auf einer h-Geraden, wenn er es auch im euklidischen Sinne tut.

Zwischenrelation: Ein h-Punkt auf einer h-Geraden liegt zwischen zwei anderen Punkten auf dieser h-Geraden, wenn dies auch euklidisch so ist.

h-Strecke: Wie im Euklidischen

h-Dreieck: Drei h-Punkte, die nicht auf einer h-Geraden liegen, bilden die Eckpunkte eines h-Dreiecks, und die drei Kanten des Dreiecks sind die drei h-Strecken zwischen den drei Eckpunkten.

h-Halbstrahl: Ein h-Punkt auf einer h-Geraden zerlegt diese auf natürliche Weise in zwei h-Halbstrahlen.

h-Winkel: Dieser abgeleitete Begriff wird wie im Axiomensystem von Hilbert definiert.

h-Kongruenz: Zwei Teilmengen der h-Ebene heißen *h-kongruent*, wenn die eine durch eine endliche Abfolge von *Polarenspiegelungen* auf die andere abgebildet werden kann.

h-rechte Winkel: Ein Winkel ist ein *h-rechter Winkel*, wenn der eine Schenkel mit seinem Bild bei Polarenspiegelung am anderen Schenkel eine h-Gerade ergibt.

Dieses Modell werden wir uns in einem späteren Kapitel noch eingehender anschauen. Im Moment begnügen wir uns mit dem Hinweis, daß die Polarenspiegelung eine Spiegelung innerhalb des Einheitskreisscheibe ist, bei der ein innerer Punkt an einer Sehne auf eine solche Weise gespiegelt wird, daß er anschließend auf der anderen Seite der Sehne landet, aber noch im Inneren des Kreises. So wird es möglich, eine h-Strecke auf einer h-Geraden immer wieder an sich anzutragen (sodaß die h-Streckenkopien also h-kongruent zur Ausgangsstrecke sind) und dabei die Einheitskreisscheibe nie zu verlassen. In diesem Sinne sind die h-Geraden also unendlich lang, wenn man sie in der Metrik der hyperbolischen Geometrie mißt.

Das Parallelenaxiom gilt offenkundig nicht, denn zu einem h-Punkt außerhalb einer h-Geraden gibt es unendlich viele h-Geraden, die durch den genannten h-Punkt gehen und parallel zur genannten h-Geraden sind.

Aus einem Grund, der am Ende der Vorlesung klar werden wird, bezieht Buchmann [3] den vorangesetzten Buchstaben **h** nicht auf **hyperbolisch**, sondern auf **heteroptera** (Wanzen).

Übungsaufgabe 1.1. Gegeben sei folgendes Modell einer Geometrie: Punkte sind die 4 Wörter *AMT*, *DOM*, *ORT*, *RAD*. Geraden sind die 6 Buchstaben *A*, *D*, *M*, *O*, *R*, *T*. Ein Punkt ist mit einer Geraden verknüpft, wenn der entsprechende Geradenbuchstabe im Punktwort enthalten ist.

1. Man zeige, daß die Axiome der Gruppe I erfüllt sind.
2. Man finde einen Schnittbegriff für Geraden, sodaß auch das Parallelenaxiom IV erfüllt ist.

1.6 Konstruktionen

Die Elemente des Euklid waren bis in das neunzehnte Jahrhundert hinein das Standardwerk, nach dem die Geometrie in den höheren Schulen unterrichtet wurde. Auf die griechische Schule geht der Begriff der *geometrischen Konstruktion* zurück, den wir uns näher anschauen wollen. Unser Beispiel soll sein:

Beispiel: *In der Ebene seien zwei Kreise gegeben. Man konstruiere mit Zirkel und Lineal alle Geraden, die Tangenten an jeden der beiden Kreise sind.*

Die Formulierung *konstruiere mit Zirkel und Lineal* besitzt eine präzise festgelegte Bedeutung. Es sind nämlich genau folgende Handlungen zulässig:

- die Skaleneinteilung des Lineals darf niemals verwendet werden;
- das Lineal darf verwendet werden, um zwei gegebene Punkte zu einer Geraden zu ergänzen;
- der Schnittpunkt zweier Geraden darf ermittelt werden (analog die Schnittpunkte zwischen Gerade und Kreis, sowie die Schnittpunkte zweier Kreise);
- wenn zwei Punkte gegeben sind, dann darf man einen Kreis zeichnen, der den einen Punkt als Mittelpunkt hat und der durch den anderen Punkt geht;
- außerdem darf man auf jeder Geraden einen Punkt beliebig wählen, und auf jedem Kreis ebenfalls.

Alle anderen Arbeitsschritte sind vielleicht wünschenswert, aber eben nicht erlaubt. Der vorletzte Punkt ist insbesondere so zu verstehen, daß ein Zirkel aufhört zu existieren, wenn man die im Kreismittelpunkt steckende Nadel aus dem Papier herauszieht. Es ist also nicht möglich, eine Streckenlänge „in die Zirkelspanne zu nehmen und durch die Luft zu transportieren, um sie woanders anzutragen“. Dieses Konzept eines *kollabierenden Zirkels* klingt nach einer boshaften Einschränkung, ist aber letztlich keine, denn schon im zweiten Satz des ersten Buchs zeigt Euklid, daß man letztlich doch Strecken antragen kann.

Warum betreiben Menschen diese Form der Geometrie ?

Es geht offensichtlich nicht um Anwendungen, denn für echte Anwendungsfragen würde man ja die Benutzung der Skaleneinteilung erlauben und den Winkelmesser gleich dazu.

Es geht ausschließlich um das Einüben des präzisen Denkens, unter Beachtung strenger Maßstäbe der Logik und Wissenschaft. Was ist Wissenschaft ?

Wissenschaft ist die (systematische) Suche nach der Wahrheit und Erkenntnis. Es ergibt sich also von selbst, daß man bei der Wahrheitssuche niemanden belügen darf: die Leserschaft nicht, die Kinder in der Schule nicht, sich selbst auch nicht.

Wir haben also zwei Kreise gegeben und fragen nach deren gemeinsamen Tangenten. Wieviele solche Tangenten gibt es ? Gibt es überhaupt gemeinsame Tangenten ? Wie finden wir sie (wenn es sie gibt) ? Wie können wir sicher sein, daß wir auch alle Tangenten gefunden haben und keine übersehen wurde ?

Die einzige ehrliche Antwort lautet, daß wir es *noch* nicht wissen. Unser Wissensstand ist: da sind zwei Kreise vorgegeben in derselben Ebene. In dieser Ebene gibt es unendlich viele Geraden, und prinzipiell könnte eine jede davon eine gemeinsame Tangente beider Kreise sein.

Unendlich viele Geraden lassen sich offenkundig schwer handhaben. Die Strategie und das Konstruktionschema nach Euklid besteht in folgendem:

- Wenn eine Gerade eine gemeinsame Tangente ist, dann erfüllt sie gewisse geometrische Bedingungen, aus denen wir auf logisch korrekte Weise Schlußfolgerungen ziehen;
- auf diese Weise engen wir die Menge der kandidierenden Geraden solange ein, bis nur noch ganz wenige Geraden als Tangentenkandidatinnen übrig sind (dieser Schritt heißt *Analyse des Problems*);
- für diese Geraden geben wir Konstruktionsbeschreibungen an (zweiter Schritt des Schemas);
- im dritten Schritt beweisen wir, daß alle derart konstruierten Geraden wirklich gemeinsame Tangenten sind;
- und im vierten Schritt (genannt *Determination*) untersuchen wir Durchführbarkeit der Konstruktion, Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

Man beachte, daß der dritte Schritt für die logische Korrektheit zwingend erforderlich ist. Die ersten beiden Schritte (Analyse und Konstruktionsbeschreibung) sind folgende logische Aussage:

Wenn eine Gerade eine gemeinsame Tangente beider Kreise ist, **dann** erfüllt sie folgende Lagebeziehungen (...), und sie kann wie folgt konstruiert werden: (...).

Aus dieser Wenn–Dann–Aussage kann man nicht schließen, **daß** die Gerade eine gemeinsame Tangente beider Kreise ist.

Das sollten wir uns genauer anschauen: seien A und B Aussagen. Wir nehmen jetzt an, daß die Aussage „Wenn A , dann B “ wahr ist. Dann läßt sich nicht schließen, daß A wahr ist. Es läßt sich auch nicht schließen, daß B wahr ist. Ein Beispiel: die Aussage

Wenn die Einhörner dieser Welt Wasser trinken, **dann** gibt es auf dieser Welt Wasser.

ist offenkundig wahr, denn wenn der Teil vor dem Komma wahr ist, dann wird die Existenz von Wasser ja vorausgesetzt. Aber aus dieser (wahren !) kombinierten Aussage kann man eben nicht schlußfolgern, daß es auf dieser Welt Einhörner gibt.

Ein eher mathematisches Beispiel für dieses Logikprinzip:

Wenn das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist, **dann** sind alle seine Kanten gleichlang.

Diese kombinierte Aussage ist wahr (denn wir können sie beweisen), aber aus der Wahrheit dieser kombinierten Aussage kann man nicht schließen, daß jedes Viereck, das wir $ABCD$ taufen, ein Quadrat wäre.

Eine andere Sichtweise auf diesen Sachverhalt ist: wir sollen alle gemeinsamen Tangenten finden und konstruieren. Das heißt:

- wir sollen nicht zu wenige Geraden finden (Schritt 1 und 2);
- wir sollen nicht zu viele Geraden finden (Schritt 3);
- das genaue Zählen der Lösungen geschieht in Schritt 4.

Das tatsächliche Arbeiten orientiert sich dann an folgenden methodischen Prinzipien:

- jedes neue geometrische Objekt bekommt einen Namen, unter dem es in Zukunft immer angesprochen wird;
- von jedem neu eingeführten geometrischen Objekt betrachten wir die Eigenschaften, und wir wenden naheliegende bekannte Sätze an;
- wir arbeiten eng mit den Definitionen (weil diese uns Halt geben);
- wir schreiben alles sorgsam auf (was das erfolgreiche Arbeiten überhaupt erst ermöglicht);
- gelegentlich brauchen wir eine Idee, für die es kein Rezept gibt;
- der Rest ergibt sich durch fleißiges Üben.

Zu den Definitionen: eine Tangente an einen Kreis ist definiert als eine Gerade, die mit diesem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat. Ein Kreis ω mit Mittelpunkt M und Radius R ist die Menge von Punkten der Ebene, die von M den (nichtnegativen) Abstand R haben.

Schritt 1: Analyse des Problems

Gegeben sind zwei Kreise ω_1 und ω_2 mit Radien R_1, R_2 und Mittelpunkten M_1, M_2 . Wir können $R_1 \geq R_2$ voraussetzen (ansonsten taufen wir um über Kreuz). Wir setzen weiterhin $R_2 > 0$ voraus (und überlassen den Fall $R_2 = 0$ den Leserinnen und Lesern, weil er viel einfacher ist).

Angenommen, eine Gerade t sei eine gemeinsame Tangente von ω_1 und ω_2 . Dann hat (definitionsgemäß !) t mit ω_1 genau einen Punkt gemeinsam, den wir P_1 taufen. Analog taufen wir den eindeutig bestimmten gemeinsamen Punkt von t und ω_2 auf den Namen P_2 . Es ist dann (wegen der Kreis-Definition)

$$|P_1M_1| = R_1 \geq R_2 = |P_2M_2|.$$

Wegen $R_j > 0$ ist $P_j \neq M_j$, also bestimmen die Punkte P_j und M_j genau eine Gerade, die gemäß Lemma 4.10 (Teil 1) senkrecht auf t steht. Es folgt $P_1M_1 \parallel P_2M_2$.

Wir fällen das Lot¹ von M_2 auf die Gerade P_1M_1 , und den Lotfußpunkt taufen wir Q_1 . Es entsteht ein Viereck $P_1Q_1M_2P_2$, von dem gemäß seiner Konstruktion drei Innenwinkel rechte Winkel sind. Also ist $P_1Q_1M_2P_2$ ein Rechteck. Nach Definition des Lotfußpunkts Q_1 ist $M_2Q_1 \perp M_1Q_1$.

Aus der Umkehrung des Thalesatzes folgt jetzt, daß Q_1 auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{M_1M_2}$ liegt. Diesen Thaleskreis taufen wir ω_T . Jetzt unterscheiden wir, in welcher Reihenfolge P_1, M_1, Q_1 auf der Geraden P_1M_1 liegen. Weil bei jedem Rechteck die gegenüberliegenden Seiten gleichlang sind, ist $|Q_1P_1| = |M_2P_2| = R_2$. Wegen $|M_1P_1| = R_1 \geq R_2$ kann M_1 nicht zwischen P_1 und Q_1 liegen.

Fall 1: es liegen M_1 und M_2 auf der gleichen Seite von t : Dann folgt $|M_1Q_1| = R_1 - R_2$, und es liegt also Q_1 auf dem Kreis um M_1 mit Radius $R_1 - R_2$. Diesen Kreis taufen wir $\omega_{1,-}$. Damit wird Q_1 bestimmt als Schnittpunkt der beiden Kreise ω_T und $\omega_{1,-}$. Die gesuchte Tangente $t = P_1P_2$ entsteht als Parallelverschiebung der Rechteckskantengeraden M_2Q_1 senkrecht zu sich selbst, mit der Verschiebungsweite R_2 , weg vom Punkt M_1 .

Fall 2: es liegen M_1 und M_2 auf verschiedenen Seiten von t : Dann folgt $|M_1Q_1| = R_1 + R_2$, und es liegt also Q_1 auf dem Kreis um M_1 mit Radius $R_1 + R_2$. Diesen Kreis taufen wir $\omega_{1,+}$. Damit wird Q_1 bestimmt als Schnittpunkt der beiden Kreise ω_T und $\omega_{1,+}$. Die gesuchte Tangente $t = P_1P_2$ entsteht als Parallelverschiebung der Rechteckskantengeraden M_2Q_1 senkrecht zu sich selbst, mit der Verschiebungsweite R_2 , hin zum Punkt M_1 .

Schritt 2: Konstruktionsbeschreibung:

Fall A: sei $M_1 = M_2$ und $R_1 = R_2$: wähle P auf ω_1 beliebig, konstruiere die Senkrechte zu M_1P durch P , taufe sie t .

Fall B: sei $M_1 = M_2$ und $R_1 > R_2$: (keine Konstruktion angegeben)

Fall C: sei $M_1 \neq M_2$ und $R_1 \geq R_2$:

1. halbiere die Strecke $\overline{M_1M_2}$ und erhalte den Punkt A ;
2. ziehe einen Kreis ω_T um A mit Radius $\overline{M_1A}$;
3. ziehe einen Kreis $\omega_{1,-}$ um M_1 mit Radius $R_1 - R_2$;
4. bestimme die Schnittpunkte $\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} := \omega_{1,-} \cap \omega_T$;
5. definiere Geraden $g_- := M_2Q_{1,-}$ und $g'_- := M_2Q'_{1,-}$ (wenn $M_2 = Q_{1,-}$ sein sollte, dann setzen wir g_- als Senkrechte zu M_1M_2 durch M_2 , analog g'_-);
6. verschiebe g_- senkrecht zu g_- um die Verschiebungsweite R_2 weg von M_1 . Dabei wird die Strecke $\overline{M_2Q_{1,-}}$ auf die Strecke $\overline{P_{2,-}P_{1,-}}$ abgebildet. Taufe $t_- := P_{2,-}P_{1,-}$. Analog t'_- ;
7. ziehe einen Kreis $\omega_{1,+}$ um M_1 mit Radius $R_1 + R_2$;
8. bestimme die Schnittpunkte $\{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\} := \omega_{1,+} \cap \omega_T$;
9. definiere Geraden $g_+ := M_2Q_{1,+}$ und $g'_+ := M_2Q'_{1,+}$ (wenn $M_2 = Q_{1,+}$ sein sollte, dann setzen wir g_+ als Senkrechte zu M_1M_2 durch M_2 , analog g'_+);
10. verschiebe g_+ senkrecht zu g_+ um die Verschiebungsweite R_2 hin zu M_1 . Dabei wird die Strecke $\overline{M_2Q_{1,+}}$ auf die Strecke $\overline{P_{2,+}P_{1,+}}$ abgebildet. Taufe $t_+ := P_{2,+}P_{1,+}$. Analog t'_+ .

Schritt 3: Satz: Jede im Schritt 2 konstruierte Gerade t bzw. t_{\pm}, t'_{\pm} ist tatsächlich eine gemeinsame Tangente der Kreise ω_1 und ω_2 .

Beweis. **Fall A:** es ist $t \perp M_1P = M_2P$ nach Konstruktion, und es ist $P \in \omega_1 = \omega_2$ nach Wahl von P . Nach Lemma 4.10 (Teil 2) ist dann t eine Tangente von ω_1 und ω_2 .

¹das ist die Idee, für die es kein Rezept gibt !

Fall C: Es geht g_- konstruktionsgemäß durch M_2 . Es ist t_- das Bild von g_- unter der senkrechten Parallelverschiebung um die Verschiebungsweite R_2 . Also ist t_- Tangente an ω_2 .

Weiterhin ist $g_- = M_2Q_{1,-} \perp M_1Q_{1,-}$ wegen des Thalesatzes am Kreis ω_T . Die Verschiebungsrichtung ist $M_1Q_{1,-}$, und $Q_{1,-}$ hat das Bild $P_{1,-}$. Also sind die drei Punkte $M_1, Q_{1,-}, P_{1,-}$ kollinear mit $Q_{1,-}$ zwischen M_1 und $P_{1,-}$. Dann ist $g_- \perp M_1P_{1,-}$, also auch $t_- \perp M_1P_{1,-}$ wegen $g_- \parallel t_-$. Weiterhin ist $|M_1P_{1,-}| = |M_1Q_{1,-}| + |Q_{1,-}P_{1,-}| = (R_1 - R_2) + R_2 = R_1$, also ist $P_{1,-} \in \omega_1$. Wegen Lemma 4.10 (Teil 2) ist dann t_- eine Tangente an ω_1 .

Die restlichen Geraden t'_-, t_+, t'_+ werden analog diskutiert.

□

Schritt 4: Determination:

Fall A: es gibt unendlich viele gemeinsame Tangenten;

Fall B: es gibt keine gemeinsamen Tangenten;

Fall C: die Kreise $\omega_{1,+}$ und $\omega_{1,-}$ haben definitionsgemäß den Mittelpunkt M_1 . Der Kreis ω_T hat definitionsgemäß den Mittelpunkt A . Weil A der Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$ ist, und weil $M_1 \neq M_2$ vorausgesetzt wurde, ist $A \neq M_1$. Also haben die Kreise $\omega_{1,-}$ und ω_T zwei verschiedene Mittelpunkte und somit höchstens zwei verschiedene Schnittpunkte.

Es entstehen folgende fünf Unterfälle für die Mächtigkeit der Menge $\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}$:

Fall α : $\#\left(\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}\right) = 0$: es gibt keine gemeinsame Tangente;

Fall β : $\#\left(\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}\right) = 1$: es gibt genau eine gemeinsame Tangente;

Fall γ : $\#\left(\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}\right) = 2$: es gibt genau zwei gemeinsame Tangenten;

Fall δ : $\#\left(\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}\right) = 3$: es gibt genau drei gemeinsame Tangenten;

Fall ε : $\#\left(\{Q_{1,-}, Q'_{1,-}\} \cup \{Q_{1,+}, Q'_{1,+}\}\right) = 4$: es gibt genau vier gemeinsame Tangenten.

Diese fünf Unterfälle treten auf in folgenden Situationen:

Fall α : $R_1 - R_2 > |M_1M_2|$.

Fall β : $R_1 - R_2 = |M_1M_2|$.

Fall γ : $R_1 - R_2 < |M_1M_2| < R_1 + R_2$.

Fall γ : $R_1 - R_2 < |M_1M_2| = R_1 + R_2$.

Fall ε : $R_1 + R_2 < |M_1M_2|$.

Damit ist die Aufgabe (fast) vollständig gelöst.

Übungsaufgabe 1.2. Man zeige logisch präzise, warum es im Fall B keine gemeinsamen Tangenten geben kann. (Eine Argumentation nach dem Motto „Sieht man doch anhand folgender Skizze“ würde das Lernziel verfehlen. Außerdem darf eine geometrische Argumentation sich nicht auf einer Skizze abstützen.)

Eines der fortgeschrittenen Konstruktionsprobleme der griechischen Antike war das Berührungsproblem des APPOLONIUS: gegeben sind drei verschiedene Kreise in der Ebene, und dann sollen alle diejenigen Kreise konstruiert werden (mit Zirkel und Lineal), die jeden der drei gegebenen Kreise in genau einem Punkt berühren. Das Ausarbeiten des hier vorgeführten vierstufigen Konstruktionschemas dauert dann vermutlich mehrere Wochen; und wir werden es in Abschnitt 4.9 mit einigen wenigen Ideen bewenden lassen.

Kapitel 2

Klassifikation der Bewegungen in der Ebene und im Raum

2.1 Vorbemerkungen

Definition 2.1. Es ist \mathcal{F} eine Bewegung im \mathbb{R}^n genau dann, wenn \mathcal{F} eine bijektive Abbildung des \mathbb{R}^n auf sich ist, die streckenlängentreu ist (kurz: längentreu) und geradentreu (also Geraden bijektiv auf Geraden abbildet).

Unser Ziel ist es, alle Bewegungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 zu finden.

Lemma 2.2. Die Menge aller Bewegungen im \mathbb{R}^n , ausgestattet mit \circ als der Nacheinanderausführung (Komposition), ist eine Gruppe.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 2.3. Jede Bewegung \mathcal{F} im \mathbb{R}^n ist teilverhältnistreue, das bedeutet: seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden, wobei C zwischen A und B liegt. Dann gilt für die Bildpunkte $A' := \mathcal{F}(A)$, $B' := \mathcal{F}(B)$, $C' := \mathcal{F}(C)$, daß C' auf der Geraden $A'B'$ zwischen A' und B' liegt, und es teilt C' die Strecke $A'B'$ im gleichen Verhältnis, wie C die Strecke AB teilt:

$$|C'A'| : |B'C'| = |CA| : |BC|.$$

Beweis. Wir haben, aus der Längentreue von \mathcal{F} , daß $|C'A'| = |CA|$, $|B'A'| = |BA|$, sowie $|B'C'| = |BC|$. Damit bleibt nur noch zu zeigen, daß C' zwischen A' und B' liegt. Das folgt aber aus der Dreiecksungleichung: Es ist $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{C'B'}$ und damit auch

$$|\overrightarrow{A'B'}| \leq |\overrightarrow{A'C'}| + |\overrightarrow{C'B'}|. \tag{2.1}$$

Andererseits wissen wir aber, daß $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|$, denn C liegt zwischen A und B . Also muß in (2.1) das Gleichheitszeichen gelten, und das ist nur möglich, wenn C' zwischen A' und B' liegt. □

Wenn C in der Mitte von A und B liegt, ist das Teilverhältnis also Eins.

Satz 2.4. Jede Bewegung \mathcal{A} im \mathbb{R}^n mit $\mathcal{A}(0) = 0$ ist eine lineare Abbildung des Vektorraums \mathbb{R}^n auf sich.

Beweis. Es ist zu zeigen:

- $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}(u)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $u \in \mathbb{R}^n$,
- $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind 0 , u und λu auf einer Geraden. Also sind auch $\mathcal{A}(0)$, $\mathcal{A}(u)$ und $\mathcal{A}(\lambda u)$ auf einer Geraden.

Wenn nun $\lambda > 1$ ist, dann liegt u zwischen 0 und λu , also liegt (wegen der Teilverhältnistreue) auch $\mathcal{A}(u)$ zwischen $\mathcal{A}(0)$ und $\mathcal{A}(\lambda u)$. Weiterhin teilt u die Strecke von 0 zu λu im Verhältnis $1 : (\lambda - 1)$, also teilt $\mathcal{A}(u)$ die Strecke von $0 = \mathcal{A}(0)$ zu $\mathcal{A}(\lambda u)$ auch im Verhältnis $1 : (\lambda - 1)$, also $\mathcal{A}(\lambda u) = \lambda \mathcal{A}(u)$, für beliebige $u \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 1$.

Die weiteren Fälle $0 \leq \lambda \leq 1$, $-1 \leq \lambda < 0$ und $\lambda < -1$ lassen sich analog behandeln.

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt. Wir betrachten dazu das Dreieck mit den Eckpunkten 0 , u , v .

Nach dem ersten Beweisteil ist

$$\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}\left(2 \cdot \frac{u + v}{2}\right) = 2 \cdot \mathcal{A}\left(\frac{u + v}{2}\right).$$

Nun liegen u , v und $\frac{1}{2}(u + v)$ auf einer Geraden, also liegen auch $\mathcal{A}(u)$, $\mathcal{A}(v)$ und $\mathcal{A}(\frac{1}{2}(u + v))$ auf einer Geraden. Genauer: $\frac{1}{2}(u + v)$ liegt in der Mitte der Strecke von u nach v , also liegt $\mathcal{A}(\frac{1}{2}(u + v))$ in der Mitte der Strecke von $\mathcal{A}(u)$ nach $\mathcal{A}(v)$.

Es ist also

$$\mathcal{A}\left(\frac{u + v}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v),$$

was den Beweis der Additivität von \mathcal{A} vollendet. □

Satz 2.5. Jede Bewegung \mathcal{A} im \mathbb{R}^n mit $\mathcal{A}(0) = 0$ wird erzeugt von genau einer orthogonalen Matrix C : $\mathcal{A}(x) = Cx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und $C^\top C = I$.

Beweis. Jede lineare Abbildung im \mathbb{R}^n wird von genau einer $n \times n$ -Matrix erzeugt. Also existiert genau ein $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathcal{A}(u) = Cu$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$.

Für beliebige $u, v \in \mathbb{R}^n$ haben wir dann, wegen der Längentreue,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\|C(u + v)\|^2 - \|Cu\|^2 - \|Cv\|^2 \right) = \langle Cu, Cv \rangle \\ &= \langle C^\top Cu, v \rangle. \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, daß für jegliche $u, v \in \mathbb{R}^n$ die Identität

$$\langle Iu, v \rangle = \langle C^\top Cu, v \rangle$$

gilt. Dann muß $I = C^\top C$ sein (Übungsaufgabe). Also ist C tatsächlich orthogonal. □

Theorem 2.6. Jede Bewegung \mathcal{F} im \mathbb{R}^n hat die Form

$$\mathcal{F}(x) = Cx + b,$$

mit $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C^\top C = I$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

Dabei sind C und b eindeutig durch \mathcal{F} bestimmt.

Jede Abbildung dieser Form ist eine Bewegung.

Beweis. Der Beweis der dritten Behauptung ist als Übungsaufgabe zu verstehen.

Insbesondere ist demzufolge jede Verschiebung $x \mapsto x + b$ eine Bewegung.

Nimm $b = -\mathcal{F}(0)$. Dann ist auch

$$x \mapsto \mathcal{A}(x) := \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)$$

eine Bewegung, denn die Bewegungen bilden (mit $\circ =$ Komposition) eine Gruppe.

Wegen $\mathcal{A}(0) = 0$ existiert dann genau ein orthogonales C mit $\mathcal{A}(x) = Cx$. Wir haben also $\mathcal{F}(x) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{F}(0) = Cx + \mathcal{F}(0)$, was die gewünschte Form hat.

Die Matrix C und der Vektor b sind eindeutig durch \mathcal{F} bestimmt, denn sei $Cx + b = C'x + b'$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Wir testen diese Identität mit $x = 0$ und erhalten $b = b'$. Also $Cx = C'x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, und demnach $C = C'$. □

Bemerkung 2.7. Es ist $1 = \det(I) = \det(C^\top C) = \det(C^\top) \det(C)$, und auch $\det(C^\top) = \det(C)$, also $\det C \in \{+1, -1\}$.

Wenn $\det C = -1$, dann ändert \mathcal{F} die Orientierung des \mathbb{R}^n , und wenn $\det C = +1$, dann bewahrt \mathcal{F} die Orientierung des \mathbb{R}^n . In diesen beiden Fällen reden wir von eigentlichen bzw. uneigentlichen Bewegungen.

Wir erinnern daran, daß die Determinante einer Matrix gleich dem orientierten Volumen des von den Spalten dieser Matrix aufgespannten n -dimensionalen Spats ist.

2.2 Der Fall $n = 2$

Es ist $C^\top C = I$, also $C^{-1} = C^\top$, und

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} c_{22} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{11} \end{pmatrix}.$$

Wenn nun $\det C = +1$, dann ist $c_{22} = c_{11}$ und $c_{12} = -c_{21}$, und es hat C also die Form

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Wenn andererseits $\det C = -1$, dann ist $c_{22} = -c_{11}$ und $c_{12} = c_{21}$, also hat C die Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen ist $c_1^2 + c_2^2 = 1$, wegen $|\det C| = 1$.

Weiterhin hat \mathcal{F} die Form $\mathcal{F}(x) = Cx + b$, mit einem der beiden eben genannten C .

Nun ist $x \in \mathbb{R}^2$ ein Fixpunkt von \mathcal{F} genau dann wenn $(C - I)x = -b$. Um das Lösbarkeitsverhalten dieses Gleichungssystems zu untersuchen, unterscheiden wir drei Fälle.

Fall 1: $\text{rang}(C - I) = 0$

Das passiert genau für $C = I$. Offensichtlich ist dann $\lambda = 1$ ein Eigenwert von C der Vielfachheit 2 (für orthogonale Matrizen stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit von Eigenwerten überein).

Fall 1a: $\text{rang}(C - I, b) = 0$

Das ist äquivalent zu $b = 0$, also ist \mathcal{F} die identische Abbildung.

Fall 1b: $\text{rang}(C - I, b) = 1$

Das ist äquivalent zu $b \neq 0$, also hat \mathcal{F} keinen Fixpunkt, und es ist \mathcal{F} eine Verschiebung.

Fall 2: $\text{rang}(C - I) = 1$

Dann ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von C der Vielfachheit 1.

Fall 2a: $\text{rang}(C - I, b) = 1$

Dann hat \mathcal{F} als Fixpunktmenge eine Gerade.

Fall 2b: $\text{rang}(C - I, b) = 2$

Dann hat \mathcal{F} keinen Fixpunkt.

Fall 3: $\text{rang}(C - I) = 2$

Dann ist zwangsläufig auch $\text{rang}(C - I, b) = 2$, und \mathcal{F} hat genau einen Fixpunkt.

Zu Fall 1 ist nichts weiter zu erzählen, und jetzt wenden wir uns Fall 2 im Einzelnen zu.

Lemma 2.8. Für Bewegungen \mathcal{F} der Form $\mathcal{F}(x) = Cx + b$ im \mathbb{R}^2 sind äquivalent:

1. $\text{rang}(C - I) = 1$,
2. $\det C = -1$,
3. C hat die Eigenwerte $+1$ und -1 .

Beweis.

1. \implies 2.

Angenommen, es wäre $\det C = +1$. Dann hat C die Gestalt (2.2), und es ist (wegen $\text{rang}(C - I) < 2$)

$$\begin{aligned} 0 = \det(C - I) &= \det \begin{pmatrix} c_1 - 1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 - 1 \end{pmatrix} = (c_1 - 1)^2 + c_2^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2c_1 + 1 \\ &= 2 - 2c_1, \end{aligned}$$

also $c_1 = 1$, und dann ist $c_2 = 0$ wegen $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Also ist $C = I$, und folglich $\text{rang}(C - I) = 0$, im Widerspruch zur Annahme $\text{rang}(C - I) = 1$.

Damit muß dann $\det C = -1$ sein.

2. \implies 3.

Die Eigenwerte von C sollen λ_1 und λ_2 heißen. Es ist $-1 = \det C = \lambda_1 \lambda_2$. Weil die Matrix C orthogonal ist, sind die λ_j komplexe Zahlen mit Betrag gleich eins.

Wenn $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ wäre, dann wäre $\overline{\lambda_1}$ ebenfalls eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, denn dessen Koeffizienten sind reell. Weil C insgesamt nicht mehr als 2 Eigenwerte haben kann, muß dann $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ sein, und es folgt $\lambda_1 \lambda_2 = |\lambda_1|^2 = 1$, im Widerspruch zu $-1 = \lambda_1 \lambda_2$.

Also ist es unmöglich, daß $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$. Aus $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $|\lambda_1| = 1$ folgt dann $\lambda_1 \in \{-1, 1\}$. Und $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ bringt uns schließlich $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-1, 1\}$.

3. \implies 1.

Es ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert, also folgt $\det(C - I) = \det(C - 1 \cdot I) = 0$, also ist $\text{rang}(C - I) \leq 1$.

Wenn nun $\text{rang}(C - I) = 0$ wäre, dann wäre $C - I$ die Nullmatrix, also $C = I$, also hätte C den doppelten Eigenwert $+1$; es soll aber C auch den Eigenwert -1 haben. Also kann $\text{rang}(C - I) = 0$ nicht sein.

Damit ist der Beweis des Lemmas vollendet. □

Für den Fall 2 ergeben sich damit einige Folgerungen und geometrische Interpretationen:

- Die Matrix C besitzt ein Paar von orthogonalen Eigenvektoren (denn für jede orthogonale Matrix stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander).
- Bezüglich dieser Eigenvektoren (normiert auf Länge 1) hat die Abbildungsmatrix C die Gestalt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

also haben wir dann auch

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

und nach einer Verschiebung des Ursprungs gemäß $x'_1 := x_1$, $x'_2 := x_2 - \frac{1}{2}b_2$ wird dann die Abbildungsgleichung zu

$$\mathcal{F}'(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Wenn nun $b_1 = 0$, dann ist \mathcal{F}' eine Spiegelung an der x'_1 -Achse, und diese Achse ist eine Fixpunktgerade.
- Wenn andererseits $b_1 \neq 0$, dann ist \mathcal{F} die Komposition einer Spiegelung an der x'_1 -Achse und einer Verschiebung entlang dieser Achse um die Länge b_1 . Eine solche Abbildung heißt *Schubspiegelung* und hat keine Fixpunkte.

Es folgt die Diskussion von Fall 3.

Lemma 2.9. Für Bewegungen \mathcal{F} der Form $\mathcal{F}(x) = Cx + b$ im \mathbb{R}^2 sind äquivalent:

1. $\text{rang}(C - I) = 2$,
2. $\det C = 1$ und $c_1 \neq 1$.

Beweis.

1. \implies 2.

Es ist $\text{rang}(C - I) = 2$, also $\text{rang}(C - I) \neq 1$, und auf Grund von Lemma 2.8 ist dann $\det C \neq -1$, also $\det C = 1$, und somit hat C die Form (2.2). Wir haben auch $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Wenn $c_1 = 1$ wäre, dann folgte daraus $c_2 = 0$, also $C = I$, und dann auch $\text{rang}(C - I) = 0$. Also kann $c_1 = 1$ nicht sein.

2. \implies 1.

Es ist $\det C = 1$, also $\det C \neq -1$, also auf Grund von Lemma 2.8 auch $\text{rang}(C - I) \neq 1$. Wenn nun $\text{rang}(C - I) = 0$ wäre, dann folgte $C = I$, also $c_1 = 1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also bleibt nur $\text{rang}(C - I) = 2$ als einzige Möglichkeit übrig.

Damit ist der Beweis vollendet. □

Wir kommen zu Folgerungen und zu geometrischen Interpretationen von Fall 3.

- Seien e_1 und e_2 die kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^2 , und wir setzen $\tilde{e}_1 := Ce_1$, $\tilde{e}_2 := Ce_2$. Dann haben wir

$$\langle e_1, \tilde{e}_1 \rangle = \langle e_1, Ce_1 \rangle = c_1 < 1,$$

und analog $\langle e_2, \tilde{e}_2 \rangle = c_1 < 1$. Wegen $c_1^2 + c_2^2 = 1$ finden wir eine Zahl $\alpha \in (0, 2\pi)$ mit $c_1 = \cos \alpha$ und $c_2 = \sin \alpha$. Dieses α ist eindeutig durch c_1 und c_2 bestimmt, und α ist gleich dem Winkel zwischen e_j und \tilde{e}_j . Ein solches α wird „Drehwinkel“ genannt.

- Für jedes $u \in \mathbb{R}^2$ ist der Winkel zwischen u und Cu gleich α .
- Das gilt insbesondere für jeden Vektor $u = \overrightarrow{P_0P_1}$, wobei P_0 der eindeutig bestimmte Fixpunkt von \mathcal{F} ist. Diese Bewegung \mathcal{F} ist dann eine Drehung um den Winkel der Größe α um die „Achse“ P_0 .

2.3 Der Fall $n = 3$

Wir haben $C^\top C = I$ und $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Das charakteristische Polynom $\lambda \mapsto \det(C - \lambda I)$ ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten und Grad drei, also hat dieses Polynom eine reelle Nullstelle λ_1 . Weil C orthogonal ist, gilt $|\lambda_1| = 1$, und somit $\lambda_1 \in \{-1, +1\}$.

Sei $Cu_1 = \lambda_1 u_1$ mit $\|u_1\| = 1$. Wir ergänzen u_1 zu einer ONB des \mathbb{R}^3 durch Vektoren u_2 und u_3 . Bezüglich dieser Basis hat dann \mathcal{F} die Darstellung

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

mit einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad M^\top M = I_2.$$

Jeder Eigenvektor (aus dem \mathbb{R}^2) der Matrix M wird zu einem Eigenvektor (aus dem \mathbb{R}^3) von C , wenn man an der ersten Stelle eine Null anfügt.

Die Suche nach Fixpunkten von \mathcal{F} führt uns auf das übliche Gleichungssystem $(C - I)x = -b$, für dessen Diskussion wir wieder Fälle unterscheiden.

Fall 1: $\text{rang}(C - I) = 0$

Das passiert genau für $C = I$.

Fall 1a: $\text{rang}(C - I, b) = 0$

Das ist äquivalent zu $b = 0$, und dann ist \mathcal{F} die identische Abbildung.

Fall 1b: $\text{rang}(C - I, b) = 1$

Das ist äquivalent zu $b \neq 0$, und dann ist \mathcal{F} eine Verschiebung (ohne Fixpunkte).

Fall 2: $\text{rang}(C - I) = 1$

Dann ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von C mit der Vielfachheit zwei.

Fall 2a: $\text{rang}(C - I, b) = 1$

Die Abbildung \mathcal{F} besitzt eine ganze Ebene von Fixpunkten.

Fall 2b: $\text{rang}(C - I, b) = 2$

Die Abbildung \mathcal{F} besitzt keinen Fixpunkt.

Fall 3: $\text{rang}(C - I) = 2$

Dann ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von C mit der Vielfachheit eins.

Fall 3a: $\text{rang}(C - I, b) = 2$

Die Abbildung \mathcal{F} besitzt eine Gerade von Fixpunkten.

Fall 3b: $\text{rang}(C - I, b) = 3$

Die Abbildung \mathcal{F} hat keinen Fixpunkt.

Fall 4: $\text{rang}(C - I) = 3$

Dann ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert von C , und \mathcal{F} hat genau einen Fixpunkt.

Wir beginnen die Diskussion mit Fall 2.

Das Produkt der Eigenwerte ist gleich der Determinante. Die Matrix C hat $\lambda = 1$ als doppelten Eigenwert, und $\det C = \pm 1$, sodaß der dritte Eigenwert gleich -1 sein muß. Damit hat bezüglich einer geeigneten Basis C die Form

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und wir bekommen demnach (in diesen neuen Koordinaten)

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir verschieben den Ursprung um den Vektor $(0, 0, b_3/2)^\top$, und nach dieser Verschiebung $x \mapsto x'$ lautet die Bewegungsgleichung also

$$\mathcal{F}'(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn nun $b_1 = b_2 = 0$, dann bewirkt \mathcal{F} eine Spiegelung an der Ebene $x'_3 = 0$.

Wenn andererseits $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$, dann ist \mathcal{F} eine Schubspiegelung parallel zur Spiegelebene $x'_3 = 0$.

Es folgt die Diskussion von Fall 3.

Jetzt ist $\lambda = 1$ ein einfacher Eigenwert von C . Damit ist also

$$C - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} - 1 & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} - 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\text{rang}(C - I) = 2$ hat also $M - I_2$ vollen Rang, also $\det(M - I_2) \neq 0$, also ist 1 kein Eigenwert von M . Weiterhin ist $M^\top M = I_2$. Wir wenden Lemma 2.9 für die Matrix M (anstatt C) an und erhalten, daß $\det M = +1$ und $m_{11} < 1$. Wie in der entsprechenden Diskussion für $n = 2$ kommen wir zu

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Dann erzeugt M eine Drehung im \mathbb{R}^2 um einen Punkt. Wenn wir diesen (ergänzt um die Zahl 0 als erster Komponente) als Ursprung des Koordinatensystems nehmen, dann bekommt \mathcal{F} die Gestalt

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn $b_1 = 0$, dann ist \mathcal{F} eine Drehung um die Achse $x_2 = x_3 = 0$.

Wenn $b_1 \neq 0$, dann ist \mathcal{F} zusammengesetzt aus einer Drehung um die Achse $x_2 = x_3 = 0$ und einer Verschiebung parallel zur der Achse $x_2 = x_3 = 0$ um die Länge b_1 . Man spricht von einer *Schraubung*.

Es verbleibt die Diskussion von Fall 4.

Jetzt ist $\lambda = 1$ kein Eigenwert von C . Also muß $\lambda = -1$ ein Eigenwert sein, denn es muß wenigstens einen reellen Eigenwert für die Matrix C geben. Damit haben wir also

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad M^\top M = I_2.$$

Wenn $\det M = -1$ wäre, dann hätte (wegen Lemma 2.8) M die Eigenwerte $+1$ und -1 , also wäre $M - 1 \cdot I_2$ singulär, und demnach $+1$ ein Eigenwert von C , was ein Widerspruch ist. Also muß $\det M = +1$ sein, und $+1$ kann kein Eigenwert von M sein. Also ist $0 \neq \det(M - 1 \cdot I_2) = \det(M - I_2)$, und mit Lemma 2.9 folgt dann $m_{11} < 1$, und auf dem mittlerweile bekannten Wege entsteht dann

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Weiterhin haben wir, wie immer, $\mathcal{F}(x) = Cx + b$.

Sei (c_2, c_3) der Mittelpunkt der von M und $(b_2, b_3)^\top$ beschriebenen Drehung im \mathbb{R}^2 . Wir wählen dann $(\frac{1}{2}b_1, c_2, c_3)^\top$ als Ursprung unseres Koordinatensystems, und nach dieser Verschiebung wird die Abbildungsgleichung zu

$$\mathcal{F}'(x') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} x'.$$

Demnach beschreibt \mathcal{F}' eine Drehung um die Gerade $x'_2 = x'_3 = 0$, komponiert mit einer Spiegelung an der Ebene $x'_1 = 0$. Diese Abbildung nennt man *Drehspiegelung*. Ihr einziger Fixpunkt ist der Schnittpunkt der Drehachse mit der Spiegelungsebene.

2.4 Weiterführende Aspekte ✨

Satz 2.10. *Jede Bewegung der Ebene kann als Nacheinanderausführung von maximal drei Geradenspiegelungen dargestellt werden.*

Beweis. Wir geben die benötigten Geradenspiegelungen an:

identische Abbildung: Wir benutzen 0 Geradenspiegelungen.

Spiegelung: Wir benutzen 1 Geradenspiegelung.

Verschiebung: Wir benutzen 2 Geradenspiegelungen. Die dazugehörigen Geraden stehen senkrecht auf dem Verschiebungsvektor, und der Abstand der beiden parallelen Geraden ist gleich der halben Verschiebungsweite.

Drehung: Wir benutzen 2 Geradenspiegelungen. Die dazugehörigen Geraden schneiden einander im Drehzentrum, und der Winkel zwischen den beiden Geraden ist gleich dem halben Drehwinkel.

Schubspiegelung: Wir benutzen 3 Geradenspiegelungen. Eine von diesen Geraden ist gleich der Achse der Schubspiegelung, und die beiden anderen stehen senkrecht auf der Schubspiegelungsachse, mit einem Abstand von der halben Verschiebungsweite zueinander.

□

Jede Geradenspiegelung ändert die Orientierung des \mathbb{R}^2 . Bei zusammengesetzten Bewegungen bleibt die Orientierung genau dann bewahrt, wenn die Anzahl der verwendeten Geradenspiegelungen eine gerade Zahl ist.

Satz 2.11. *Jede Bewegung der Ebene kann als Nacheinanderausführung von maximal vier Spiegelungen an Ebenen dargestellt werden.*

Beweis. Übungsaufgabe.

□

Wir betrachten zum Abschluß noch weitere Abbildungen im \mathbb{R}^n . Wir haben gesehen, daß Bewegungen im \mathbb{R}^n charakterisiert sind durch die Eigenschaften der Geradentreue, Längentreue, Teilverhältnistreue (wobei die dritte aus den ersten beiden folgt).

Weitere Abbildungen sind:

affine Abbildungen: Das sind Abbildungen mit der Gleichung $\mathcal{F}(x) = Cx + b$ mit einer beliebigen Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Hierbei darf C auch singular sein, was zum Beispiel bei Parallelprojektionen tatsächlich auftritt. Affine Abbildungen bewahren die Parallelität von affinen Unterräumen des \mathbb{R}^n . Eine Gerade wird entweder bijektiv auf eine Gerade abgebildet, oder auf einen Punkt.

affine Transformationen: Das sind affine Abbildungen mit regulärer Matrix C . Diese affinen Transformationen bilden, mit \circ als Komposition, eine (nicht-abelsche) Gruppe, die *affine Gruppe*.

homogene affine Transformationen: Das sind affine Transformationen mit $b = 0$. Diese homogenen affinen Transformationen bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe.

Ähnlichkeitstransformationen: Das sind affine Transformationen $\mathcal{F}(x) = Cx + b$, wobei $C = \lambda C_1$, mit $\lambda > 0$, und C_1 ist eine orthogonale Matrix. Die Ähnlichkeitstransformationen bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe, die sogenannte *Hauptgruppe*.

eigentliche Transformationen: Das sind affine Transformationen $\mathcal{F}(x) = Cx + b$ mit $\det C > 0$. Diese bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe, und analog bilden eigentliche Ähnlichkeitstransformationen eine Untergruppe der Hauptgruppe.

Bevor wir uns noch allgemeinere Abbildungen anschauen, sollten wir den Begriff des Teilungsverhältnisses allgemeiner fassen.

Definition 2.12. *Sei $g := \{\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade im \mathbb{R}^n , und seien A, B, C drei Punkte darauf, mit zugehörigen Koordinaten t_A, t_B, t_C , und $B \neq C$. Dann definieren wir das Teilungsverhältnis des Punktes C in Bezug auf die Punkte A und B als*

$$\text{TV}(A, B; C) := \frac{t_C - t_A}{t_B - t_C}.$$

Dieses Verhältnis wird negativ sein, wenn C außerhalb der Strecke \overline{AB} liegt. Das Teilverhältnis ist gleich Eins, wenn C in der Mitte von A und B liegt. Man überzeugt sich schnell davon, daß das Teilungsverhältnis unabhängig ist von der Wahl der Vektoren \vec{x}_0 und \vec{v} , mit denen die Gerade g parametrisiert wird.

Ohne Beweis haben wir dann:

Satz 2.13. *Jede bijektive geradentreue und teilverhältnistreue Abbildung des \mathbb{R}^n auf sich ist eine affine Transformation, und umgekehrt.*

Eine affine Transformation braucht nicht winkeltreu sein. (Was macht die Abbildung $x \mapsto Cx$ aus dem Einheitsquadrat und dessen Diagonalen, wenn C die Diagonalmatrix mit den Einträgen 2 und 1 ist?). Aber es gilt folgendes:

Satz 2.14. *Jede Ähnlichkeitstransformation ist eine winkeltreue affine Transformation, und umgekehrt.*

Und schließlich haben wir noch folgende Abbildungen:

volumentreue Transformationen: Das sind affine Transformationen $\mathcal{F}(x) = Cx + b$ mit $|\det C| = 1$. Solche Abbildungen sind in der Lage, „Würfel“ auf „Spate“ abzubilden, aber ohne deren Volumina zu ändern. Die volumentreuen Transformationen bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe.

eigentliche volumentreue Transformationen: Das sind volumentreue Transformationen mit $\det C = 1$. Solche Abbildungen bewahren das Volumen und die Orientierung, und sie bilden ihrerseits eine Untergruppe der Gruppe der volumentreuen Transformationen.

All diese Gruppen ergeben die algebraische Struktur eines *Verbands*, vgl. Abbildung 2.1. Die Verbindungslinien können als Teilmengenbeziehungen interpretiert werden.

Zum Abschluß, und als Vorausschau auf das Kapitel über projektive Geometrie, skizzieren wir noch eine letzte Verallgemeinerungsmöglichkeit der affinen Transformationen.

Bekanntlich sind affine Transformationen gewisse bijektive Abbildungen im affinen Raum \mathbb{R}^n .

Im Gegensatz dazu sind *projektive Transformationen* gewisse bijektive Abbildungen im projektiven Raum \mathbb{RP}^n . Anschaulich gesprochen, erhalten wir den \mathbb{RP}^n aus dem \mathbb{R}^n durch Hinzufügen von *unendlich fernen Punkten*. Dann ist eine projektive Transformation eine bijektive geradentreue Abbildung des \mathbb{RP}^n auf sich, die *doppelverhältnistreue* ist.

Definition 2.15. *Seien A und B zwei Punkte, die eine Gerade definieren, und seien C und D zwei weitere Punkte auf dieser Geraden. Dann ist das Doppelverhältnis des Punktepaars (C, D) in Bezug auf das Punktepaar (A, B) definiert als*

$$DV(A, B; C, D) := \frac{TV(A, B; C)}{TV(A, B; D)}.$$

Jede affine Transformation kann als projektive Transformation interpretiert werden.

Die Beschreibung von Transformationen in projektiven Koordinaten hat gegenüber den affinen Koordinaten den Vorteil, daß jetzt die Abbildungsgleichungen zu $\mathcal{F}(x) = Cx$ werden, sodaß insbesondere die Verschiebungsvektoren b nicht mehr verwaltet werden müssen.

Einzelheiten dazu werden auf später vertagt.

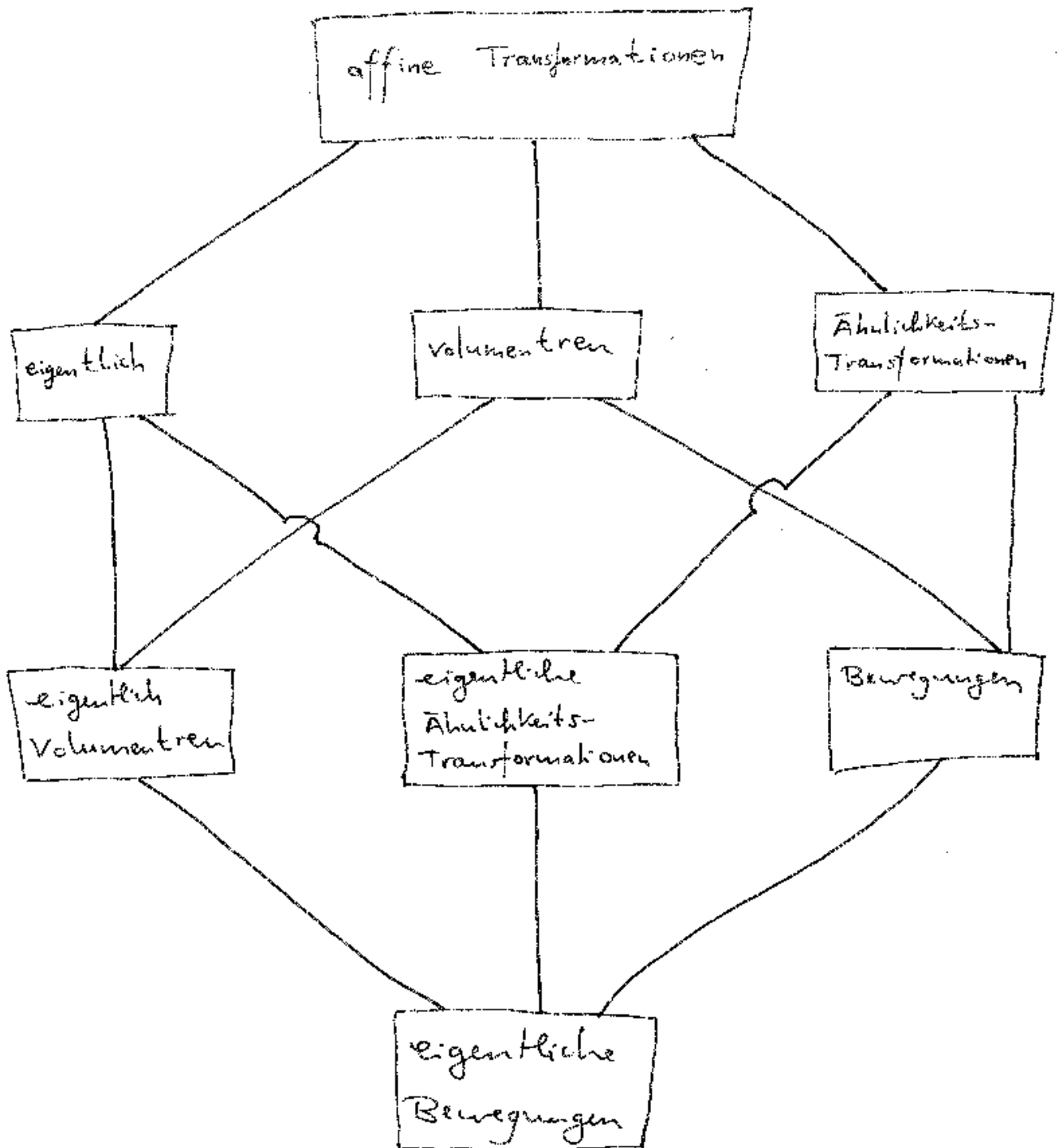


Abbildung 2.1: Der Untergruppenverband der affinen Gruppe

Kapitel 3

Kegelschnitte

3.1 Allgemeine Aspekte

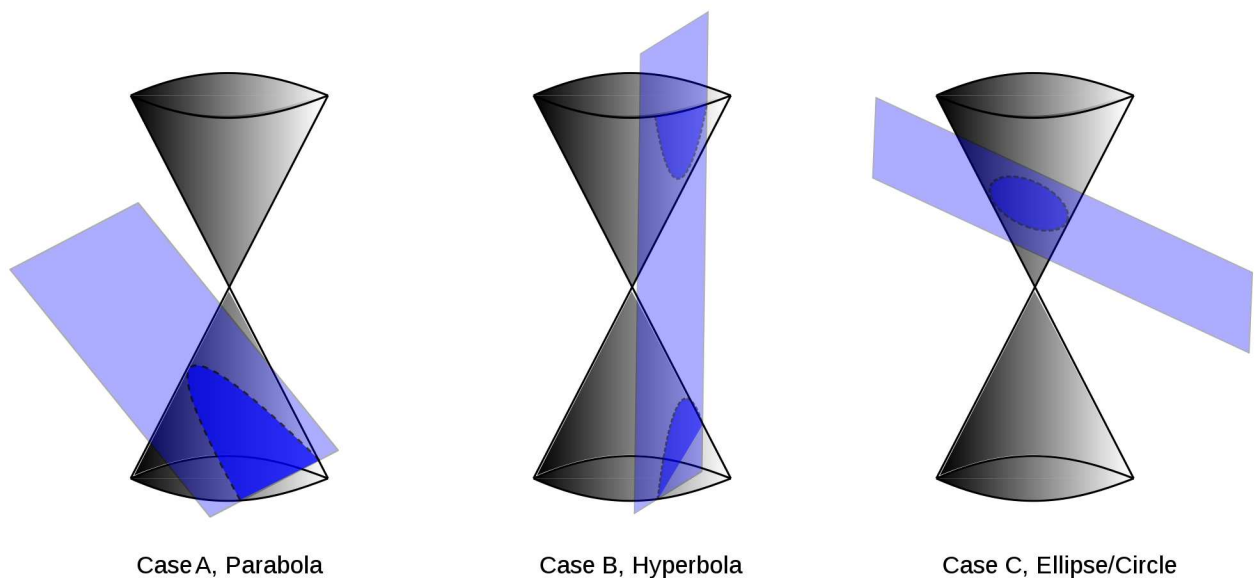


Abbildung 3.1: Schnitte eines Doppelkegels mit einer Ebene (nicht unbedingt maßstabsgerecht)

Sei Ω ein Doppelkegel:

$$\Omega := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2} \right\},$$

mit einem festen $c > 0$. Unter einem Kegel (bzw. Doppelkegel) verstehen wir also nur den Kegelmantel. Das Innere bzw. Äußere des Doppelkegels ist definiert als

$$\Omega_{\text{inn}} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < \frac{z^2}{c^2} \right\}, \quad \Omega_{\text{au\ss}} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 > \frac{z^2}{c^2} \right\},$$

und die Abschlüsse davon sind

$$\overline{\Omega_{\text{inn}}} := \Omega_{\text{inn}} \cup \Omega, \quad \overline{\Omega_{\text{au\ss}}} := \Omega_{\text{au\ss}} \cup \Omega.$$

Wenn wir jeweils einen Kegel meinen anstatt des Doppelkegels, dann reden wir von einem Einzelkegel.

Beim Schneiden des Doppelkegels Ω mit einer Schnittebene π können folgende Figuren entstehen, wie man erahnt:

- ein Punkt,
- eine Gerade,
- zwei einander schneidende Geraden,
- eine Parabel,
- eine Hyperbel,
- eine Ellipse bzw. ein Kreis.

Dies wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.

Der halbe Öffnungswinkel an der Spitze sei φ . Dann ist $\tan \varphi = 1/c$, und $0 < \varphi < 90^\circ$. Die einzige Symmetrieachse des Doppelkegels ist

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

Die Schnittebene heiße π .

Für die Lage von s und π können genau drei Fälle eintreten.

Fall 1: π enthält s

Man überlegt sich, daß dann $\Omega \cap \pi$ aus zwei einander schneidenden Geraden besteht.

Fall 2: π und s sind parallel und disjunkt:

Wir drehen das Koordinatensystem um die z -Achse geeignet, so daß $\pi = \{(x, y, z) : y = d\}$, mit einem gewissen $d > 0$. Dann ist

$$\Omega \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = d, \quad x^2 + d^2 = \frac{z^2}{c^2} \right\}.$$

Die weitere Diskussion von Fall 2 (analog zu Fall 3) sei den Studierenden überlassen. Das Ergebnis wird sein, daß $\Omega \cap \pi$ eine Hyperbel ist.

Fall 3: π und s schneiden einander in genau einem Punkte:

Dieser Punkt heiße M .

Ab jetzt verfolgen wir nur noch Fall 3. Wir ignorieren auch die Variante, daß $M = (0, 0, 0)$ wäre. Also ist ab jetzt M nicht die Spitze O des Doppelkegels, sondern echt im Kegelinneren enthalten.

Es sei \vec{n} der Einheitsnormalenvektor auf π , errichtet im Punkt M , und er soll in denjenigen Halbraum des \mathbb{R}^3 hineinzeigen, in dem die Spitze O des Doppelkegels liegt.

Fall 3.1: es ist $\vec{n} \parallel s$:

Dann hat π die Gestalt $\pi = \{(x, y, z) : z = d\}$, also ist

$$\Omega \cap \pi = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = d \right\}$$

ein Kreis.

Fall 3.2: es ist $\vec{n} \not\parallel s$:

Der Winkel zwischen \vec{n} und \overrightarrow{MO} sei ψ . Dann ist $0 < \psi < 90^\circ$.

Ab jetzt betrachten wir nur den Fall 3.2. Dann spannen \vec{n} und der Symmetrieachsenvektor \overrightarrow{MO} eine Ebene γ auf,

$$\gamma := \left\{ (x, y, z) = M + t_1 \cdot \overrightarrow{MO} + t_2 \cdot \vec{n} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Ebenen γ und π stehen aufeinander senkrecht. In γ haben wir einen von drei möglichen Fällen:

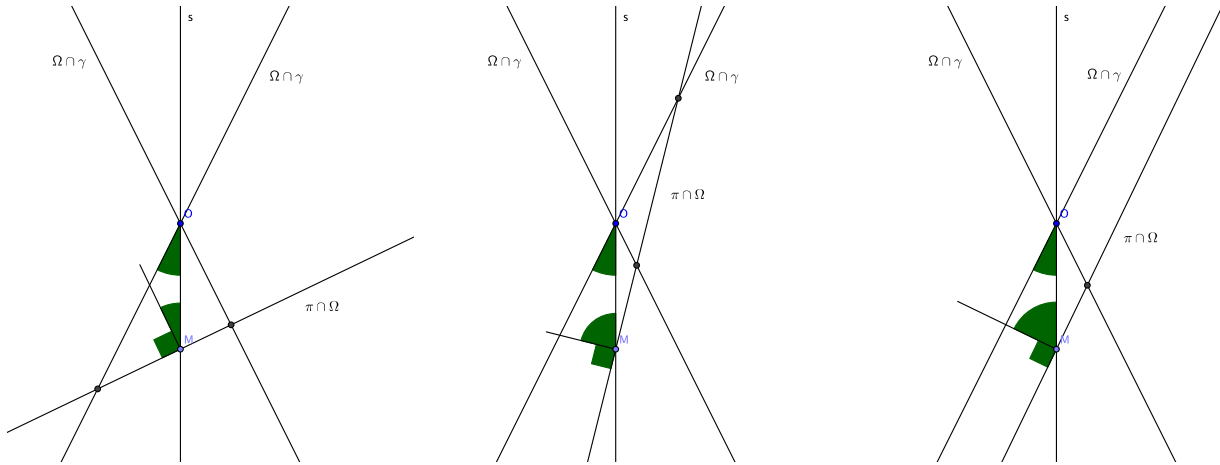


Abbildung 3.2: Ein Schnitt entlang der Ebene γ durch den Doppelkegel und die Schnittebene π erzeugt eine der drei Figuren. Von links nach rechts: der elliptische Fall ($\varphi + \psi < 90^\circ$), der hyperbolische Fall ($\varphi + \psi > 90^\circ$), der parabolische Fall ($\varphi + \psi = 90^\circ$).

Lemma 3.1. Sei Γ eine Kugel mit Mittelpunkt M_Γ auf s , die die Ebene π in genau einem Punkte F berührt. Dann ist $F \in \pi \cap \gamma$.

Beweis. Wir erhalten F durch Fällen des Lotes von M_Γ auf die Ebene π . Ein Normalenvektor der Ebene π ist aber \vec{n} . Also ist $\overrightarrow{M_\Gamma F} \parallel \vec{n}$, also liegen $\overrightarrow{M_\Gamma F}$ und \vec{n} in einer gemeinsamen Ebene. Diese enthält den Punkt M (weil er der Startpunkt von \vec{n} ist), den Punkt M_Γ , also auch $\overrightarrow{MM_\Gamma}$, also auch die Achse s . Also muß diese Ebene, die $\overrightarrow{M_\Gamma F}$ und \vec{n} enthält, gleich γ sein. Also ist $F \in \gamma$. Per Definition ist $F \in \pi$. Also ist $F \in \pi \cap \gamma$. \square

Definition 3.2. Eine Mantellinie ist eine Gerade auf dem Doppelkegel, die durch die Spitze O geht.

Lemma 3.3. Sei Γ eine Kugel mit Mittelpunkt M_Γ auf der Achse s , die eine Mantellinie von Ω berührt. Dann berührt Γ jede Mantellinie von Ω .

Beweis. Es gibt eine Drehung um die Achse s , die eine vorgegebene Mantellinie von Ω auf eine andere vorgegebene Mantellinie von Ω abbildet. Diese Drehung bildet aber auch Γ auf sich ab, denn $M_\Gamma \in s$. \square

Definition 3.4. Eine DANDELINSche Kugel Γ ist eine Kugel Γ in einem Doppelkegel Ω , die ihren Mittelpunkt M_Γ auf der Symmetrieachse s hat, jede Mantellinie von Ω berührt, und die auch die vorgegebene Schnittebene π berührt.

Es ist klar: der Schnitt einer Dandelin-Kugel mit dem Kegelmantel Ω ist ein Kreis, der in einer Ebene liegt, die senkrecht zur Achse s steht.

3.2 Der elliptische Fall 3.2.a: $\varphi + \psi < 90^\circ$

Man überlegt sich, daß es jetzt genau zwei Dandelin-Kugeln gibt. Siehe Abbildung 3.3.

Es ist F gerade der Berührungspunkt der „oberen“ Dandelin-Kugel mit π , und F' der Berührungspunkt der „unteren“ Dandelin-Kugel mit π .

Wir konzentrieren unsere Betrachtungen in diesem Fall auf einen Einzelkegel. In diesem Sinne ist dann Ω_{inn} eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^3 .

Sei C der Berührungskreis der Dandelin-Kugel Γ mit dem Kegelmantel Ω , und sei C' der Berührungskreis der Dandelin-Kugel Γ' mit dem Kegelmantel Ω . Weiterhin seien α und α' die Ebenen, in denen diese Kreise C und C' liegen. Es ergibt sich damit die Abbildung 3.3.

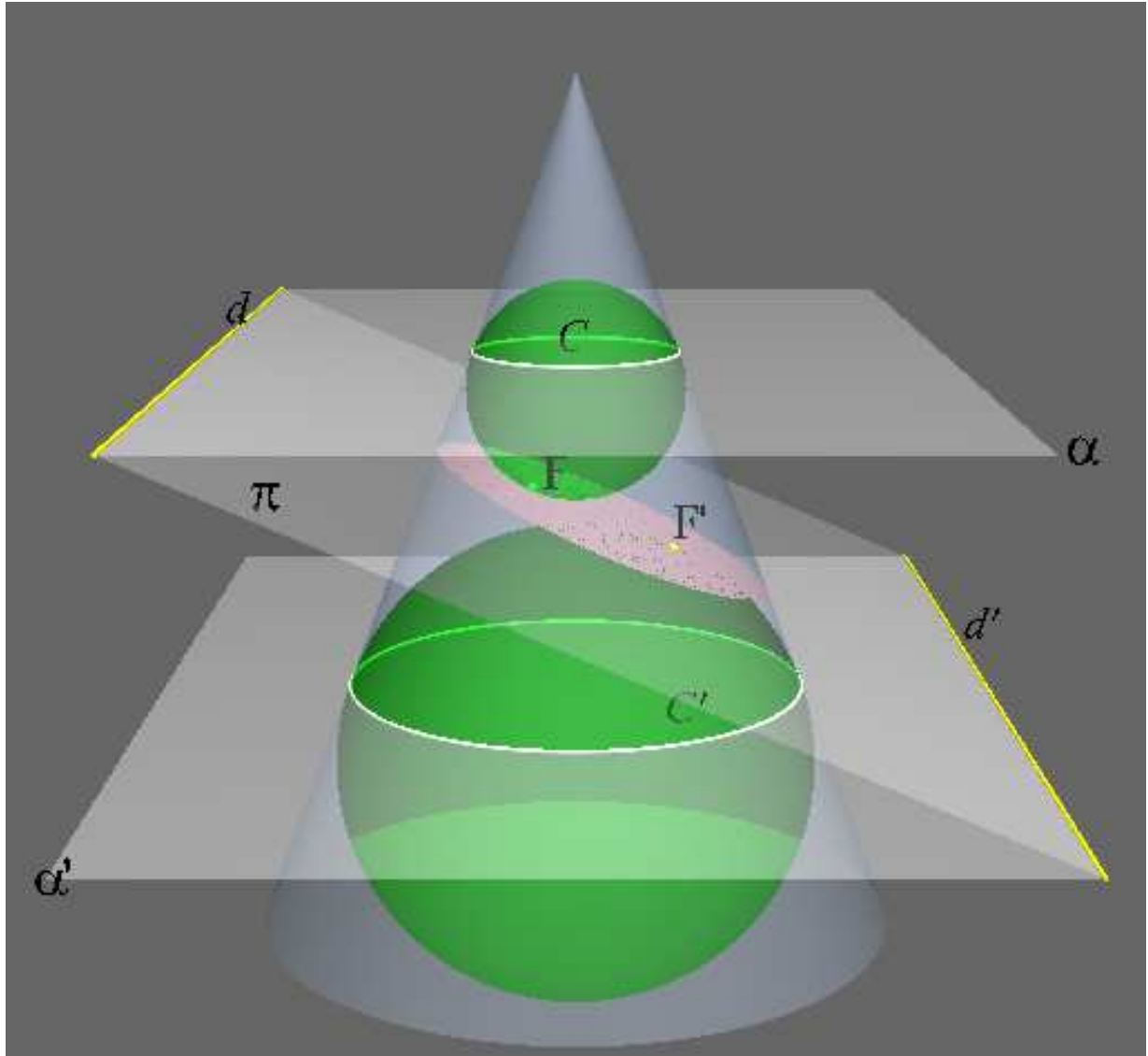


Abbildung 3.3: Ellipse als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, und die beiden DANDELINSchen Kugeln

In der Ebene γ haben wir dann das Bild 3.4. Die Gerade $\pi \cap \gamma$ schneidet zwei Mantellinien desselben Einzelkegels in den Punkten A und B , und die beiden Dandelin-Kugeln Γ und Γ' ergeben (beim Schneiden mit γ) den Inkreis und den an der Kante \overline{AB} anliegenden Ankreis des Dreiecks $\triangle OAB$. Der Inkreisberührungspunkt heiße F , der Ankreisberührungspunkt heiße F' .

Übungsaufgabe: Man zeige, daß $|AF'| = |FB|$.

Lemma 3.5. Die Punkte F und F' liegen zwischen den Ebenen α und α' .

Beweis. In Abbildung 3.4 zeige die z -Achse nach oben, wie üblich. Weil F und F' die Berührungspunkte von Inkreis und Ankreis an \overline{AB} sind, sind die z -Koordinaten von F und F' höchstens so groß wie der größere Wert der z -Koordinaten von A und B . Andererseits liegen die beiden Inkreisberührungspunkte mit den Dreiecksseiten \overline{OA} und \overline{OB} zwischen den Punkten O , A bzw. zwischen den Punkten O , B . Also haben diese beiden Inkreisberührungspunkte einen höheren Wert für die z -Koordinate als A und als B . Also liegen die Punkte A und B unterhalb der Ebene α . Also liegen auch F und F' unterhalb der Ebene α .

Analog zeigt man, daß F und F' oberhalb der Ebene α' liegen. □

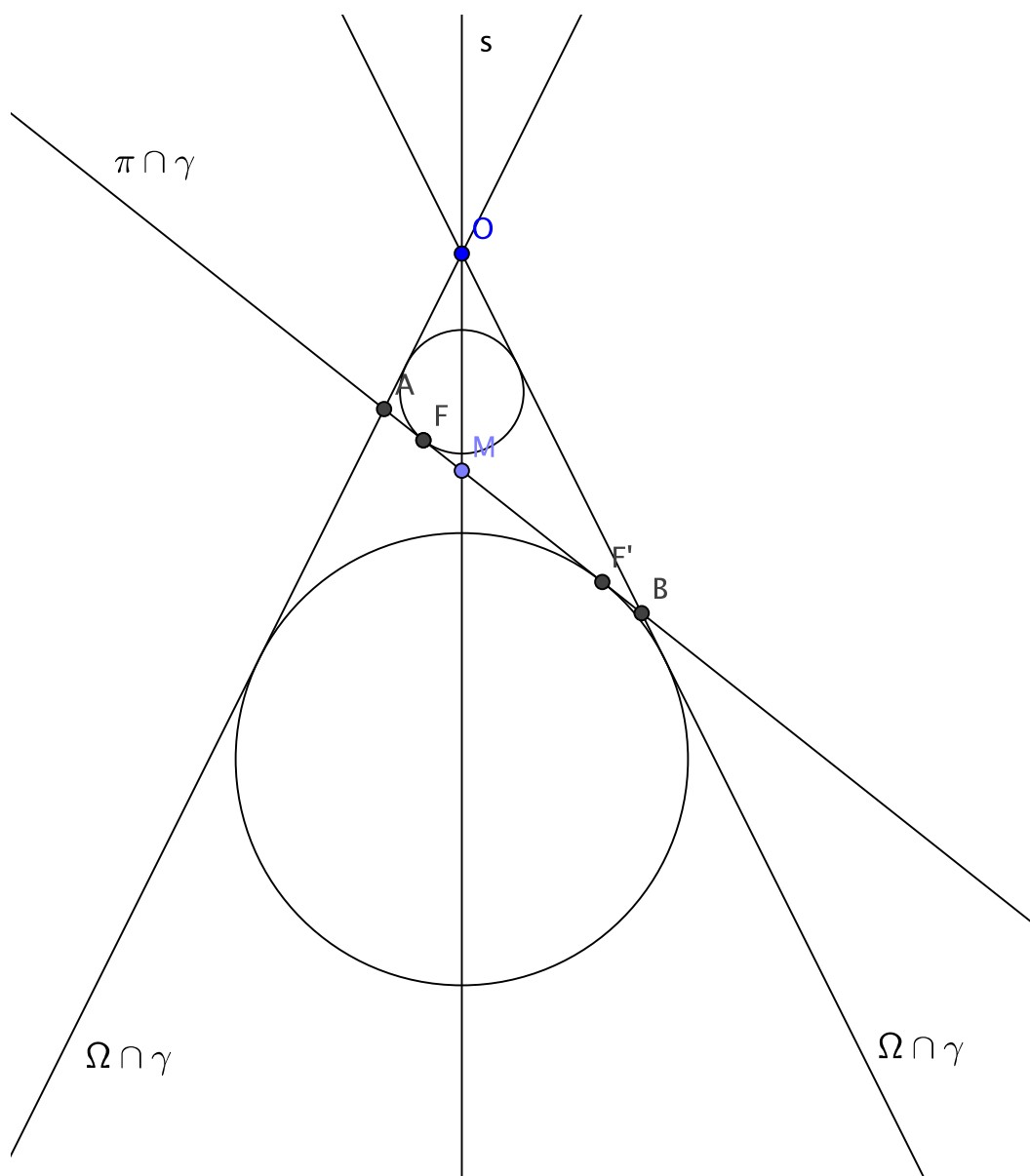


Abbildung 3.4: Schnitt durch den Doppelkegel Ω entlang der Ebene γ . Die gezeichneten Kreise sind die Schnitte der DANDELIN-Kugeln mit der Ebene γ .

Lemma 3.6. Sei $P \in \Omega$ und die Gerade PF tangential an Γ . Dann liegt P „unterhalb von“ α .

Beweis. Es ist $\overline{\Omega_{\text{inn}}}$ konvex, also liegt die Strecke \overline{PF} in Ω_{inn} (abgesehen vom Endpunkt P). Wenn P oberhalb von α wäre, dann durchstößt \overline{PF} die Ebene α , also auch das Innere des Kreises C . Also verläuft die Gerade PF teilweise im Inneren der Kugel Γ . Dann kann die Gerade PF aber keine Tangente an Γ sein. \square

Genauso kann man beweisen, daß P auch „oberhalb von“ α' liegt.

Definition 3.7. Wir definieren (falls $\varphi + \psi < 90^\circ$) die von Ω und π erzeugte Ellipse als $\Omega \cap \pi$.

Satz 3.8. Sei P ein Punkt der Ellipse. Dann ist $|PF| + |PF'|$ gleich der Länge der Mantellinienstrecke vom Kreis C bis zum Kreis C' .

Beweis. Siehe Abbildung 3.5.

Sei P ein Punkt der Ellipse, also $P \in \Omega \cap \pi$. Sei Q der Schnitt der Mantellinie OP mit C , und sei Q' der Schnitt der Mantellinie OP mit C' . Zu zeigen ist $|PF| + |PF'| = |QQ'|$.

Sei δ die Ebene durch die Mantellinie OP und den Punkt F . Der Schnitt $\delta \cap \Gamma$ ist ein Kreis. Die Gerade OP tangiert diesen Kreis (sie berührt ihn in Q), und die Gerade PF tangiert diesen Kreis ebenfalls (mit Berührungspunkt in F). Denn die Gerade PF verläuft in π , und Γ berührt π in F (genauso ist F ja definiert). Die Tangenten vom Punkt $P \in \delta$ an den Kreis $\delta \cap \Gamma$ haben also die Berührungspunkte Q und F , also ist $|PQ| = |PF|$.

Sei δ' die Ebene durch die Mantellinie OP und den Punkt F' . Der Schnitt $\delta' \cap \Gamma'$ ist ein Kreis. Die Gerade OP tangiert diesen Kreis (sie berührt ihn in Q'), und die Gerade PF' tangiert diesen Kreis ebenfalls (mit Berührungspunkt in F'). Denn die Gerade PF' verläuft in π , und Γ' berührt π in F' (genauso ist F' ja definiert). Die Tangenten vom Punkt $P \in \delta'$ an den Kreis $\delta' \cap \Gamma'$ haben also die Berührungspunkte Q' und F' , also ist $|PQ'| = |PF'|$.

Weil P zwischen Q und Q' liegt, ist dann $|QQ'| = |QP| + |PQ'| = |PF| + |PF'|$, wie gewünscht. \square

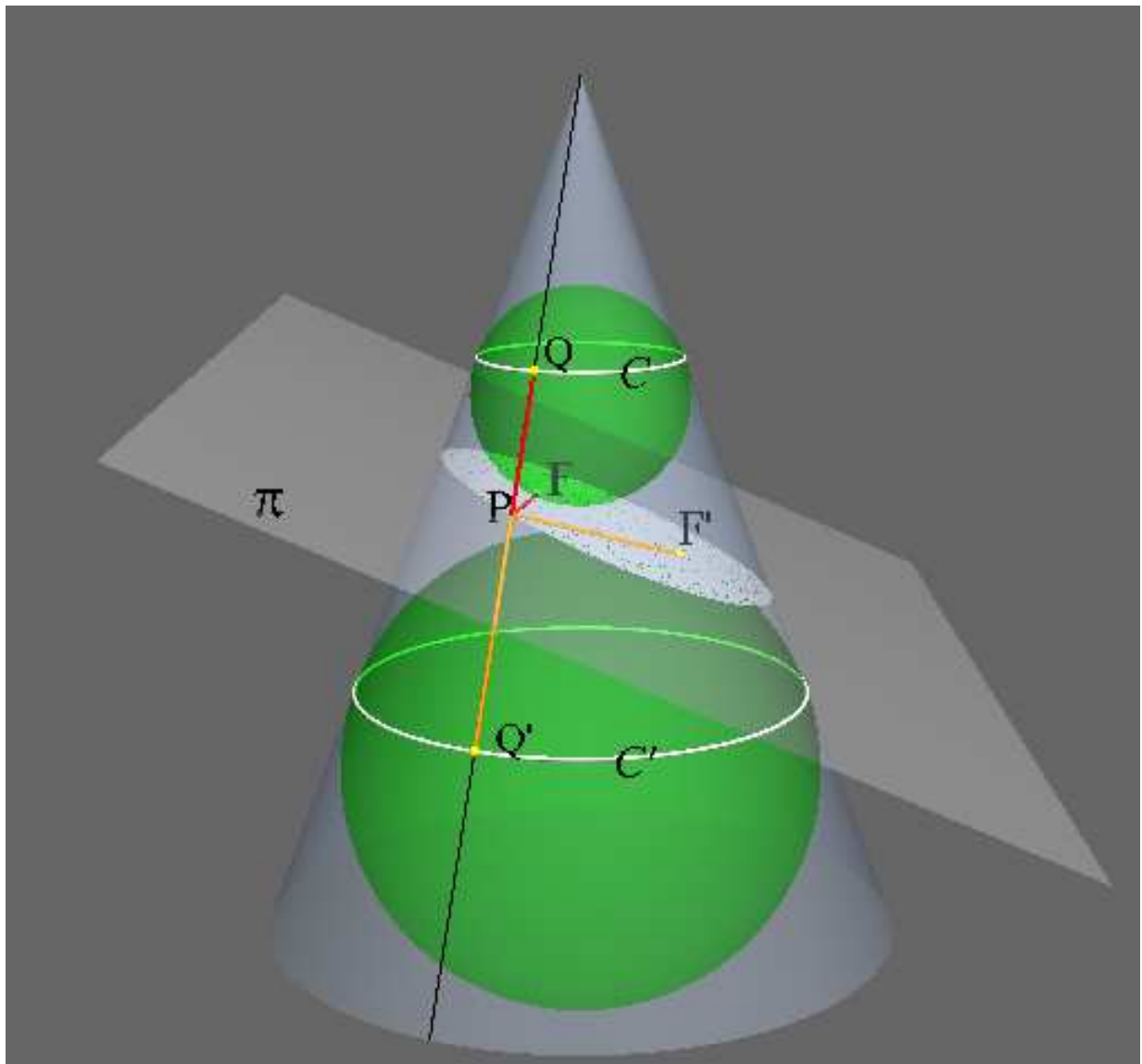


Abbildung 3.5: Zu den Brennpunkten bei der Ellipse. Es ist $|PF| + |PF'| = |PQ| + |PQ'|$.

Satz 3.9. Sei $P \in \pi$ ein Punkt mit $|PF| + |PF'|$ gleich der Länge der Mantellinienstrecke vom Kreis C zum Kreis C' . Dann ist $P \in \Omega$.

Beweis. Ansonsten wäre P außerhalb des relevanten Einzelkegels, oder innerhalb. Es ist $\overline{\Omega_{\text{inn}}}$ eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^3 , und π ebenfalls. Also ist auch $\overline{\Omega_{\text{inn}}} \cap \pi$ eine konvexe Teilmenge des \mathbb{R}^3 .

Sei P innerhalb des Einzelkegels, also in Ω_{inn} . Wir verlängern die Strecke \overline{FP} über P hinaus, bis wir den Kegelmantel durchstoßen. Dies ist möglich, weil der Winkel des Vektors \overrightarrow{FP} gegen die (nach oben zeigende) vertikale Achse maximal $90^\circ + \psi$ ist, während diejenige Ebene durch F und P , die parallel zu s ist, aus dem Kegelmantel eine Kurve herausschneidet, die wir schon in Fall 2 behandelt hatten, und bei der man (über eine Betrachtung von Anstiegen und Winkeln) nachrechnen kann, daß sie die Verlängerung der Strecke \overline{FP} über P hinaus schneiden muß.

Wir erhalten auf diesem Wege einen Punkt P' auf der Ellipse. Dann ist

$$|PF| + |PF'| = |P'F| + |P'F'|.$$

Weil P zwischen F und P' liegt, ist $|P'F| = |P'P| + |PF|$, also auch

$$|PF'| = |PP'| + |P'F'|.$$

Demnach liegen P , P' und F' auf einer Geraden (Umkehrung der Dreiecksungleichung), und zwar ist P' zwischen P und F' . Demzufolge liegen F , P , P' , F' in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, und insbesondere müßte F' außerhalb des Doppelkegels sein, was absurd ist.

Sei nun P außerhalb des Doppelkegels, also in $\Omega_{\text{auß}}$. Auf der Strecke \overline{FP} gibt es mindestens einen Punkt $P' \in \Omega$. Dieser liegt auf der Ellipse. Dann haben wir

$$|PF| + |PF'| = |P'F| + |P'F'|.$$

Weil P' zwischen F und P liegt, haben wir $|FP| = |FP'| + |P'P|$, also auch

$$|PP'| + |PF'| = |P'F'|,$$

und demnach (Umkehrung der Dreiecksungleichung) liegt P auf der Strecke zwischen P' und F' . Also liegen F , P' , P , F' in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Aber es ist $\overline{\Omega_{\text{inn}}}$ konvex, und F , F' liegen beide darin. Also ist auch $P \in \overline{\Omega_{\text{inn}}}$, im Widerspruch zur Annahme, daß P außerhalb des Doppelkegels liegt. \square

3.3 Der hyperbolische Fall 3.2.b: $\varphi + \psi > 90^\circ$

Man erahnt, daß es auch jetzt genau zwei Dandelin-Kugeln gibt.

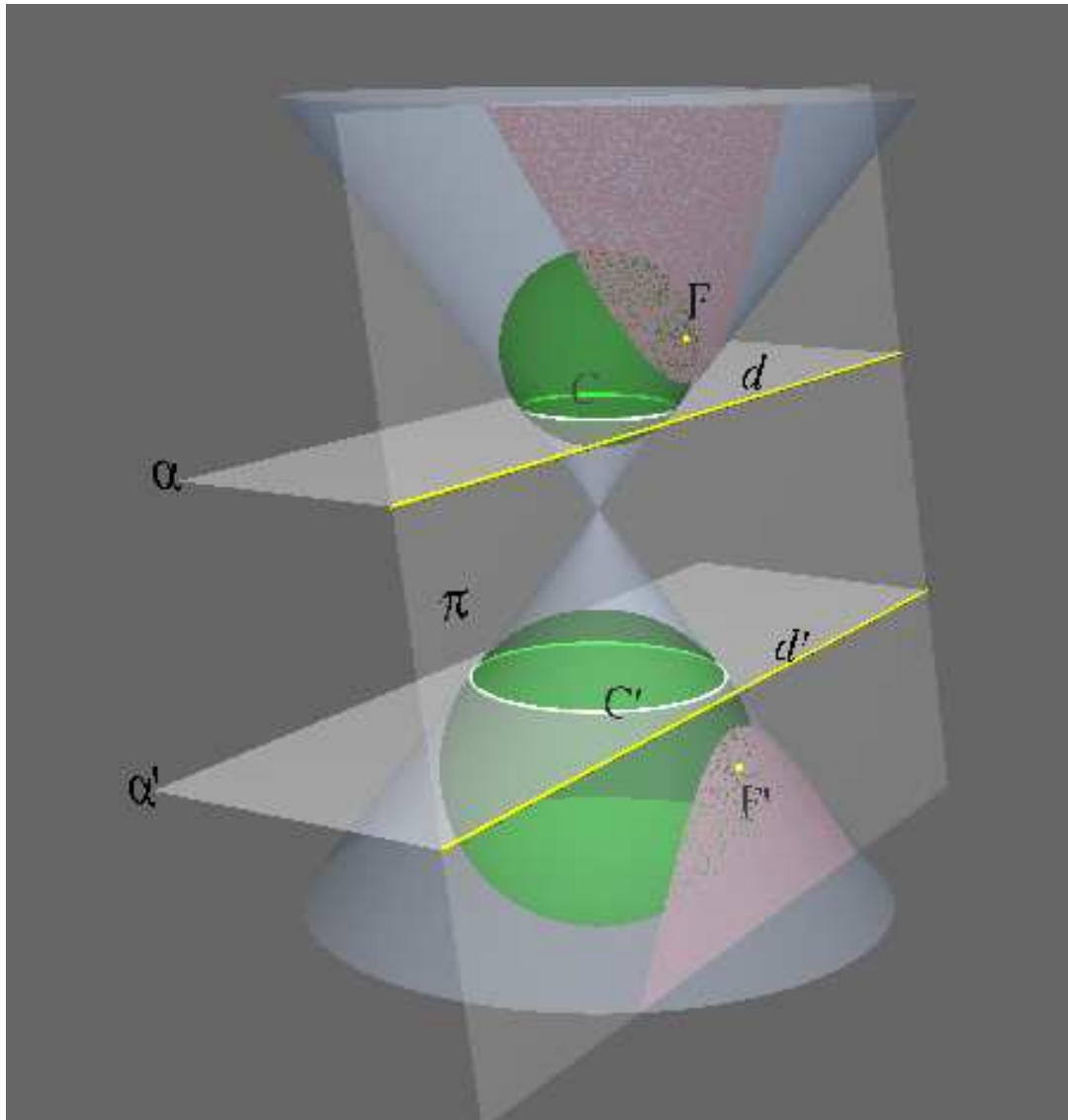


Abbildung 3.6: Hyperbel als Schnitt eines Doppelkegels mit einer Ebene, und die beiden DANDELINSchen Kugeln

Die Gerade $\pi \cap \gamma$ schneidet jetzt zwei Mantellinien verschiedener Einzelkegel, die Schnittpunkte heißen wieder A und B . Die beiden Dandelin-Kugeln Γ und Γ' ergeben (beim Schneiden mit γ) jetzt zwei Ankreise am Dreieck $\triangle OAB$, und zwar die Ankreise an die Kanten \overline{OA} und \overline{OB} . Auf diesem Wege kann gezeigt werden, daß es wirklich genau zwei Dandelin-Kugeln sind. Vergleiche Abbildung 3.7.

Es ist F gerade der Berührungspunkt der „oberen“ Dandelin-Kugel Γ mit π , und F' der Berührungspunkt der „unteren“ Dandelin-Kugel Γ' mit π .

Die Berührungskreise der Dandelin-Kugeln Γ und Γ' mit dem Doppelkegelmantel Ω heißen wieder C und C' , und α , α' seien wieder die Ebenen, in denen diese Kreise liegen. Siehe Abbildung 3.6.

Lemma 3.10. *Der Punkt F liegt „oberhalb“ der Ebene α , und F' liegt „unterhalb“ der Ebene α' .*

Beweis. Sinngemäß wie im elliptischen Fall. □

Definition 3.11. *Wir definieren (falls $\varphi + \psi > 90^\circ$) die von Ω und π erzeugte Hyperbel als $\Omega \cap \pi$.*

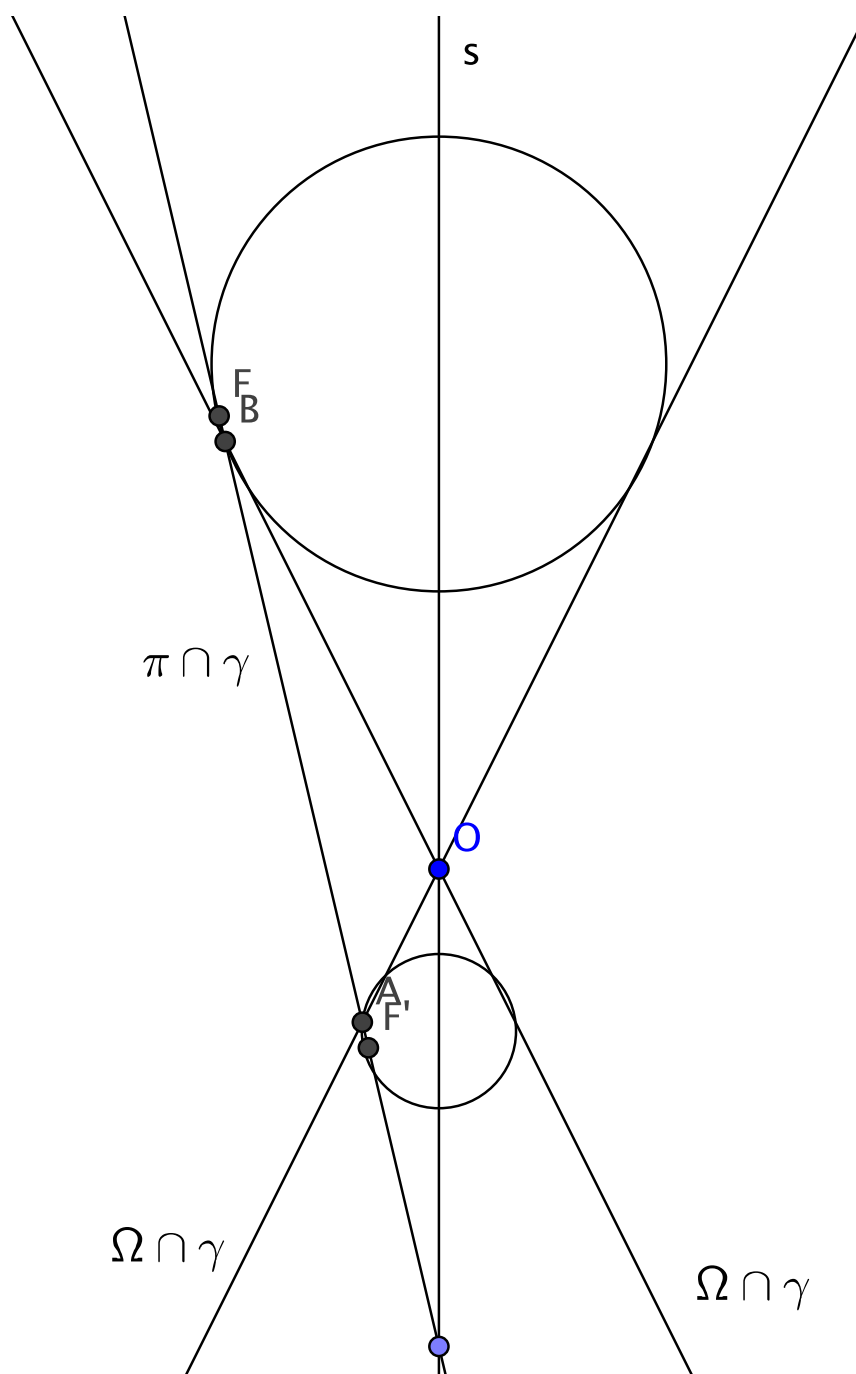


Abbildung 3.7: Schnitt durch den Doppelkegel Ω entlang der Ebene γ . Die gezeichneten Kreise sind die Schnitte der DANDELIN-Kugeln mit der Ebene γ .

Satz 3.12. Sei P ein Punkt der Hyperbel. Dann ist $\left| |PF| - |PF'| \right|$ gleich der Länge der Mantellinienstrecke vom Kreis C bis zum Kreis C' .

Beweis. Man schaue auf Abbildung 3.8 und verfähre fast wörtlich wie beim Beweis des entsprechenden Ergebnisses für den elliptischen Fall. Der entscheidende Unterschied ist nun, daß P zwar nach wie vor auf der Geraden QQ' liegt, aber nicht mehr zwischen Q und Q' . \square

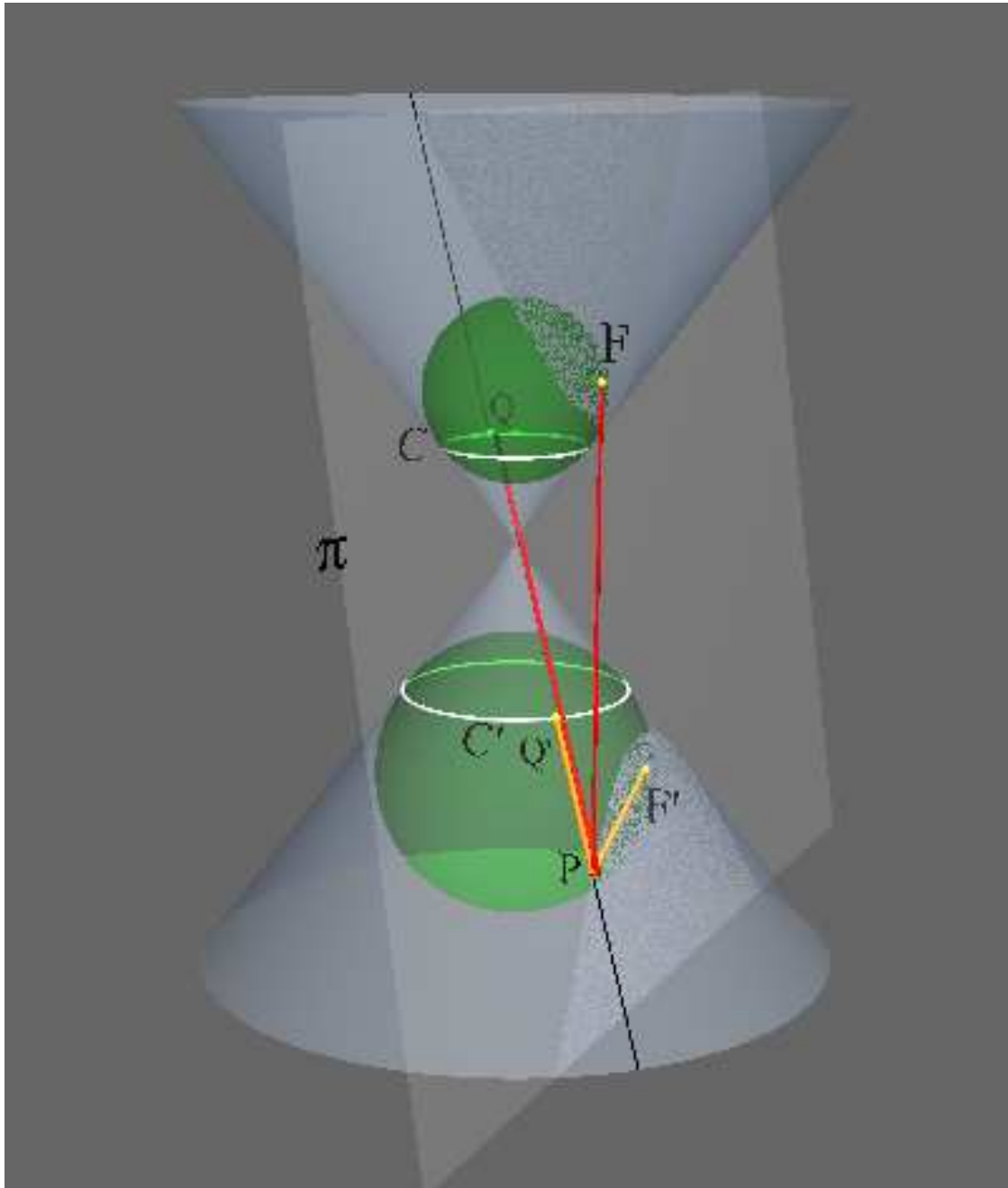


Abbildung 3.8: Zu den Brennpunkten bei der Hyperbel. Es ist $|PQ| = |PF|$ und $|PQ'| = |PF'|$, also $|PF| - |PF'| = |PQ| - |PQ'| = |QQ'|$, denn hier ist $|PQ|$ länger als $|PQ'|$.

Satz 3.13. Sei $P \in \pi$ ein Punkt, für den $\left| |PF| - |PF'| \right|$ gleich der Länge der Mantellinienstrecke vom Kreis C bis zum Kreis C' ist. Dann ist $P \in \Omega$.

Beweis. Nicht entscheidend anders als im elliptischen Fall. \square

3.4 Der parabolische Fall 3.2.c: $\varphi + \psi = 90^\circ$

Wir haben die Ahnung, daß es jetzt nur eine Dandelin–Kugel Γ gibt, vgl. Abbildung 3.9.

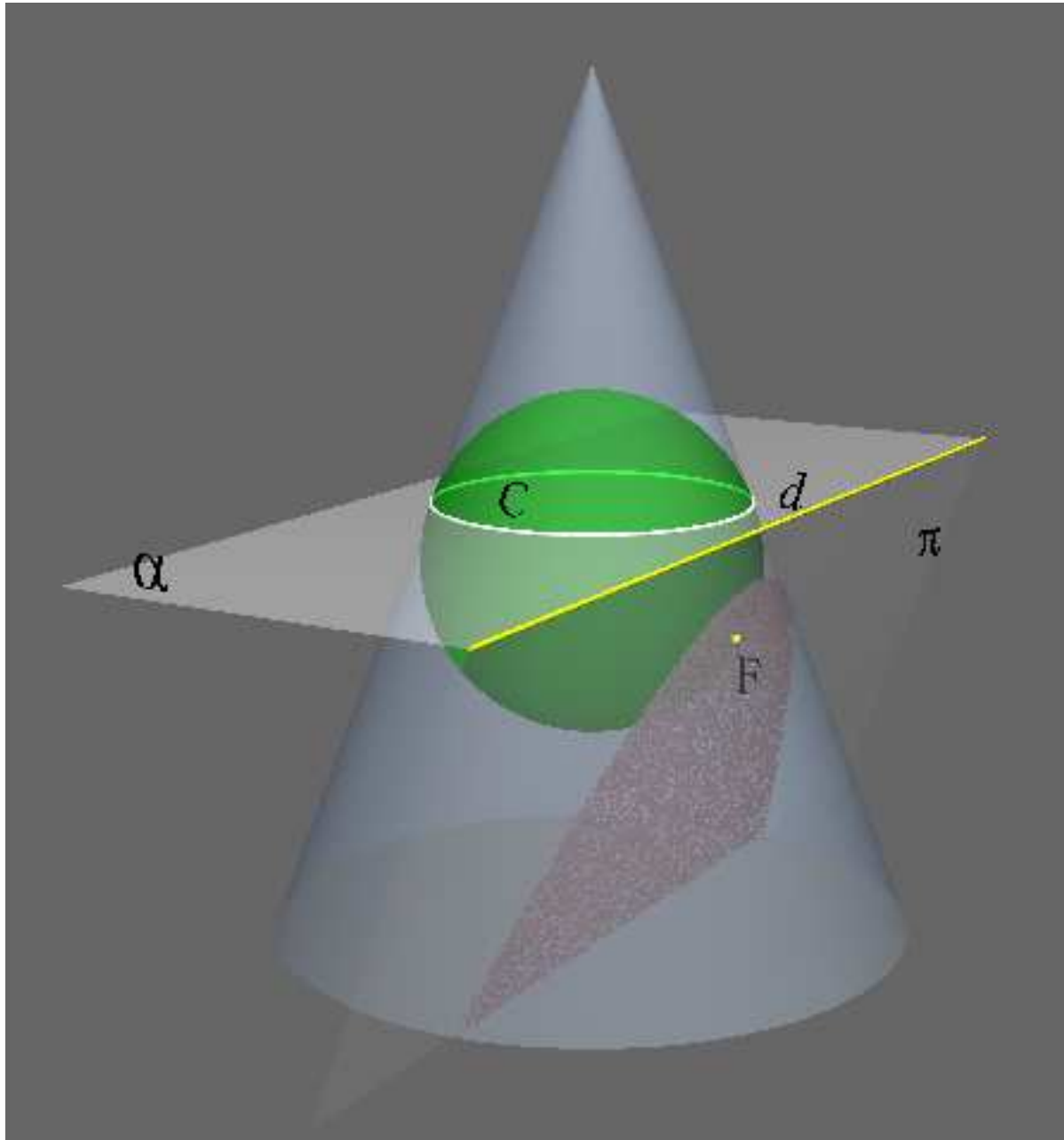


Abbildung 3.9: Parabel als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, und die einzige DANDELINSche Kugel

Wie üblich definieren wir C als den Berührungskreis von Γ mit Ω , und die C enthaltende Ebene heißt α . Der Berührungspunkt von Γ mit π sei F getauft.

Definition 3.14. Die Schnittgerade von α und π heißt Leitgerade d .

Lemma 3.15. Sei $P \in \Omega$, und die Gerade PF sei tangential an Γ . Dann liegt P „unterhalb von“ α .

Beweis. Wörtlich wie im elliptischen Fall. □

Definition 3.16. Wir definieren (falls $\varphi + \psi > 90^\circ$) die von Ω und π erzeugte Parabel als $\Omega \cap \pi$.

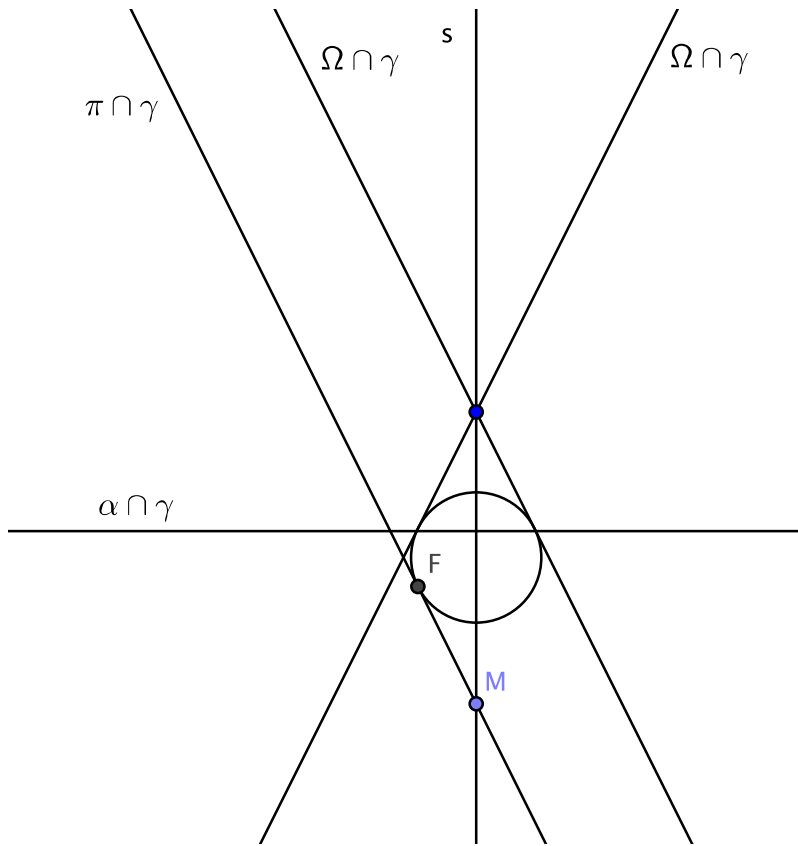


Abbildung 3.10: Schnitt durch den Doppelkegel Ω entlang der Ebene γ . Der gezeichnete Kreis ist der Schnitt der einen DANDELIN-Kugel mit der Ebene γ .

Satz 3.17. Sei P auf der Parabel. Dann ist $|PF|$ gleich dem Abstand des Punktes P zur Leitgeraden d .

Beachte dabei, daß P und d in derselben Ebene π liegen.

Beweis. Wir definieren einen Punkt Q als Schnitt der Mantellinie OP mit dem Kreis C . Dann liegt Q zwischen O und P . Wie im elliptischen und im hyperbolischen Fall haben wir auch hier, daß $|PQ| = |PF|$.

Wir fällen das Lot von P auf die Ebene α und erhalten einen Lotfußpunkt, der R heißen soll. Per Definition ist auch $Q \in \alpha$. Also hat das Dreieck $\triangle PQR$ einen rechten Winkel bei R . Weiterhin ist die Gerade PR parallel zur Geraden s (denn beide stehen senkrecht auf der Ebene α). Der Winkel zwischen der Geraden s und der Mantellinie OP ist φ . Aus dem Wechselwinkelsatz erhalten wir dann, daß der Winkel bei P im Dreieck $\triangle PQR$ auch gleich φ ist.

Nun besorgen wir uns den Fußpunkt des Lotes von P auf die Leitgerade d . Dazu erinnern wir daran, daß die Ebene γ senkrecht auf der Ebenen α steht, und die Ebene γ steht senkrecht auf der Ebenen π . Also steht die Ebene γ senkrecht auf der Leitgeraden $d = \alpha \cap \pi$.

Wir verschieben die Ebenen γ auf parallele Weise so, daß die Bildebene γ' durch den Punkt P verläuft. Weil die Achse s in γ verläuft, und weil die Gerade PR parallel zu s ist, verläuft auch die Gerade PR in der Bildebene γ' . Also liegt der Punkt R in der Ebene γ' .

Weil die Leitgerade d senkrecht auf γ steht, und weil γ' aus γ durch Parallelverschiebung hervorgeht, steht d auch auf γ' senkrecht.

Wir definieren einen Punkt $H := d \cap \gamma' = \alpha \cap \pi \cap \gamma'$.

Der Punkt P gehört ebenfalls zu γ' (denn so ist γ' definiert). Also gehört auch die Gerade PH zu γ' . Und weil d auf jeder Geraden in der Ebene γ' senkrecht steht, folgt $PH \perp d$ als Orthogonalität von Geraden.

Also ist H tatsächlich der Lotfußpunkt des Punktes $P \in \pi$ auf die in der Ebene π verlaufende Gerade d .

Wegen $\varphi + \psi = 90^\circ$ ist im Dreieck $\triangle PRH$ der Winkel bei P gleich φ ; und wegen $R, H \in \alpha$ sowie $PR \perp \alpha$ ist im Dreieck $\triangle PRH$ der Winkel bei R gleich 90° .

$|PH| = |PP'| + |P'H| = |PP'| + |P'F|$, also liegt P' auf der Strecke von P nach F zwischen diesen, und deshalb liegt F auf der Verlängerung der Strecke $\overline{PP'}$ über P' hinaus. Insbesondere ist dann F' außerhalb von Ω , was absurd ist.

Angenommen, P wäre in $\Omega_{\text{au\ss}}$ (siehe Abbildung 3.12). Weil F in Ω_{inn} liegt, gibt es einen Punkt P' auf der Strecke \overline{PF} , der auf Ω liegt, also auf der Parabel. Der Lotfußpunkt von P' auf d sei H' . Dann ist einerseits $|P'H'| = |P'F|$, andererseits nach Voraussetzung $|PH| = |PF|$. Wir bekommen damit

$$|PP'| = |PF| - |P'F| = |PH| - |P'H'|.$$

Also ist die Strecke $\overline{P'H'}$ kürzer als die Strecke \overline{PH} .

Die zu d parallele Gerade zu P' schneide die Gerade PH in T . Wir erhalten ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle PTP'$ mit rechtem Winkel bei T . Dann ist $|TP| < |P'P|$, denn die Kathete muß kürzer sein als die Hypotenuse. Es ist aber $|TP| = |PH| - |P'H'| = |PP'|$, was ein Widerspruch ist.

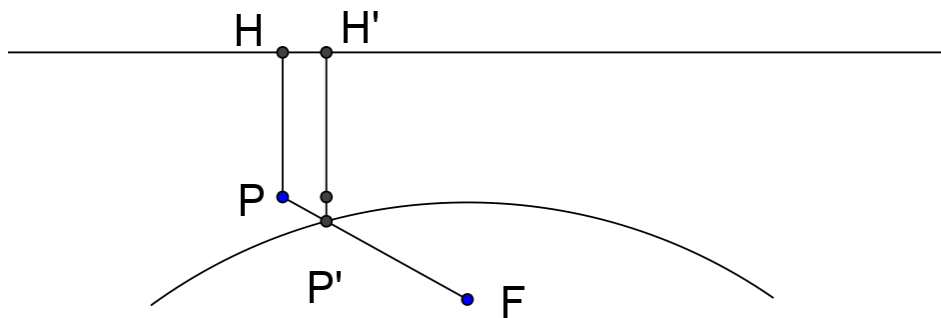


Abbildung 3.12: Versuch einer Skizze

□

3.5 Rechnungen in kartesischen Koordinaten

Wir haben erkannt, daß in einer Ebene eine Ellipse aus genau denjenigen Punkten besteht, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen *Brennpunkten* einen festen vorgegebenen Wert hat. In einem gewöhnlichen xy -Koordinatensystem legen wir die Brennpunkte fest als $F_- := (-m, 0)$ und $F_+ := (m, 0)$ mit einem positiven m , und die Summe der Abstände der Ellipsenpunkte zu diesen Brennpunkten soll $2l$ betragen. Offenkundig besteht die Ellipse aus der leeren Menge für $l < m$, und aus der Verbindungsstrecke $\overline{F_-F_+}$ für $l = m$, sodaß wir ab jetzt $l > m$ annehmen.

Lemma 3.19. Für $l > m$ ist die Gleichung

$$\sqrt{(x-m)^2 + y^2} + \sqrt{(x+m)^2 + y^2} = 2l, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

äquivalent zu

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2 - m^2} = 1, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Weil Wurzeln niemals negative Werte annehmen, und weil $l > 0$, ist

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-m)^2 + y^2} + \sqrt{(x+m)^2 + y^2} &= 2l, \\ \iff (x-m)^2 + y^2 + (x+m)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+m)^2 + y^2} &= 4l^2, \\ \iff \sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+m)^2 + y^2} &= 2l^2 - x^2 - y^2 - m^2, \end{aligned}$$

und dies wiederum ist äquivalent zum Aussagenpaar

$$((x-m)^2 + y^2) \cdot ((x+m)^2 + y^2) = (2l^2 - x^2 - y^2 - m^2)^2, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2,$$

was sich umformt zu

$$\begin{aligned}
& ((x-m)(x+m))^2 + y^2((x-m)^2 + (x+m)^2) + y^4 \\
&= 4l^4 + x^4 + y^4 + m^4 - 4l^2(x^2 + y^2 + m^2) + 2(x^2m^2 + x^2y^2 + m^2y^2), \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2, \\
\iff & -2x^2m^2 = 4l^4 - 4l^2(x^2 + y^2 + m^2) + 2x^2m^2, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2, \\
\iff & l^2(x^2 + y^2 + m^2) = l^4 + x^2m^2, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2, \\
\iff & (l^2 - m^2)x^2 + l^2y^2 = l^4 - l^2m^2, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2, \\
\iff & \frac{l^2 - m^2}{l^4 - l^2m^2}x^2 + \frac{l^2}{l^4 - l^2m^2}y^2 = 1, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2, \\
\iff & \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2 - m^2} = 1, \quad 2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2.
\end{aligned}$$

Wenn nun $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2 - m^2} = 1$, dann ist $x^2 \leq l^2$ und weiterhin

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + m^2 &= x^2 + (l^2 - m^2) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + m^2 = (l^2 - m^2) + x^2 \left(1 - \frac{l^2 - m^2}{l^2}\right) + m^2 \\
&= l^2 + x^2 \cdot \frac{m^2}{l^2} \leq l^2 + l^2 \cdot \frac{m^2}{l^2} = l^2 + m^2 \leq 2l^2,
\end{aligned}$$

und damit ist dann die Bedingung $2l^2 \geq x^2 + y^2 + m^2$ automatisch erfüllt. \square

In diesem elliptischen Fall setzen wir

$$a := l, \quad b := \sqrt{l^2 - m^2},$$

woraus wir umgekehrt bekommen, daß dann

$$l = a, \quad m = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nun behandeln wir analog den hyperbolischen Fall.

In der Ebene besteht eine Hyperbel aus genau denjenigen Punkten, für die die Betragsdifferenz der Abstände zu zwei gegebenen *Brennpunkten* einen festen vorgegebenen Wert hat. Diese Brennpunkte legen wir wieder fest als $F_- := (-m, 0)$ und $F_+ := (m, 0)$, und die Betragsdifferenz der Abstände soll $2l$ sein. Wir erkennen, daß die Hyperbel zur leeren Menge wird für $l > m$, und sie besteht aus zwei Strahlen auf der x -Achse für $l = m$, sodaß wir ab jetzt $l < m$ annehmen.

Satz 3.20. Für $l < m$ ist die Gleichung

$$\left| \sqrt{(x-m)^2 + y^2} - \sqrt{(x+m)^2 + y^2} \right| = 2l, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

äquivalent zu

$$\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2 - l^2} = 1, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Auf üblichem Wege bekommen wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{(x-m)^2 + y^2} - \sqrt{(x+m)^2 + y^2} \right| = 2l, \\
\iff & (x-m)^2 + y^2 + (x+m)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+m)^2 + y^2} = 4l^2, \\
\iff & \sqrt{(x-m)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+m)^2 + y^2} = x^2 + y^2 + m^2 - 2l^2, \\
\iff & ((x-m)^2 + y^2) \cdot ((x+m)^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + m^2 - 2l^2)^2, \quad x^2 + y^2 + m^2 \geq 2l^2.
\end{aligned}$$

Die Gleichungsaussage ist identisch zur entsprechenden Aussage im elliptischen Fall, sodaß wir ohne weitere Rechnung die Äquivalenz der letzten Zeile zu

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{l^2 - m^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + m^2 \geq 2l^2,$$

erschließen können. Nun fehlt bloß noch der Nachweis, daß die genannte Ungleichung automatisch folgt, wenn die Gleichungsaussage gilt. Dazu beobachten wir: wenn $\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2 - l^2} = 1$, dann ist $x^2 \geq l^2$ sowie $y^2 = (m^2 - l^2)(x^2/l^2 - 1)$, also

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + m^2 &= x^2 + (m^2 - l^2) \left(\frac{x^2}{l^2} - 1 \right) + m^2 = x^2 \left(1 + \frac{m^2 - l^2}{l^2} \right) + (m^2 - l^2) \cdot (-1) + m^2 \\ &= x^2 \cdot \frac{m^2}{l^2} + l^2 \geq m^2 + l^2 > 2l^2, \end{aligned}$$

also folgt die Ungleichung $x^2 + y^2 + m^2 \geq 2l^2$ automatisch, wenn die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{m^2 - l^2} = 1$ gilt. \square

Wir definieren im hyperbolischen Fall

$$a := l, \quad b := \sqrt{m^2 - l^2}$$

und haben dann in umgekehrter Richtung

$$l = a, \quad m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wir kommen zum parabolischen Fall. Die Punkte der Parabel sind von einer vorgegebenen Leitgeraden genau so weit entfernt wie von einem Brennpunkt. Wir wählen die Leitgerade als $\{(x, y) : x = -p/2\}$ mit einem positiven p , und den Brennpunkt wählen wir als $(p/2, 0)$. Offensichtlich liegt jeder Punkt der Parabel rechts von der Leitgeraden. Die Beziehung

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

ist dann offenkundig äquivalent zu

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2, \quad x \geq -\frac{p}{2},$$

was sich direkt umformt zu $y^2 = 2px$ und $x \geq -p/2$. Wir erkennen erneut, daß diese Ungleichung automatisch gilt, wenn $y^2 = 2px$.

3.6 Rechnungen in Polarkoordinaten

Wir wollen jetzt Polarkoordinaten einführen, aber etwas verschoben: der Ursprung der Polarkoordinaten soll in F_- bzw. F_+ liegen im Falle von Ellipse bzw. Hyperbel.

Satz 3.21. Für $a > b > 0$ und $m = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

äquivalent zu

$$r = \frac{b^2/a}{1 - \frac{m}{a} \cos \varphi}, \quad x + m = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Beweis. Ab jetzt sei immer $x + m = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq r < \infty$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dann haben wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \Leftrightarrow \frac{(r \cos \varphi - m)^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} &= 1, \\ \Leftrightarrow b^2(r^2 \cos^2 \varphi + m^2 - 2rm \cos \varphi) + a^2 r^2 \sin^2 \varphi &= a^2 b^2, \\ \Leftrightarrow r^2(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) - 2rb^2 m \cos \varphi &= a^2 b^2 - b^2 m^2, \\ \Leftrightarrow r^2(a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 - m^2) \cos^2 \varphi) - 2rb^2 m \cos \varphi &= b^4, \\ \Leftrightarrow r^2(a^2 - m^2 \cos^2 \varphi) - 2rb^2 m \cos \varphi - b^4 &= 0. \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung in r ist wegen $r \geq 0$ und $a^2 - m^2 \cos^2 > 0$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} r &= \frac{b^2 m \cos \varphi}{a^2 - m^2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{a^2 - m^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{(b^2 m \cos \varphi)^2 + (a^2 - m^2 \cos^2 \varphi) b^4}, \\ \Leftrightarrow r &= \frac{b^2}{a^2 - m^2 \cos^2 \varphi} \left(m \cos \varphi + \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + (a^2 - m^2 \cos^2 \varphi)} \right), \\ \Leftrightarrow r &= \frac{b^2}{(a - m \cos \varphi)(a + m \cos \varphi)} \cdot (m \cos \varphi + a) = \frac{b^2}{a - m \cos \varphi}. \end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen. □

Wir führen einige Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{m}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\ p &:= \frac{b^2}{a\varepsilon} = \frac{b^2}{m} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = b, \quad \varepsilon p = \frac{b^2}{a}, \quad a = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \cdot p\varepsilon, \quad b = \frac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

und die Ellipsengleichung wird zu

$$r(\varphi) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

wobei $0 < \varepsilon < 1$.

Für den hypothetischen Fall $\varepsilon = 0$ bekommen wir $m = 0$, also $a = b = R$ und $\varepsilon p = R$, also einen Kreis um $F_- = (0, 0)$ mit Radius R . Natürlich kann man einen Kreis als Ellipse mit zwei identischen Brennpunkten $F_- = F_+$ interpretieren.

Jetzt behandeln wir, so analog es geht, den hyperbolischen Fall.

Satz 3.22. Für $a > b > 0$ und $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} r &\in \left\{ \frac{b^2/a}{1 - \frac{m}{a} \cos \varphi}, \frac{b^2/a}{-1 - \frac{m}{a} \cos \varphi} \right\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ x - m &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned}$$

wobei Brüche mit Null-Nenner als nicht geschrieben gelten sollen.

Man beachte, daß der Ursprung des Polarkoordinatensystems jetzt der andere Brennpunkt ist.

Beweis. Auf ausgetretenem Wege finden wir

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \Leftrightarrow b^2 (r^2 \cos^2 \varphi + m^2 + 2rm \cos \varphi) - a^2 r^2 \sin^2 \varphi &= a^2 b^2, \\ \Leftrightarrow r^2 (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi) + 2rb^2 m \cos \varphi &= a^2 b^2 - b^2 m^2, \\ \Leftrightarrow r^2 (b^2 \cos^2 \varphi - a^2 (1 - \cos^2 \varphi)) + 2rb^2 m \cos \varphi &= -b^4, \\ \Leftrightarrow r^2 (m^2 \cos^2 \varphi - a^2) + 2rb^2 m \cos \varphi + b^4 &= 0. \end{aligned}$$

Der Faktor $(m^2 \cos^2 \varphi - a^2)$ kann positiv, negativ oder Null sein, und jeder der drei Fälle tritt tatsächlich ein. Wenn wir den Fall $m^2 \cos^2 \varphi - a^2 = 0$ vorübergehend ignorieren, und wenn wir vereinbaren, daß negative rechte Seiten nicht geschrieben gelten, bekommen wir in den restlichen Fällen die Äquivalenz zu

$$\begin{aligned} r &= \frac{-b^2 m \cos \varphi}{m^2 \cos^2 \varphi - a^2} \pm \frac{1}{m^2 \cos^2 \varphi - a^2} \sqrt{(b^2 m \cos \varphi)^2 - (m^2 \cos^2 \varphi - a^2) b^4}, \\ \Leftrightarrow r &= \frac{-b^2 m \cos \varphi}{m^2 \cos^2 \varphi - a^2} \pm \frac{b^2}{m^2 \cos^2 \varphi - a^2} \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi - (m^2 \cos^2 \varphi - a^2)}, \\ \Leftrightarrow r &= \frac{-b^2}{(m \cos \varphi - a)(m \cos \varphi + a)} (m \cos \varphi \mp a), \\ \Leftrightarrow r &= \frac{-b^2}{m \cos \varphi \pm a} = \frac{b^2/a}{\mp a - \frac{m}{a} \cos \varphi} \\ \Leftrightarrow r &\in \left\{ \frac{b^2/a}{1 - \frac{m}{a} \cos \varphi}, \frac{b^2/a}{-1 - \frac{m}{a} \cos \varphi} \right\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Wir beobachten nachträglich, daß einer der Brüche den korrekten Wert liefert, wenn $m^2 \cos^2 \varphi - a^2 = 0$. \square

Nun setzen wir (ähnlich wie im elliptischen Fall)

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{m}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \\ p &:= \frac{b^2}{a\varepsilon} = \frac{b^2}{m} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

und dann haben wir

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - 1 &= \frac{b^2}{a^2}, & b &= a\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}, & \varepsilon p &= \frac{b^2}{a}, \\ a &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \cdot p\varepsilon = \frac{p\varepsilon}{|1 - \varepsilon^2|}, & b &= \frac{p\varepsilon}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}}, \end{aligned}$$

und die Hyperbelgleichung wird zu

$$r(\varphi) \in \left\{ \frac{p\varepsilon}{-1 - \varepsilon \cos \varphi}, \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \right\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Der linke / rechte Bruch beschreibt den linken / rechten Hyperbelast, und wir beobachten die Ähnlichkeit zur Ellipsenformel, bloß daß jetzt $\varepsilon > 1$.

Wenn $|\cos \varphi| = \varepsilon^{-1}$, dann zeigt der Polarstrahl parallel zu einer der beiden Asymptoten.

Es gibt zwei Werte für r , wenn $\cos \varphi < -\frac{a}{m} = a/\sqrt{a^2 + b^2}$; genau einen Wert für r , wenn $-a/m < \cos \varphi < a/m$; und keinen Wert für r , wenn $\cos \varphi > a/m$.

Schließlich noch der parabolische Fall.

Satz 3.23. Für $p > 0$ ist die Gleichung

$$y^2 = 2px, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

äquivalent zu

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}, \quad x = \frac{p}{2} + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Insgesamt bekommen wir also die einheitliche Formel

$$r(\varphi) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

die für $0 < \varepsilon < 1$ eine Ellipse beschreibt, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, und für $\varepsilon > 1$ einen der beiden Hyperbeläste.

Als **Warnung** sei angemerkt, daß diverse Nachschlagewerke auch Parameter p und ε verwenden, diese aber womöglich anders definiert haben, sodaß manche Formeln anders aussehen.

3.7 Weiterführende Aspekte \otimes \odot

Es ist für Anwendungen hilfreich, für die Entfernungen eines Punktes P auf einem Kegelschnitt zu einem Brennpunkt F_{\pm} eine wurzelfreie Formel zu haben (damit die nicht-äquivalente Umformung des Quadrirens vermieden werden kann).

Lemma 3.24. Sei $P = (x, y)$ ein Punkt auf der durch die Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ beschriebenen Ellipse mit den Brennpunkten $F_{\pm} = (\pm m, 0)$. Dann ist

$$|F_-P| = a + \frac{xm}{a}, \quad |F_+P| = a - \frac{xm}{a}.$$

Sei $P = (x, y)$ ein Punkt auf der durch die Gleichung $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ beschriebenen Hyperbel mit den Brennpunkten $F_{\pm} = (\pm m, 0)$. Dann ist

$$|F_-P| = \frac{xm}{a} + a, \quad |F_+P| = \frac{xm}{a} - a.$$

Sei $P = (x, y)$ ein Punkt auf der durch die Gleichung $y^2 = 2px$ beschriebenen Parabel mit Brennpunkt $F = (p/2, 0)$. Dann ist $|FP| = x + p/2$.

Beweis. Für den Ellipsenfall haben wir

$$(x \pm m)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a^2 - b^2 \pm 2mx = x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 \pm 2mx = \frac{x^2 m^2}{a^2} + a^2 \pm 2mx$$

und verwenden bald $|xm| < a^2$. Und im Falle der Hyperbel ist

$$(x \pm m)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + a^2 + b^2 \pm 2mx = x^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + a^2 \pm 2mx = \frac{x^2 m^2}{a^2} + a^2 \pm 2mx,$$

und jetzt ist $|xm| > a^2$. Die Aussage für die Parabel ist genau deren Definition. □

Satz 3.25. Ein Lichtstrahl, der im Brennpunkt F_- einer Ellipse startet und an der Ellipse gemäß des üblichen Reflexionsgesetzes reflektiert wird, verläuft durch F_+ .

Ein Lichtstrahl, der parallel zur positiven x -Halbachse nach links läuft und an der durch die Gleichung $y^2 = 2px$ beschriebenen Parabel gemäß des üblichen Reflexionsgesetzes reflektiert wird, verläuft durch deren Brennpunkt.

Beweis. Sei $(x, y) = (x(t), y(t))$ eine beliebige stetig differenzierbare Parametrisierung der Ellipse. Durch Differentiation der Ellipsengleichung nach t bekommen wir dann

$$\frac{2x(t)x'(t)}{a^2} + \frac{2y(t)y'(t)}{b^2} = 0 \quad \implies \quad \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right) \cdot (x', y') = 0.$$

Weil (x', y') tangential zur Ellipse verläuft, ist

$$\vec{n} = \vec{n}(P) := \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}\right)$$

ein (sicherlich nicht auf Einheitslänge normierter) Normalenvektor an die Ellipse im Punkt $P = (x, y)$. Dieser zeigt nach außen. Die Behauptung wäre gezeigt, wenn es uns gelänge zu beweisen, daß

$$\frac{\overrightarrow{F_-P} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{F_-P}\| \|\vec{n}\|} = \frac{\overrightarrow{F_+P} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{F_+P}\| \|\vec{n}\|}.$$

Mit der wurzelfreien Formel für $\|\overrightarrow{F_{\pm}P}\|$ aus dem vorigen Lemma ist das aber nicht mehr schwer.

Und im Falle der Parabel verwenden wir ebenfalls eine beliebige stetig differenzierbare Parametrisierung $(x(t), y(t))$, sodaß wir durch Ableitung der Parabelgleichung die Identität $2yy' = 2px'$ bekommen, also ist $(p, -y) \cdot (x', y') = 0$, und ein Normalenvektor an die Parabel ist demnach

$$\vec{n} = \vec{n}(P) := (p, -y).$$

Es bleibt zu zeigen, daß

$$\frac{\overrightarrow{FP} \cdot \vec{n}}{\|\overrightarrow{FP}\| \|\vec{n}\|} = \frac{(-1, 0) \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|},$$

was sich ohne Komplikationen nachrechnen läßt. □

Als Anwendung betrachten wir eine Parabol-Antenne für den Satellitenempfang. Die elektromagnetischen Wellen treffen parallel zur Parabel-Achse auf der Antenne auf und werden dort reflektiert. Nach dem eben gezeigten Ergebnis verlaufen alle reflektierten Strahlen durch den Brennpunkt, und wegen der Definition der Parabel kommen sie alle dort zur gleichen Zeit an (ohne etwaige Auslöschungen durch Laufzeitunterschiede zu erleiden). Zur Größenbetrachtung für die Montagegenauigkeit erinnern wir an die Formel $c = \lambda f$ mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ und der Frequenz f (typischerweise ist $f \sim 2 \text{Ghz} = 2 \cdot 10^9 \text{s}^{-1}$), sodaß sich die Wellenlänge λ als $\lambda \sim 15 \text{cm}$ ergibt.

Schlußendlich betrachten wir einen Planeten auf dessen Bahn um die Sonne. Die Massen von Sonne und Planeten seien M und m . Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt der Sonne (genauer wäre: der gemeinsame Massenschwerpunkt des Systems aus Sonne und Planet, aber das ist praktisch dasselbe wie der Sonnenmittelpunkt). Der Ort des Planeten sei $\vec{x} = \vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3$. Aus Newtons Gravitationsgesetz und seinem Dritten Axiom bekommen wir dann

$$m\vec{x}'' = -\gamma Mm \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3},$$

und γ ist die Gravitationskonstante. Wir definieren einen Drehimpulsvektor \vec{J} und einen Achsenvektor \vec{A} als

$$\vec{J} := \vec{x} \times m\vec{x}', \quad \vec{A} := \frac{1}{\gamma Mm} \vec{J} \times \vec{x}' + \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},$$

mit \times als dem üblichen Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 .

Lemma 3.26. *Die Vektoren \vec{J} und \vec{A} sind zeitlich invariant, und sie stehen aufeinander senkrecht.*

Beweis. Weil das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet, ist

$$\vec{J}' = \vec{x}' \times m\vec{x}' + \vec{x} \times m\vec{x}'' = \vec{0} + \vec{x} \times \left(-\gamma M m \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right) = \vec{0}.$$

Weiterhin ist $\frac{d}{dt} \|\vec{x}\|^2 = 2\vec{x} \cdot \vec{x}'$ und somit

$$\frac{d}{dt} \|\vec{x}\|^{-1} = \frac{d}{dt} \left((\|\vec{x}\|^2)^{-1/2} \right) = -\frac{1}{2} (\|\vec{x}\|^2)^{-3/2} \frac{d}{dt} \|\vec{x}\|^2 = -\|\vec{x}\|^{-3} \vec{x} \cdot \vec{x}',$$

was uns dann zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{A} &= \frac{1}{\gamma M m^2} \vec{J} \times (m\vec{x}'') + \frac{\vec{x}'}{\|\vec{x}\|} - \|\vec{x}\|^{-3} (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{x} \\ &= -\frac{\vec{J}}{\gamma M m^2} \times \left(\gamma M m \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \right) + \frac{\vec{x}'}{\|\vec{x}\|} - \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{x} \\ &= -\frac{(\vec{x} \times \vec{x}') \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} + \frac{\vec{x}'}{\|\vec{x}\|} - \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{x} \\ &= \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \left(-(\vec{x} \times \vec{x}') \times \vec{x} + \|\vec{x}\|^2 \vec{x}' - (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{x} \right) \\ &= \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} \left(-(\vec{x}'(\vec{x} \cdot \vec{x}) - \vec{x}(\vec{x}' \cdot \vec{x})) + (\vec{x} \cdot \vec{x}) \vec{x}' - (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{x} \right) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

führt. Weiterhin ist $\vec{J} \cdot \vec{A} = 0$, denn ein Kreuzproduktvektor steht immer auf jedem seiner Faktoren senkrecht. \square

Dann folgt, daß \vec{x} immer in einer bestimmten auf \vec{J} senkrechten Ebene bleibt, denn sein Geschwindigkeitsvektor steht auch auf \vec{J} senkrecht. Also verläuft eine Planetenbewegung immer in dieser Ebene. Dort führen wir nun ebene Polarkoordinaten (r, φ) für den Vektor \vec{x} ein, wobei wir den Winkel φ ab dem Vektor \vec{A} zählen.

Wir definieren

$$\varepsilon := \|\vec{A}\| \geq 0.$$

Es ergeben sich zwei Wege, das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{x}$ auszurechnen:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{x}(t) &= \varepsilon \|\vec{x}(t)\| \cos \varphi(t) = \varepsilon r(t) \cos \varphi(t), \\ \vec{A} \cdot \vec{x}(t) &= \frac{1}{\gamma M m} (\vec{J} \times \vec{x}') \cdot \vec{x} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|} \\ &= \frac{1}{\gamma M m} \det(\vec{J}, \vec{x}', \vec{x}) + \|\vec{x}\| \\ &= \frac{1}{\gamma M m} \det(\vec{x}', \vec{x}, \vec{J}) + \|\vec{x}\| \\ &= \frac{1}{\gamma M m} (\vec{x}' \times \vec{x}) \cdot \vec{J} + \|\vec{x}\| \\ &= \frac{-1}{\gamma M m^2} \vec{J} \cdot \vec{J} + \|\vec{x}\| \\ &= \frac{-\|\vec{J}\|^2}{\gamma M m^2} + r(t). \end{aligned}$$

Wenn nun $\vec{A} = \vec{0}$, dann ist $r(t)$ konstant, also läuft der Planet auf einem Kreis. Ansonsten haben wir

$$r(t) = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi(t)}, \quad p = \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma M m^2 \|\vec{A}\|}.$$

Diese Gleichung kennen wir schon als die einheitliche Darstellung für eine Ellipse, Parabel, oder einen Hyperbelast.

Im Falle eines Kometen kann eine Ellipse vorliegen oder ein Hyperbelast, und im Falle eines Planeten tritt der elliptische Fall ein. Der parabolische Fall ist physikalisch extrem unwahrscheinlich.

Satz 3.27 (Erstes Keplersches Gesetz). *Die Planeten bewegen sich auf ihren Bahnen um die Sonne auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.*

Nun definieren wir kartesische Koordinaten mit Basisvektoren $\vec{e}_1 \parallel \vec{A}$, \vec{e}_2 und $\vec{e}_3 \parallel \vec{J}$. Dann ist $x_3(t) \equiv 0$, und für den Drehimpulsvektor haben wir

$$\frac{1}{m} \vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_2' - x_2 x_1' \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern an einen Satz aus der Analysis.

Satz 3.28. *Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Parametrisierung einer Kurve. Der Ursprung des \mathbb{R}^2 sei O . Der orientierte Flächeninhalt des Sektors zwischen der Kurve und den Strecken $O\gamma(a)$, $O\gamma(b)$ ist gleich*

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{t=a}^b (x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)) dt,$$

wobei wir hier $(x_1(t), x_2(t)) := \gamma(t)$ gesetzt haben.

Für den Beweis ist es womöglich hilfreich zu wissen, daß der orientierte Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Ecken $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $R = (r_1, r_2)$ gegeben wird durch

$$A_0 = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \\ 1 & r_1 & r_2 \end{pmatrix}.$$

Satz 3.29 (Zweites Keplersches Gesetz). *Der Leitstrahl der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Beweis. Für die durch $(x_1(t), x_2(t))$ beschriebene Planetenbewegung haben wir $x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t) = J_3/m$, was unabhängig von t ist. Also ist die vom Leitstrahl im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ überstrichene Fläche gleich $(t_2 - t_1) \|\vec{J}\| / (2m)$. \square

Die Folgerung ist, daß ein Planet im sonnennächsten Punkt seiner Bahn schneller ist als im sonnenfernsten Punkt.

Satz 3.30 (Drittes Keplersches Gesetz). *Die Quadraten der Umlaufzeiten der Planeten sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsenlängen der Ellipse.*

Beweis. Sei A_0 der Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b . Die Zeit für einen Umlauf sei T . Dann ist einerseits, wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes,

$$A_0 = \frac{1}{2m} \|\vec{J}\| T.$$

Andererseits ist $A_0 = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, und wir haben auch $a = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$, mit obigem p . Für das Quadrat des Flächeninhalts ist dann

$$A_0^2 = \frac{1}{4m^2} \|\vec{J}\|^2 T^2 = \pi^2 a^4 (1 - \varepsilon^2) = \pi^2 a^4 \frac{\varepsilon p}{a} = \pi^2 a^3 \varepsilon p = \pi^2 a^3 \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma M m^2},$$

und das bedeutet tatsächlich

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3,$$

also genau unsere Behauptung. \square

Als Anwendung kann man so z.B. die Sonnenmasse bestimmen, wenn die Halbachsenlänge a und die Umlaufzeit T bekannt ist. Wenn weiterhin die Ellipse ungefähr ein Kreis ist, also $a \approx b$ bzw. $\varepsilon \approx 0$, dann ist der Ellipsenumfang schätzbar als $2\pi a$, und die durchschnittliche Geschwindigkeit ist dann

$$\approx \frac{2\pi a}{T} = 2\pi a \cdot \frac{\sqrt{\gamma M}}{2\pi a^{3/2}} = \frac{\sqrt{\gamma M}}{a^{1/2}}.$$

Das hat eine überraschende Konsequenz für die Steuerung eines Satelliten. Wenn dieser z.B. die Erde umkreist und auf eine niedrigere Bahn gelenkt werden soll, dann darf man ihn keinesfalls abbremsen, sondern man muß ihn beschleunigen.

Als letzte Betrachtung in diesem Kapitel wollen wir erklären, wo die Bezeichnungen *cosinus hyperbolicus* und *sinus hyperbolicus* herkommen.

Satz 3.31. *Wir betrachten einen Sektor im Einheitskreis mit Flächeninhalt A_0 . Wenn der eine Endpunkt des Sektors der Punkt $(1, 0)$ ist, dann ist der andere Endpunkt des Sektors der Punkt $(\cos(2A_0), \sin(2A_0))$.*

Beweis. Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine beliebige stetig differenzierbare Parametrisierung des Einheitskreises, mit $a \leq t \leq b$.

Dann ist $x^2(t) + y^2(t) = 1$, nach Ableiten also $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf den Fall, daß der Kreisbogen zwischen $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ im ersten Quadranten liegt (um uns eventuell nötige Diskussion bzgl. Division durch Null und Vorzeichen beim Wurzelziehen zu ersparen). Der Flächeninhalt des Sektors zwischen den Punkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \left(x(t) \cdot \frac{-x(t)x'(t)}{y(t)} - y(t)x'(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \frac{-x'(t)}{y(t)} (x^2(t) + y^2(t)) dt = -\frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \frac{x'(t) dt}{\sqrt{1-x^2(t)}} = -\frac{1}{2} \int_{x=\gamma_1(a)}^{x=\gamma_1(b)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arccos} x \Big|_{x=\gamma_1(a)}^{x=\gamma_1(b)}. \end{aligned}$$

Wenn wir $\gamma(a) = (1, 0)$ und $\gamma(b) = (\cos(2A_0), \sin(2A_0))$ wählen, dann ist tatsächlich

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{2} (\operatorname{arccos}(\cos(2A_0)) - \operatorname{arccos}(1)) = A_0.$$

Da diejenige Funktion, die den Öffnungswinkel eines Sektors auf dessen Flächeninhalt abbildet, bijektiv ist, haben wir damit die Behauptung gezeigt. \square

Nach dieser Vorbereitung betrachten wir eine entsprechende Situation auf der oberen Hälfte des rechten Astes der Einheitshyperbel, die durch $x^2 - y^2 = 1$ beschrieben wird. Der fragliche Sektor hat sein Zentrum im Ursprung, ein Eckpunkt ist in $(1, 0)$, und der andere Eckpunkt sei (X, Y) . Dann ist $X^2 - Y^2 = 1$, $X > 1$ und $Y > 0$.

Satz 3.32. *Wir betrachten einen Sektor an der Einheitshyperbel mit Flächeninhalt A_0 . Wenn der eine Endpunkt des Sektors der Punkt $(1, 0)$ ist, dann ist der andere Endpunkt des Sektors der Punkt $(\cosh(2A_0), \sinh(2A_0))$.*

Beweis. Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine beliebige stetig differenzierbare Parametrisierung des rechten Astes der Einheitshyperbel, mit $a \leq t \leq b$.

Dann ist $x^2(t) - y^2(t) = 1$, nach Ableiten also $x(t)x'(t) - y(t)y'(t) = 0$. Wegen $y(t) > 0$ ist dann

$$y'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{y(t)}, \quad y(t) = \sqrt{x^2(t) - 1},$$

und deshalb ist der Flächeninhalt des Sektors zwischen den Punkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ dann gleich

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \left(x(t) \cdot \frac{x(t)x'(t)}{y(t)} - y(t)x'(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \frac{x'(t)}{y(t)} (x^2(t) - y^2(t)) dt = \frac{1}{2} \int_{t=a}^{t=b} \frac{x'(t) dt}{\sqrt{x^2(t) - 1}} = \frac{1}{2} \int_{x=\gamma_1(a)}^{x=\gamma_1(b)} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arcosh} x \Big|_{x=\gamma_1(a)}^{x=\gamma_1(b)}. \end{aligned}$$

In unserem Fall ist $\gamma(a) = (1, 0)$ und $\gamma(b) = (\cosh(2A_0), \sinh(2A_0))$, sodaß wir tatsächlich

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arcosh}(\cosh(2A_0)) - \operatorname{Arcosh}(1) \right) = A_0$$

erhalten, was auch unser Ziel war. □

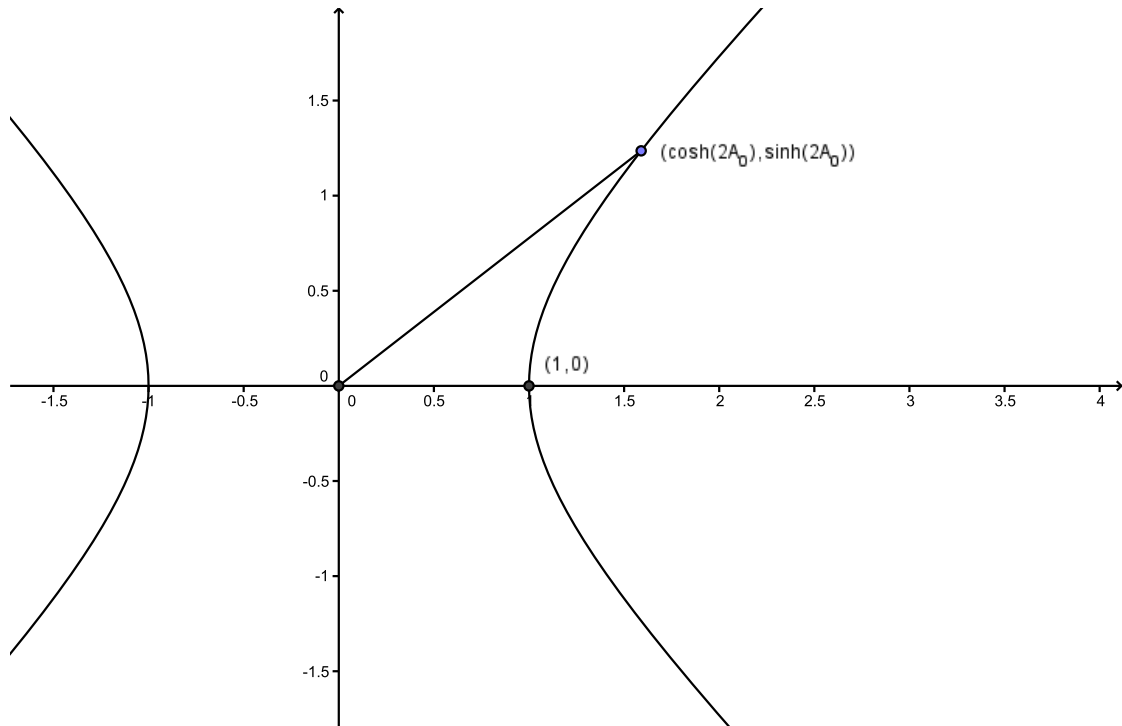


Abbildung 3.13: Ein Sektor an der Einheitshyperbel

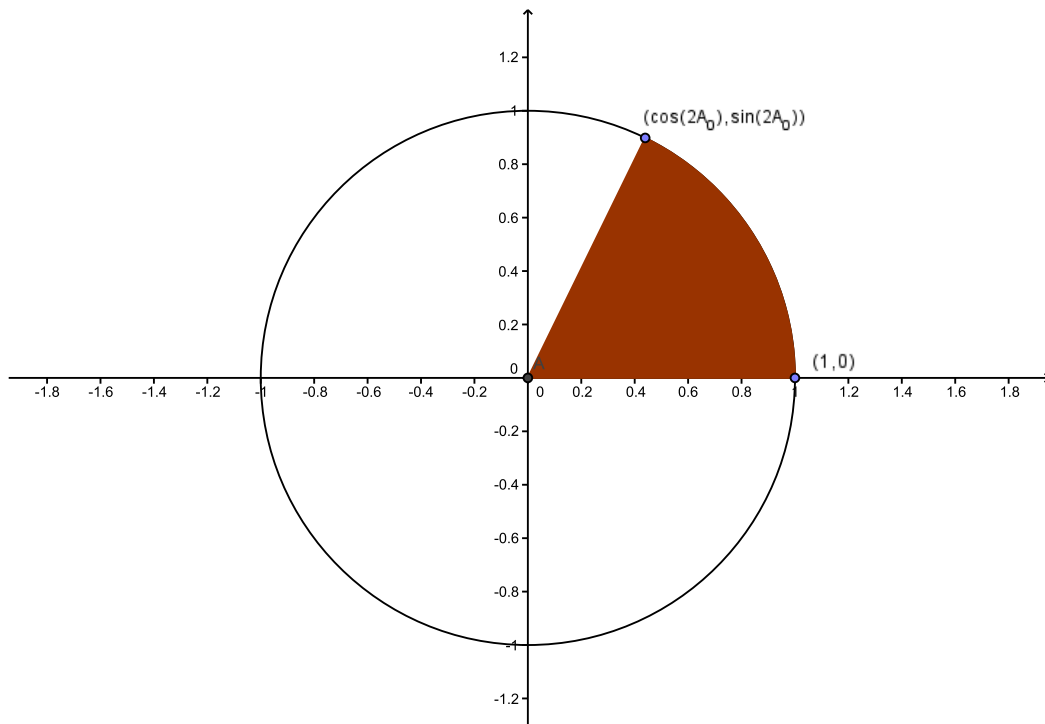


Abbildung 3.14: Ein Sektor am Einheitskreis

Kapitel 4

Geometrie an Dreiecken und Kreisen

4.1 Grundlagen

Zunächst stellen wir dar, wie in [9] übliche geometrische Aussagen aus den Axiomen hergeleitet werden. Startend von den Axiomengruppen I, II, III wird (unter anderem) gezeigt:

- der Basiswinkelsatz (im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent),
- die Kongruenzsätze SWS, WSW, SSS,
- die Kongruenz von Strecken ist eine Äquivalenzrelation, die Kongruenz von Winkeln auch,
- alle rechten Winkel sind kongruent,
- bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder nichtanliegende Innenwinkel,
- in jedem Dreieck liegt der größere Winkel der größeren Seite gegenüber,
- der Basiswinkelsatz hat eine Umkehrung,
- der Kongruenzsatz SWW gilt.

Erst danach wird das Parallelenaxiom mit hinzugenommen, und jetzt kann gezeigt werden:

- der Stufenwinkelsatz, der Wechselwinkelsatz, und deren Umkehrungen,
- die Parallelitätsrelation ist transitiv,
- der Innenwinkelsatz im Dreieck,
- durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte geht genau ein Kreis,
- der Satz über die Innenwinkel im Sehnenviereck, der Peripheriewinkelsatz.

Anschließend werden die Stetigkeitsaxiome (Gruppe V) hinzugefügt. Eine konkrete Anwendung dafür wird in [9] nicht sofort präsentiert. Andererseits ist z.B. das Vollständigkeitsaxiom für den Beweis der folgenden Aussage unverzichtbar: sei A ein Punkt innerhalb eines Kreises und B ein Punkt außerhalb; dann schneidet die Strecke \overline{AB} den Kreis in mindestens einem Punkte.

Dann wird bewiesen:

- die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems,
- die Unabhängigkeit der Axiomengruppen III, IV, V von den übrigen,
- Ähnlichkeitssätze,
- Sätze über Flächeninhalte.

Es lohnt sich anzuschauen, wie in [9] der Flächeninhaltsbegriff definiert worden ist. Der naive Zugang, z.B. den Inhalt von Dreiecken über die Regel „Grundseite mal Höhe durch zwei“ zu definieren, bringt sofort eine erste Hürde mit sich: nämlich zu zeigen, daß bei jeder der drei möglichen Wahlen für die Grundseite sich derselbe Wert für den Flächeninhalt ergibt. Durch Betrachtung von geeigneten ähnlichen Dreiecken läßt sich dies noch bewältigen. Aber schon der nächste Versuch, den Flächeninhalt eines konvexen Vierecks zu definieren über Zerlegung in zwei Dreiecke entlang der Diagonalen, hat erneut ein Problem: denn es gibt zwei Diagonalen, und wieder ist es nicht klar, wieso bei den beiden Zerlegungen sich derselbe Wert für den Flächeninhalt des Vierecks ergeben sollte.

Wir wollen diesen Verweis auf [9] hier beenden und uns jetzt selbst in die Geometrie stürzen. Die von uns verwendeten Aussagen sollen sein: alle Axiome des Hilbertschen Systems, die üblichen Sätze zu Winkeln am Dreieck, die Kongruenzsätze für Dreiecke, die Strahlensätze und Ähnlichkeitssätze.

Damit wir es konkret haben:

- die Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW, sSW deklarieren wir als Begründungsbasis;
- die Definition eines Nebenwinkelpaars beweist sofort den Nebenwinkelsatz;
- der Scheitelwinkelsatz beweist sich durch zweimalige Anwendung des Nebenwinkelsatzes;
- die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen beweist man über Parallelverschiebung, ggf. noch mit Scheitelwinkelsatz;
- der Basiswinkelsatz folgt durch Halbieren der Basis und SSS;
- der Innenwinkelsummensatz und der Außenwinkelsatz beweisen sich über die Winkelsätze an geschnittenen Parallelen.

Der Kongruenzsatz sSW lautet korrekt wie folgt: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel der *größeren* Seite gegenüberliegt“. Manche Schulbücher schreiben stattdessen: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel der *größten* Seite gegenüberliegt“. Diese zweite Variante ist falsch, und ein Gegenbeispiel findet sich in Abbildung 4.1.

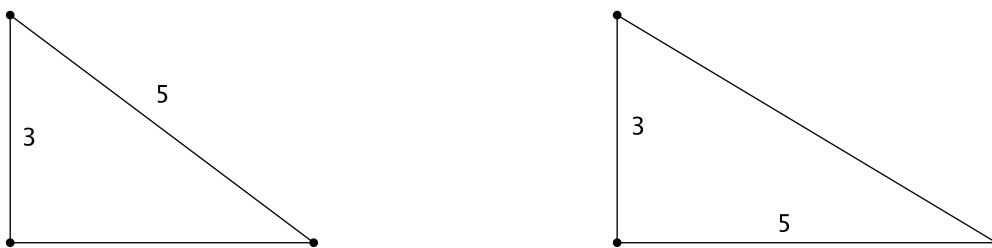


Abbildung 4.1: Eine Konstruktionsaufgabe mit zwei Lösungen: zu konstruieren ist ein Dreieck mit den Kantenlängen 3 und 5 und dem Innenwinkel 90° , wobei der Winkel der *größten* Seite gegenüberliegen soll.

Bis hierhin war es einfach (die Beweise brauchen nur wenige Zeilen), aber jetzt wird es schwieriger: Die Ähnlichkeit von Dreiecken definieren wir über die Gleichheit zweier entsprechender Winkel. Dann gibt es einen Ähnlichkeitssatz: wenn zwei Dreiecke mit Innenwinkeln α, β, γ bzw. α', β', γ' einander ähnlich sind, also $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$, dann gilt für die entsprechend getauften Kantenlängen, daß $a : a' = b : b'$. Der Beweis dafür ist mühsam (Hilbert braucht in [9] etwa 10 Seiten). Die anschließenden Strahlensätze sind dann wieder recht einfach:

Satz 4.1 (Erster Strahlensatz). Seien g und g' zwei Geraden mit Schnittpunkt Z , und seien A, B Punkte auf g sowie A', B' Punkte auf g' .

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann: wenn $AA' \parallel BB'$, dann ist $|ZA|:|ZB| = |ZA':|ZB'|$, und die Punkte Z, A, B liegen in derselben Reihenfolge auf der Geraden g wie die Punkte Z, A', B' auf g' .

Satz 4.2 (Umkehrung des ersten Strahlensatzes). Seien g und g' zwei Geraden mit Schnittpunkt Z , und seien A, B Punkte auf g sowie A', B' Punkte auf g' .

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann: wenn die Punkte Z, A, B in derselben Reihenfolge auf der Geraden g liegen wie die Punkte Z, A', B' auf g' , und wenn $|ZA|:|ZB| = |ZA':|ZB'|$, dann ist $AA' \parallel BB'$.

Satz 4.3 (Zweiter Strahlensatz). Seien g und g' zwei Geraden mit Schnittpunkt Z , und seien A, B Punkte auf g sowie A', B' Punkte auf g' .

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann: wenn $AA' \parallel BB'$, dann ist $|AA':|BB'| = |ZA|:|ZB|$, und die Punkte Z, A, B liegen in derselben Reihenfolge auf der Geraden g wie die Punkte Z, A', B' auf g' .

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes ist falsch, siehe Abbildung 4.2.

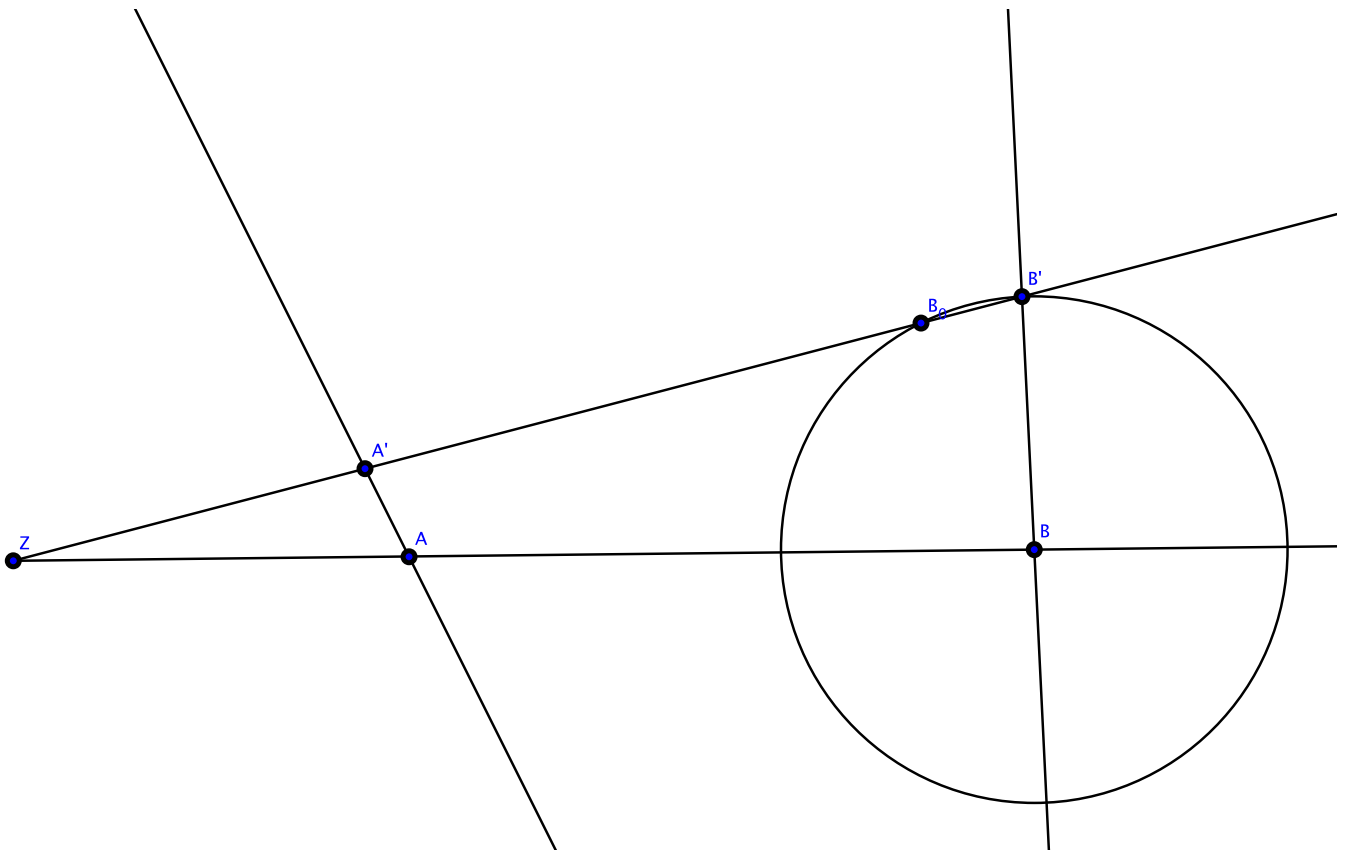


Abbildung 4.2: Zur Umkehrung des zweiten Strahlensatzes

Auf dieser Grundlage entwickeln wir jetzt unsere Geometrie.

Lemma 4.4 (Mittelsenkrechte). Seien A und B zwei verschiedene Punkte der Ebene. Wenn dann für einen Punkt C gilt, daß $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, dann liegt C auf der eindeutig bestimmten Geraden, die senkrecht auf der Geraden AB steht und durch den Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} verläuft (diese Gerade nennen wir Mittelsenkrechte von \overline{AB}).

Umgekehrt: wenn C auf der Mittelsenkrechten von \overline{AB} liegt, dann ist $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

Beweisskizze. Übungsaufgabe. Der erste Teil folgt aus dem zweiten und der Dreiecksungleichung, vgl. den Beweis zu Lemma 3.18. \square

Übungsaufgabe 4.1 (1. Mathematik–Olympiade 1961/62, Klassenstufe 8, Landkreisrunde). Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen.

Zur Klarstellung vereinbaren wir, daß Dreiecke gebildet werden von drei paarweise verschiedenen Punkten, die nicht auf derselben Geraden liegen.

Lemma 4.5 (Umkreismittelpunkt und Mittelsenkrechte). Die drei Mittelsenkrechten der drei Kanten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des eindeutig bestimmten Kreises, der durch die drei Ecken des Dreiecks geht (Umkreis des Dreiecks genannt).

Beweisskizze. Wir wählen zwei Mittelsenkrechten aus. Diese sind nicht parallel, denn die drei Ecken des Dreiecks liegen nicht auf derselben Geraden. Also schneiden diese beiden Mittelsenkrechten einander. Nun wende man die Transitivität der Streckenlängengleichheitsrelation an. \square

Analog zu Mittelsenkrechten auf Strecken betrachten wir Halbierende von Winkeln. Hierbei definieren wir den Abstand eines Punktes zu einer Geraden als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die Gerade. Ein Lot ist dadurch definiert, daß am Lotfußpunkt ein rechter Winkel besteht. Rechte Winkel sind dadurch definiert, daß sie zu ihrem Nebenwinkel kongruent sind (die häufig anzutreffende Definition eines rechten Winkels über die Größenangabe 90° geht am Kern der Sache vorbei). Der Außenwinkelsatz gibt uns die Eindeutigkeit des Lotes.

Lemma 4.6 (Halbierende eines Winkels). Seien \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} zwei verschiedenen Halbstrahlen in der Ebene, die einen Winkel zwischen sich bilden.

Wenn dann für einen Punkt C in diesem Winkel gilt, daß C von der Geraden OA denselben Abstand hat wie von der Geraden OB , dann ist $\angle BOC \cong \angle COB$ (dann liegt also C auf der Winkelhalbierenden).

Umgekehrt: wenn C auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BOA$ liegt, dann hat C von OA denselben Abstand wie von OB .

Beweisskizze. Übungsaufgabe. Der erste Teil folgt aus dem zweiten und der Dreiecksungleichung, vgl. den Beweis zu Lemma 3.18. \square

Lemma 4.7 (Inkreismittelpunkt). Die drei Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkte I . Es gibt genau einen Kreis (Inkreis des Dreiecks genannt), der jede Dreieckskante berührt. Dieser Kreis hat I als Mittelpunkt.

Beweisskizze. Übungsaufgabe. Man studiere den Beweis der Aussage über den gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. \square

Lemma 4.8 (Drei Ankreismittelpunkte). In jedem Dreieck gilt an jeder seiner Ecken, daß dort die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen. Weiterhin gilt mit einer Bezeichnung A, B, C für die Ecken (und a, b, c für die Kanten): die Innenwinkelhalbierende bei A und die beiden Außenwinkelhalbierenden bei B und bei C schneiden einander in einem Punkte I_A . Es gibt genau einen Kreis (Ankreis des Dreiecks genannt), der a berührt und die Verlängerungen von b und c auch berührt. Dieser Kreis hat I_A als Mittelpunkt.

Übungsaufgabe 4.2. Zeigen Sie, daß eine Gerade einen Kreis nicht in drei verschiedenen Punkten schneiden kann.

Definition 4.9. Eine Tangente an einem Kreis ist eine Gerade, die mit dem Kreis genau einen Punkt gemeinsam hat.

Lemma 4.10. *Es sei ω ein Kreis mit Mittelpunkt M , und sei $P \in \omega$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann: Wenn g eine Tangente an ω ist mit $P \in g$, dann ist $g \perp MP$.*

Umgekehrt: wenn g eine Gerade durch P ist mit $g \perp MP$, dann ist g eine Tangente an ω .

Beweis. Zur ersten Aussage: Wir fällen das Lot von M auf g , und der Lotfußpunkt heiße H . Im Fall $H = P$ ist nichts zu beweisen. Betrachte jetzt den Fall $H \neq P$. Dann ist $\triangle MHP$ ein Dreieck mit (positiven Kantenlängen und) rechtem Winkel bei H . Wir tragen die Strecke \overline{HP} entlang von g am Punkt H an und bekommen einen Punkt $P' \neq P$. Die Dreiecke $\triangle MHP$ und $\triangle MHP'$ sind kongruent wegen SWS. Also ist $|MP| = |MP'|$, womit auch P' auf ω liegt. Damit haben dann aber g und ω zwei Punkte gemeinsam, nämlich P und P' , Widerspruch zur Tangentendefinition.

Zum Beweis der zweiten Aussage nehmen wir an, daß g noch einen zweiten Punkt $P' \neq P$ mit dem Kreis ω gemeinsam hat. Dann ist $|MP| = |MP'|$, also ist das Dreieck $\triangle MPP'$ gleichschenkelig. Der Innenwinkel bei P ist 90° , und der Innenwinkel bei P' ebenfalls (Basiswinkelsatz). Wegen des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck kann dann der Innenwinkel bei M nur den Wert Null haben, also liegen M, P, P' auf einer Geraden. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $|PP'| = 0$, im Widerspruch zu $P \neq P'$. \square

Satz 4.11. *Sei ω ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , und sei A ein Punkt außerhalb von ω .*

Dann gibt es genau zwei Tangenten durch A an den Kreis ω . Die beiden Tangentenberührungspunkte sind von A gleich weit entfernt.

Die Aussage ist geometrisch plausibel und eine ideale Gelegenheit, das Führen von Beweisen zu üben.

Beweis. Sei g eine Tangente durch A an den Kreis ω . Dann hat g genau einen Punkt mit ω gemeinsam, den wir P taufen. Vom Dreieck $\triangle MPA$ sind dann drei Stücke bekannt: die Kantenlänge $|MP| = r$, die Kantenlänge $|MA|$, und der rechte Innenwinkel bei P . Weil A außerhalb des Kreises liegt, ist $|MA| > |MP|$.

Damit wird der Kongruenzsatz sSW anwendbar, und die Innenwinkel bei A und bei M sind eindeutig bestimmt. Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle M'P'A'$ aus den drei Stücken $|M'P'| = r$, $|M'A'| = |MA|$, und einem rechten Innenwinkel bei P' . Dieses Dreieck ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Den Innenwinkel bei A' nennen wir α , den bei M' nennen wir μ .

Dann muß der Innenwinkel im Dreieck $\triangle MPA$ bei A ebenfalls α sein, und der Innenwinkel bei M gleich μ . Es gibt genau zwei Möglichkeiten, ein solches Dreieck zu konstruieren, nämlich jeweils eins pro Halbebene, in die die Gerade MA die Ebene zerlegt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß man wirklich je eine Tangente erhält, wenn man diese Konstruktion vollzieht. Das ergibt sich aber aus dem zweiten Teil von Lemma 4.10. \square

Übungsaufgabe: *Finden Sie die Stelle, an der der Versuch einer analogen Beweisführung für den Fall, daß A innerhalb von ω liegt, zusammenbricht.*

Die folgenden Aufgaben vernetzen kongruente Dreiecke mit linearen Gleichungssystemen.

Übungsaufgabe 4.3 (10. Mathematikolympiade 1970/71, Klassenstufe 8, Schulrunde). *Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite \overline{AB} .*

Beweis: die Länge der Strecke \overline{AD} ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite \overline{BC} .

Übungsaufgabe 4.4. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Der Inkreis berühre die Kante \overline{BC} im Punkte P , und der an der Kante \overline{BC} anliegende Ankreis des Dreiecks berühre die Kante \overline{BC} in Q .*

Zeigen Sie, daß dann $|BP| = |QC|$.

Siehe auch Aufgabe A.6.

Durch Ähnlichkeitsbetrachtungen von Hilfsdreiecken zeigt man, daß bei jedem Dreieck mit Kantenlängen a, b, c und zugehörigen Höhenlängen h_a, h_b, h_c gilt: $ah_a = bh_b = ch_c$.

Durch Kongruenzbetrachtungen geeigneter Hilfsdreiecke zeigt man, daß kongruente Dreiecke auch kongruente Höhen haben.

Satz 4.12 (Kathetensatz). *Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C und Kantenlängen a, b, c in üblicher Bezeichnungsweise. Der Höhenfußpunkt der Höhe durch C sei H_C . Sei $q := |BH_C|$. Dann gilt $a^2 = qc$.*

Beweisskizze. Wir errichten über der Kante \overline{BC} ein Quadrat nach außen, dessen Ecken wir (bei kreisförmigem Durchlauf des Kantenzugs) mit $BCDE$ bezeichnen. Über der Strecke $\overline{H_C B}$ errichten wir ein Rechteck nach außen, das die Kantenlängen $|H_C B|$ und c hat. Dieses Rechteck heiße $H_C BFG$. Die Dreiecke $\triangle FBC$ und $\triangle ABE$ sind wegen SWS kongruent, haben also gleichlange einander entsprechende Höhen. Im Dreieck $\triangle FBC$ hat die der Kante $c = |FB|$ zugehörige Höhe die Länge q , und im Dreieck $\triangle ABE$ hat die der Kante $a = |BE|$ zugehörige Höhe die Länge a . Also ist $aq = a^2$. \square

Korollar 4.13 (Pythagoras). *In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat genauso groß wie die Summe der Kathetenquadrate.*

Übungsaufgabe 4.5. *Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras: wenn für die Kantenlängen a, b, c eines Dreiecks gilt, daß $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist dieses Dreieck rechtwinklig, und c liegt dem rechten Winkel gegenüber.*

Satz 4.14 (Höhensatz). *In jedem rechtwinkligen Dreieck (mit den Bezeichnungen wie in Satz 4.12) gilt $|AH_C| \cdot |H_C B| = |CH_C|^2$.*

Beweisskizze. Man untersuche die Dreiecke $\triangle ACH_C$ und $\triangle BCH_C$ auf Ähnlichkeit. \square

Formulierung und Beweis von Umkehrungen zu Kathetensatz und Höhensatz bleiben den Studierenden überlassen, zum Zwecke des Trainierens der Kommunikationskompetenz.

Definition 4.15 (Winkelnotation). *Seien O, A, B verschiedene Punkte in der Ebene. Unter der Formulierung $\alpha = \angle AOB$ verstehen wir folgendes: wenn der Strahl \overrightarrow{OA} im Punkt O um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn gedreht wird, dann liegt dessen Bild auf dem Strahle \overrightarrow{OB} .*

Im Unterschied zu [9] lassen wir also ab jetzt auch Winkel mit Größen zwischen 180° und 360° zu.

Weiterhin unterscheiden wir zwar bei Strecken zwischen der Strecke (z.B. \overline{AB}) als geometrischem Objekt und deren Länge $|AB|$ als Maßzahl. Wir verzichten aber darauf, bei Winkeln gleichermaßen zu unterscheiden zwischen dem geometrischen Objekt und einer Maßzahl als Winkelgröße.

Wir kommen zu einem ersten Höhepunkt der Kreisgeometrie, aus dem dann weitere Sätze sich durch einfachste Folgerungen ergeben:

Satz 4.16 (Peripherie–Zentri–Winkelsatz). *Sei ω ein Kreis mit Mittelpunkt M , und seien A, B, C Punkte auf ω . Dann ist $\angle AMB = 2\angle ACB$.*

Beweis. Wir betrachten die Gerade CM , die den Kreis ω in einem weiteren Punkte C' schneidet. Basiswinkelsatz im und Außenwinkelsatz am Dreieck $\triangle AMC$ liefern uns $\angle AMC' = 2\angle ACM$. Analog folgt $\angle C'MB = 2\angle MCB$ durch Basiswinkelsatz im und Außenwinkelsatz am Dreieck BMC . Je nachdem, ob M im Winkelfeld des Winkels $\angle ACB$ liegt oder nicht, addiert bzw. subtrahiert man diese beiden Gleichungen, woraus die Behauptung folgt. \square

Die einfachsten Folgerungen sind dann:

Korollar 4.17 (Satz des Thales). *Sei ein Halbkreisbogen über der Strecke \overline{AB} gegeben. Mit dieser Bezeichnung gilt: wenn C auf dem Halbkreisbogen liegt, dann ist $\triangle ABC$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C .*

Beweis. Der Zentriwinkel beträgt 180° , und 90 ist die Hälfte von 180 . \square

Korollar 4.18 (Peripheriewinkelsatz). *Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen sind gleich. Oder genauer: sei ω ein Kreis, und seien A, B, C, D verschiedene Punkte auf ω , sodaß C und D auf derselben Seite der Geraden AB liegen. Dann ist $\angle ACB = \angle ADB$.*

Korollar 4.19 (Gegenwinkel im Sehnenviereck). *In jedem Sehnenviereck (also einem konvexen Viereck, das einen Umkreis besitzt) ergänzen gegenüberliegende Innenwinkel einander zu 180° .*

Beweis. Die zugehörigen Zentriwinkel ergänzen einander zu 360° , und 180 ist die Hälfte von 360 . \square

Für alle diese Sätze gelten auch die Umkehrungen, von denen wir einige zeigen:

Satz 4.20 (Umkehrung des Thalesatzes). *Sei ein Halbkreisbogen über der Strecke \overline{AB} gegeben. Mit dieser Bezeichnung gilt: wenn $\triangle ABC$ rechtwinklig ist mit rechtem Winkel bei C , dann liegt C auf dem Halbkreisbogen.*

Beweis. Sei M der Mittelpunkt von \overline{AB} . Es ist M der Mittelpunkt des Halbkreisbogens, und es reicht zu zeigen, daß $|MC| = |MA|$, also daß M der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist. Nun ist wegen Lemma 4.5 der Umkreismittelpunkt aber stets gleich dem gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Wegen der Rechtwinkligkeit von $\triangle ABC$ und des ersten Strahlensatzes schneiden jedoch die drei Mittelsenkrechten von $\triangle ABC$ einander in M . \square

Satz 4.21 (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes). *Seien A, B, C, D verschiedene Punkte mit $\angle ACB = \angle ADB \notin \{0^\circ, 180^\circ\}$, wobei C und D auf derselben Seite der Geraden AB liegen. Dann gibt es einen Kreis, auf dem alle vier Punkte liegen.*

Beweis. Wir betrachten den Kreis durch die Punkte A, B, C .

Fall 1: D liegt auf diesem Kreis: dann ist nichts mehr zu tun.

Fall 2: D liegt außerhalb dieses Kreises: dann vergrößern wir den Kreis, in dem wir seinen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu \overline{AB} von der Geraden AB wegschieben, sodaß der Kreis aber immer durch die Punkte A und B verläuft. Weil C und D auf derselben Seite der Geraden AB liegen, liegt dann irgendwann D auf dem Kreise und C in seinem Innern. Die weitere Diskussion verläuft wie im Fall 3.

Fall 3: D liegt innerhalb dieses Kreises ω : wir verlängern die Strecke \overline{AD} über D hinaus, bis wir den Kreis ω treffen. Es ergibt sich ein Punkt D' . Laut Voraussetzung ist $\angle ADB = \angle ACB$, und laut Peripheriewinkelsatz ist $\angle ACB = \angle AD'B$. Also ist $\angle ADB = \angle AD'B$. Laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes sind dann die Geraden DB und $D'B$ parallel. Beide Geraden laufen durch B , also sind die Geraden gleich, also liegen D, D' und B auf einer Geraden. Auf der Geraden durch D und D' liegt aber auch A , also liegen A, D, B auf einer Geraden, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Korollar 4.22. *Die Umkehrung des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt.*

Wir können im Peripheriewinkelsatz auch zulassen, daß C und D auf verschiedenen Seiten von AB liegen, wenn wir die Winkelgleichheitsrelation abschwächen. Der entstehende Satz kann als eine Vereinigung vom Peripheriewinkelsatz und vom Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck angesehen werden:

Satz 4.23. *Seien A, B, C, D verschiedene Punkte. Dann gibt es genau dann einen Kreis durch diese vier Punkte, wenn $\angle ACB \equiv \angle ADB \pmod{180^\circ}$. Hierbei erfolgt die Winkelmessung (wie immer) gemäß Definition 4.15.*

Die Umkehrung zum Peripherie-Zentri-Winkelsatz läßt sich mittels der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes sehr schnell beweisen.

Satz 4.24 (Sehnen-Tangentenwinkelsatz). *Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf einem Kreis ω . Die Sehne \overline{AB} und die Tangente in A schließen einen Winkel kleiner als 90° ein, den wir α nennen. Dann hat jeder Winkel über der Sehne \overline{AB} ebenfalls die Größe α oder $180^\circ - \alpha$.*

Damit verfügen wir über mehrere Werkzeuge, in einer geometrischen Konfiguration einen Winkel woanders mit gleicher Größe wiederzufinden. Diese Methode wird im Jargon auch als *Winkeljagd* bezeichnet. Siehe dazu die Übungsaufgaben [A.9](#), [A.12](#), [A.13](#).

Satz 4.25 (Sekantensatz mit Umkehrung). *Seien \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} verschiedene Strahlen, auf denen jeweils noch ein weiterer Punkt A' bzw. B' liegen möge.*

Wenn A , A' , B , B' auf einem Kreis liegen, dann ist $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$, und umgekehrt.

Beweisskizze. Peripheriewinkelsatz, Jagd nach gleichen Winkeln, ähnliche Dreiecke. □

Analog beweisen sich die beiden folgenden Ergebnisse.

Satz 4.26 (Sehnen–Tangentensatz mit Umkehrung). *Sei \overrightarrow{OA} ein Strahl mit einem weiteren Punkt A' darauf, und sei T ein weiterer Punkt, der nicht auf der Geraden AA' liegt.*

Wenn T , A , A' auf einem Kreis liegen, für den OT eine Tangente ist, dann ist $|OA| \cdot |OA'| = |OT|^2$, und umgekehrt.

Satz 4.27 (Sehnensatz mit Umkehrung). *Seien \overline{AC} und \overline{BD} zwei Strecken, die einander in einem inneren Punkt P schneiden.*

Wenn A , B , C , D auf einem Kreis liegen, dann ist $|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|$, und umgekehrt.

Übungsaufgabe: (14. Mathematik–Olympiade 1974/1975, Klassenstufe 9, Landkreisrunde)

Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck. Die Höhenfußpunkte sollen H_A , H_B , H_C (in naheliegender Bezeichnungsweise) heißen. Der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AH_A}$ und $\overline{BH_B}$ heiße S . Dann ist $|AS| \cdot |SH_A| = |BS| \cdot |SH_B|$.

Beachte, daß daraus keineswegs folgt, daß die drei Höhen einander in einem Punkt schneiden. Der Satz über den gemeinsamen Höhenschnittpunkt wird uns instantan entgegenpurzeln, wenn wir demnächst den Satz des CEVA in seiner trigonometrischen Form zeigen. Es gibt aber auch einen Beweis zu Fuß:

Satz 4.28 (Höhenschnittpunkt). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, und seien h_A , h_B , h_C die Höhengeraden durch die Ecken A , B , C . Dann schneiden h_A , h_B , h_C einander in einem Punkte.*

Beweis. Die drei Höhenfußpunkte taufen wir H_A , H_B , H_C .

Wir unterscheiden drei Fälle:

Sei $\triangle ABC$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei A : die drei Höhen verlaufen durch den Punkt A .

Sei $\triangle ABC$ spitzwinklig: dann sind die Geraden h_A , h_B , h_C genau die Winkelhalbierenden im Dreieck $\triangle H_A H_B H_C$, siehe Übungsaufgabe [A.9](#)¹. Aus Lemma [4.7](#) folgt die Behauptung.

Sei $\triangle ABC$ stumpfwinklig mit stumpfem Winkel bei A : es liegt H_A zwischen B und C , und es liegt A zwischen H_B und C , und A liegt auch zwischen B und H_C . Wir haben

- ein Sehnenviereck $AH_C CH_A$ im Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{AC} ,
- ein Sehnenviereck $BH_B AH_A$ im Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{BA} ,
- ein Sehnenviereck $CH_C H_B B$ im Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{CB} .

¹Dies war im Schuljahr 1970/1971 eine Aufgabe in der Bezirksrunde der Mathematikolympiade für die Klassenstufe 8.

Der Peripheriewinkelsatz (zweimal) gibt uns

$$\begin{aligned}\gamma &= \angle H_A C A = \angle H_A H_C A, \\ \gamma &= \angle B C H_B = \angle B H_C H_B,\end{aligned}$$

also ist $\angle H_A H_C H_B = 2\gamma$, und dieser Winkel wird halbiert von der Geraden c .

Analog ist $\angle H_C H_B H_A = 2\beta$, und dieser Winkel wird halbiert von der Geraden b .

Der Innenwinkelsummensatz in $\triangle A H_C C$ liefert $\angle A C H_C = 90^\circ - \alpha$, und der Peripheriewinkelsatz bringt uns dann zu $\angle A H_A H_C = \angle A C H_C = 90^\circ - \alpha$.

Analog ist $\angle H_B H_A A = 90^\circ - \alpha$.

Es folgt $\angle H_B H_A H_C = 2 \cdot (90^\circ - \alpha)$, und dieser Winkel wird halbiert von der Höhengeraden h_a .

Wir betrachten $\triangle H_A H_B H_C$: es ist h_a die Innenwinkelhalbierende bei H_A ; h_b ist wegen Lemma 4.8 die Außenwinkelhalbierende bei H_B , und analog ist h_c die Außenwinkelhalbierende bei H_C .

Wegen Lemma 4.8 schneiden also h_a, h_b, h_c einander in einem Punkt, und dieser ist der Mittelpunkt des Ankreises des Dreiecks $H_A H_B H_C$ zur Kante $\overline{H_B H_C}$.

□

Dieser Tanz mit drei Sehnenvierecken war so erfrischend, daß wir gleich noch eine Runde drehen wollen:

Satz 4.29 (Simson–Gerade²). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, auf dessen Umkreis noch ein weiterer Punkt P liege. Die Lotfußpunkte von P auf die Geraden AB, BC, CA sollen C', A', B' heißen.

Dann liegen A', B', C' auf einer Geraden.

Übungsaufgabe: Visualisieren Sie diese Konfiguration mit Software zur dynamischen Geometrie, wie z.B. GeoGebra.

Zum Beweis brauchen wir ein kleines Hilfsergebnis: seien U, V, W, X vier verschiedene Punkte. Dann gilt:

$$U, V, W \text{ kollinear} \iff \angle XVU \equiv \angle XVW \pmod{180^\circ}, \quad (4.1)$$

und zwar unabhängig davon, wer von den Punkten U, V, W zwischen den beiden anderen liegt.

Beweis. Zunächst formen die Punkte A, B, C, P ein Sehnenviereck.

Weiterhin ist $PA' \perp BC$, also auch $PA' \perp BA'$. Analog ist $PC' \perp AB$, also auch $PC' \perp BC'$. Also liegen C' und A' auf dem Thaleskreise über der Strecke \overline{BP} , und deshalb formen die Punkte B, A', P, C' ein Sehnenviereck.

Mit entsprechenden Begründungen erkennt man, daß auch die Punkte B', A, P, C' ein Sehnenviereck bilden, und die Punkte B', A', P, C ebenfalls.

Dann haben wir

$$\begin{array}{l|l} \angle PA'C' \equiv \angle PBC' \pmod{180^\circ} & (B, A', P, C' \text{ bilden Sehnenviereck}) \\ \equiv \angle PBA \pmod{180^\circ} & (4.1) \\ \equiv \angle PCA \pmod{180^\circ} & (A, B, C, P \text{ bilden Sehnenviereck}) \\ \equiv \angle PCB' \pmod{180^\circ} & (4.1) \\ \equiv \angle PA'B' \pmod{180^\circ} & (B', A', P, C \text{ bilden Sehnenviereck}). \end{array}$$

Wegen (4.1) sind dann A', B', C' tatsächlich kollinear. □

² angeblich von Robert Simson (1687–1768), tatsächlich aber 1797 von William Wallace (1768–1843) entdeckt.

4.2 Die Theoreme von Ceva und Menelaos ☹

Das Konzept der *gerichteten Streckenlänge* vereinfacht einiges:

Definition 4.30. Sei g eine Gerade, die wir mit einer Orientierung ausstatten. Das heißt, wir legen einen Vektor $\vec{b} \neq \vec{0}$ fest, der parallel zu g zeigt. Die zu g parallelen Geraden statten wir auch mit \vec{b} aus.

Wenn A und B zwei Punkte auf g sind, dann definieren wir die gerichtete Streckenlänge $[AB] := |\overrightarrow{AB}|$, wenn der Vektor \overrightarrow{AB} in dieselbe Richtung zeigt wie \vec{b} , und wir definieren $[AB] := -|\overrightarrow{AB}|$, wenn \overrightarrow{AB} in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie \vec{b} .

Die gerichteten Streckenlängen sind reelle Zahlen. Wir vereinbaren, daß wir solche Streckenlängen addieren/subtrahieren/multiplizieren/dividieren können, wenn sie von Strecken stammen, die auf derselben oder auf zueinander parallelen Geraden liegen. Falls die zugrundeliegenden Geraden nichtparallel zueinander sind, sollen gerichtete Streckenlängen nicht miteinander verrechnet werden können.

Der Vorteil ist jetzt z.B., daß für drei Punkte A, B, C auf derselben Geraden stets gilt, daß $[AB] + [BC] = [AC]$. Für die traditionellen Streckenlängen gilt dies offensichtlich nur, wenn B zwischen A, C liegt.

Lemma 4.31. Für das Teilverhältnis aus Definition 2.12 gilt

$$\text{TV}(A, B; C) = \frac{[AC]}{[CB]} = \frac{[CA]}{[BC]}.$$

Theorem 4.32 (Menelaos (100 n.Chr.)). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, dessen Kantengeraden a, b, c in üblicher Weise benannt sind (a liegt A gegenüber usw.).

Für eine beliebige Gerade p in der Ebene definieren wir drei Punkte A', B', C' wie folgt:

$$\{A'\} := p \cap a, \quad \{B'\} := p \cap b, \quad \{C'\} := p \cap c.$$

Dann ist

$$\frac{[AB']}{[B'C]} \cdot \frac{[CA']}{[A'B]} \cdot \frac{[BC']}{[C'A]} = -1.$$

Die Multiplikationen links sind Multiplikationen von reellen Zahlen, nicht von gerichteten Streckenlängen.

Beweis. Die Lote von A, B, C auf p taufen wir A'', B'', C'' . Dann liefert uns der Strahlensatz, daß

$$\begin{aligned} \frac{[AB']}{[B'C]} &= -\frac{[AA'']}{[CC'']}, \\ \frac{[CA']}{[A'B]} &= -\frac{[CC'']}{[BB'']}, \\ \frac{[BC']}{[C'A]} &= -\frac{[BB'']}{[AA'']}. \end{aligned}$$

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt die Behauptung. □

Die Umkehrung gilt, was wir aber nicht beweisen werden.

Theorem 4.33 (Ceva (1647–1734)). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, dessen Kantengeraden a, b, c in üblicher Weise benannt sind (a liegt A gegenüber usw.).

Für einen beliebigen Punkt P in der Ebene definieren wir drei Geraden a', b', c' wie folgt:

$$a' := PA, \quad b' := PB, \quad c' := PC.$$

Anschließend definieren wir drei Hilfspunkte $\{\tilde{A}\} := a \cap a', \{\tilde{B}\} := b \cap b', \{\tilde{C}\} := c \cap c'$.

Dann ist

$$\frac{[A\tilde{B}]}{[C\tilde{B}]} \cdot \frac{[C\tilde{A}]}{[A\tilde{A}]} \cdot \frac{[B\tilde{C}]}{[C\tilde{A}]} = +1.$$

Hierbei (und für den Rest dieses Kapitels) nehmen wir an: überall, wo vom Schnittpunkt zweier Geraden die Rede ist, gilt die ungeschriebene Zusatzvoraussetzung, daß diese Geraden einander nicht parallel sein mögen (in der projektiven Geometrie werden wir diese nervige Zusatzvoraussetzung loswerden).

Beweis. Wir wenden das Theorem des Menelaos auf das Dreieck $\triangle AC\tilde{A}$ an, welches von der Geraden durch \tilde{B} , P , B geschnitten wird. Dann ist

$$\frac{|\tilde{A}\tilde{B}|}{|\tilde{B}C|} \cdot \frac{|CB|}{|B\tilde{A}|} \cdot \frac{|\tilde{A}P|}{|PA|} = -1.$$

Anschließend wenden wir das Theorem des Menelaos auf das Dreieck $\triangle A\tilde{A}\tilde{B}$ an, welches von der Geraden durch \tilde{C} , C , P geschnitten wird:

$$\frac{|B\tilde{C}|}{|\tilde{C}A|} \cdot \frac{|AP|}{|P\tilde{A}|} \cdot \frac{|\tilde{A}C|}{|CB|} = -1.$$

Wir multiplizieren diese beiden Gleichungen und sind dann schnell fertig. \square

Es ist eine schöne Übungsaufgabe sich zu überlegen, wie die Umkehrung des Theorems von Ceva mithilfe desselben bewiesen werden kann. Die Umkehrung wurde schon von YUSUF AL-MU'TAMAN IBN HUD (≈ 1080) gefunden [10], einem maurischen König von Zaragoza.

In einem gewissen Sinne sind das Theorem von Menelaos und das Theorem von Ceva **dual** zueinander. Darunter wollen wir verstehen, daß sich das eine Theorem aus dem anderen (fast) ergibt, in dem man konsequent die Begriffe gegeneinander austauscht wie folgt:

$$\text{Punkt} \longleftrightarrow \text{Gerade}, \quad \text{Schnittpunkt} \longleftrightarrow \text{Verbindungsgerade}$$

Der tiefere Grund, warum diese Dualität nicht ganz aufgeht (und weshalb wir die getildeten Hilfspunkte einführen mußten), liegt darin, daß wir zwar ein Teilverhältnis von drei Punkten auf einer Geraden eingeführt hatten, aber kein Teilverhältnis von drei Geraden durch einen Punkt.

Diese beiden Theoreme (bzw. deren Umkehrungen) sind oft die leistungsfähigsten Verfahren, um zu zeigen, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen, oder daß drei Geraden durch einen Punkt gehen.

Übungsaufgabe: Zeigen Sie, daß die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks einander immer in einem Punkte schneiden (dieser Schnittpunkt wird Schwerpunkt des Dreiecks genannt).

Um den angekündigten Beweis des Satzes über den gemeinsamen Höhenschnittpunkt zu erhalten, bringen wir das Theorem von Ceva (mit Umkehrung) noch in eine etwas andere Form:

Satz 4.34 (Theorem von Ceva in trigonometrischer Form). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, und seien g , h , k drei Geraden durch die Punkte A bzw. B bzw. C . Die Schnittpunkte der Geraden mit den gegenüberliegenden Strecken seien

$$g \cap \overline{BC} =: \{X\}, \quad h \cap \overline{CA} =: \{Y\}, \quad k \cap \overline{AB} =: \{Z\}.$$

Es schneiden dann die Geraden g , h , k einander genau dann in einem Punkte, wenn

$$\frac{\sin \angle ACZ}{\sin \angle ZCB} \cdot \frac{\sin \angle BAX}{\sin \angle XAC} \cdot \frac{\sin \angle CBY}{\sin \angle YBA} = 1.$$

Beweis. Es ist X zwischen B , C ; und Y zwischen C , A ; und Z zwischen A , B . Also schneiden einander g , h , k genau dann in einem Punkte, wenn für die traditionellen Streckenlängen gilt, daß

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = +1.$$

Die Quotienten von Streckenlängen auf den Grundseiten sind gleich den Quotienten der Flächeninhalte der darüber errichteten Dreiecke. Sei \mathcal{F} das Flächeninhaltsfunktional. Dann ist

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} = \frac{\mathcal{F}(\triangle ACZ)}{\mathcal{F}(\triangle BCZ)}, \quad \frac{|BX|}{|XC|} = \frac{\mathcal{F}(\triangle BAX)}{\mathcal{F}(\triangle CAX)}, \quad \frac{|CY|}{|YA|} = \frac{\mathcal{F}(\triangle CBY)}{\mathcal{F}(\triangle ABY)}.$$

Weiterhin haben wir $\mathcal{F}(\triangle AZC) = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CZ| \sin \angle(ACZ)$ und so weiter, also schneiden einander g , h , k genau dann in einem Punkte, wenn

$$\frac{|AC| \cdot |CZ| \sin \angle ACZ}{|BC| \cdot |CZ| \sin \angle ZCB} \cdot \frac{|BA| \cdot |AX| \sin \angle BAX}{|CA| \cdot |AX| \sin \angle XAC} \cdot \frac{|CB| \cdot |BY| \sin \angle CBY}{|AB| \cdot |BY| \sin \angle YBA} = 1.$$

Das ist offensichtlich äquivalent zur Behauptung. \square

Eine Verallgemeinerung dieses Theorems auf „auswärtige Schnittpunkte“ X , Y oder Z sei den Studierenden als Übungsaufgabe ans Herz gelegt.

Satz 4.35. *In jedem Dreieck schneiden die Höhen einander in einem Punkte.*

Beweisskizze. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Theorem 4.34 und stellen fest, daß von den in der dortigen Behauptung auftauchenden sechs Winkeln jeweils zwei gleich groß sind. \square

Übungsaufgabe 4.6. *Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis ein Höhenfußpunkt seine Kante teilt.*

Der tragende Gedanke im letzten Beweis war die Äquivalenz von Streckenlängenquotienten und Flächeninhaltsquotienten. Dieser Gedanke kann noch einiges mehr:

Satz 4.36 (9. Mathematik–Olympiade 1969/70, Klassenstufe 8, Kreisrunde). *In jedem Dreieck teilt jede Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

Beweis. Das Dreieck heiße $\triangle ABC$, und sei AX die Winkelhalbierende des Winkels bei A , mit X auf der Strecke \overline{BC} . Zu zeigen ist dann, daß

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Es bezeichne $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ den Abstand eines Punktes zu einer Geraden. Dann ist

$$\frac{|BX|}{|XC|} = \frac{\frac{1}{2}|BX| \cdot \text{dist}(A, BC)}{\frac{1}{2}|XC| \cdot \text{dist}(A, BC)} = \frac{\mathcal{F}(\triangle AXB)}{\mathcal{F}(\triangle AXC)} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot \text{dist}(X, AB)}{\frac{1}{2}|AC| \cdot \text{dist}(X, AC)} = \frac{|AB| \cdot \text{dist}(X, AB)}{|AC| \cdot \text{dist}(X, AC)}.$$

Da X auf der Winkelhalbierenden durch A liegt, ist aber $\text{dist}(X, AB) = \text{dist}(X, AC)$, siehe Lemma 4.6. \square

Korollar 4.37. *In jedem Dreieck schneiden die Winkelhalbierenden einander in einem Punkte.*

Lemma 4.38. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, und der Inkreis berühre die Seiten \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} in den Punkten D , E , F . Dann schneiden die Geraden AD , BE , CF einander in einem Punkte.*

Dieser Punkt heißt *Gergonne–Punkt*, nach JOSEPH DIAZ GERGONNE, (1771–1859).

Beweisskizze. Letzte Behauptung aus Satz 4.11, und die Umkehrung des Theorems von Ceva. \square

Lemma 4.39. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, und die Ankreise berühren die Strecken \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} in den Punkten D' , E' , F' . Dann schneiden die Geraden AD' , BE' , CF' einander in einem Punkte.*

Dieser Punkt heißt *Nagel–Punkt*, nach CHRISTIAN HEINRICH VON NAGEL, (1803–1882).

Beweiserleichterung. Siehe Aufgabe A.8. \square

Definition 4.40. *Auf den Kanten \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} eines Dreiecks $\triangle ABC$ seien Punkte D , E , F gegeben, sodaß die Ecktransversalen AD , BE , CF einander in einem Punkte P schneiden.*

Sei $D' \in BC$ derjenige Punkt, der sich ergibt als Spiegelung von D am Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} , und analog seien E' und F' definiert. Dann heißt der Schnittpunkt P' der Ecktransversalen AD' , BE' , CF' der zu P isotomisch konjugierte Punkt.

In diesem Sinne sind also der Nagel–Punkt und der Gergonne–Punkt zueinander isotomisch konjugiert.

Lemma 4.41. *Der Nagel-Punkt N , der Inkreismittelpunkt I und der Schwerpunkt S liegen auf einer Geraden, S zwischen I und N , und es ist $|IS| : |SN| = 1 : 2$.*

Beweis. Siehe [4], Kapitel V.5. □

Lemma 4.42. *Seien g, h, k Ecktransversalen durch die Ecken A, B, C eines Dreiecks $\triangle ABC$. Wir setzen voraus, daß g, h und k einander in einem Punkte P schneiden.*

Dann schneiden auch die Spiegelbilder g', h', k' der Ecktransversalen g, h, k an den entsprechenden Winkelhalbierenden einander in einem Punkte P' .

Man spricht dann davon, daß P und P' *isogonal konjugiert* zueinander sind.

Ein Beispiel dafür sind der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt, die zueinander isogonal konjugiert sind (vgl. Übungsaufgabe A.15).

4.3 Die Theoreme von Ptolemaios, Pappos, Pascal

Sehnenvierecke (also konvexe Vierecke mit Umkreis) lassen sich dadurch charakterisieren, daß die Summen diagonal gegenüberliegender Innenwinkel gleich sind, im Sinne von $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, bei Verwendung allgemeingebräuchlicher Notation.

Eine analoge Beschreibung gibt es auch für *Tangentenvierecke*, deren Beweis eine Übungsaufgabe ist:

Satz 4.43. *Ein Viereck $ABCD$ heißt Tangentenviereck, wenn es einen Inkreis besitzt, also einen Kreis im Innern des Vierecks, der die Gerade AB zwischen A und B berührt, und die Gerade BC zwischen B und C , und entsprechend für die Gerade CD und die Gerade DA .*

Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck.

Zeigen Sie: dieses Viereck ist ein Tangentenviereck genau dann, wenn für die Kantenlängen gilt: $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

Bei Sehnenvierecken lassen sich die Diagonalenlängen aus den Seitenlängen ermitteln: Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 4.3 ist $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$ und $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta$, $\cos \delta = -\cos \beta$, was wir auch schreiben können als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2ab \\ 1 & -2cd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 \\ \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 \\ c^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

und aus diesem linearen Gleichungssystem entsteht dann

$$e^2 = \frac{(c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd}{ab + cd} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

und ganz analog ergibt sich

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Daraus bekommen wir schließlich $ac + bd = ef$.

Satz 4.44 (Satz des Ptolemaios ($\approx 100 - \approx 175$)). *In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Kantenlängen gleich dem Produkt der Diagonalenlängen.*

Dazu gibt es noch einen rein geometrischen Beweis ohne Winkelfunktionen, für den wir auf [1] verweisen. Für Vierecke, die keine Sehnenvierecke sind, gilt immer $ac + bd > ef$.

Lemma 4.45 (USA-Mathematikolympiade 1999). *Es seien a, c bzw. b, d die Paare gegenüberliegender Kantenlängen eines Sehnenvierecks, und es seien e, f die Längen der Diagonalen.*

Zeigen Sie, daß dann $|a - c| + |b - d| \geq 2|e - f|$ gilt.

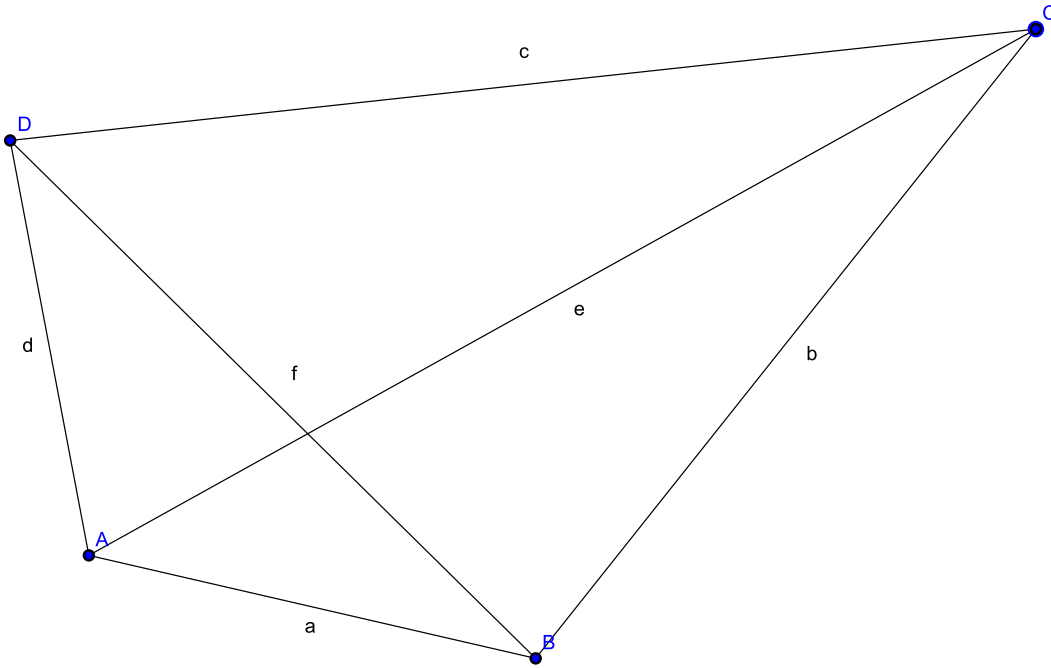


Abbildung 4.3: Ein Sehnenviereck

Beweis. Man überlegt sich, daß man aus Kanten der Längen a, b, c, d noch zwei weitere Sehnenvierecke bauen kann: eines, dessen Kantenzug lautet $acbd$ mit den Diagonalenlängen f und g , und ein weiteres, dessen Kantenzug lautet $acdb$ mit den Diagonalenlängen g und e . Der Satz des Ptolemaios lautet in diesen anderen Sehnenvierecken $ab + cd = fg$ sowie $ad + bc = ge$.

Die Behauptung wäre bewiesen, wenn es gelänge zu zeigen, daß $|a - c| \geq |e - f|$. Denn dann beweist sich $|b - c| \geq |e - f|$ genauso, und die Behauptung ergäbe sich durch Addition.

Nun gibt es aber im zweiten und dritten Sehnenviereck ein Dreieck mit den Kantenlängen b, d, g , woraus wir $g \geq |d - b|$ bekommen. Es folgt dann

$$\begin{aligned} |a - c| \cdot g &\geq |a - c| \cdot |d - b| \\ \implies |a - c| \cdot g &\geq |ad + cb - ab - cd| = |ge - fg| = |e - f| \cdot g, \end{aligned}$$

also auch $|a - c| \geq |e - f|$, wie wir es haben wollten. \square

Theorem 4.46 (Pappos (≈ 300 n.Chr.)). Wenn die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen, dann sind die Schnittpunkte gegenüberliegender Sechsecksseitengeraden kollinear.

In Abbildung 4.4 sind die beiden Geraden gegeben durch ABC und DEF . Der Kantenzug des Sechsecks ist $AECDBF$, und der Seite AE liegt die Seite DB gegenüber (Schnittpunkt U), der Seite EC liegt die Seite BF gegenüber (Schnittpunkt W), und schließlich liegt der Seite CD die Seite FA gegenüber (Schnittpunkt V).

Der Beweis besteht in (zugegebenermaßen höchst phantasievollem und) ausgiebigem Einsatz des Theorems von Menelaos:

Beweis. Wir definieren einige Schnittpunkte:

$$\{K\} := AF \cap CE, \quad \{L\} := BD \cap FA, \quad \{M\} := BD \cap CE.$$

Auf das Dreieck $\triangle KLM$ wird jetzt fünfmal das Theorem von Menelaos angewandt, mit jeweils unter-

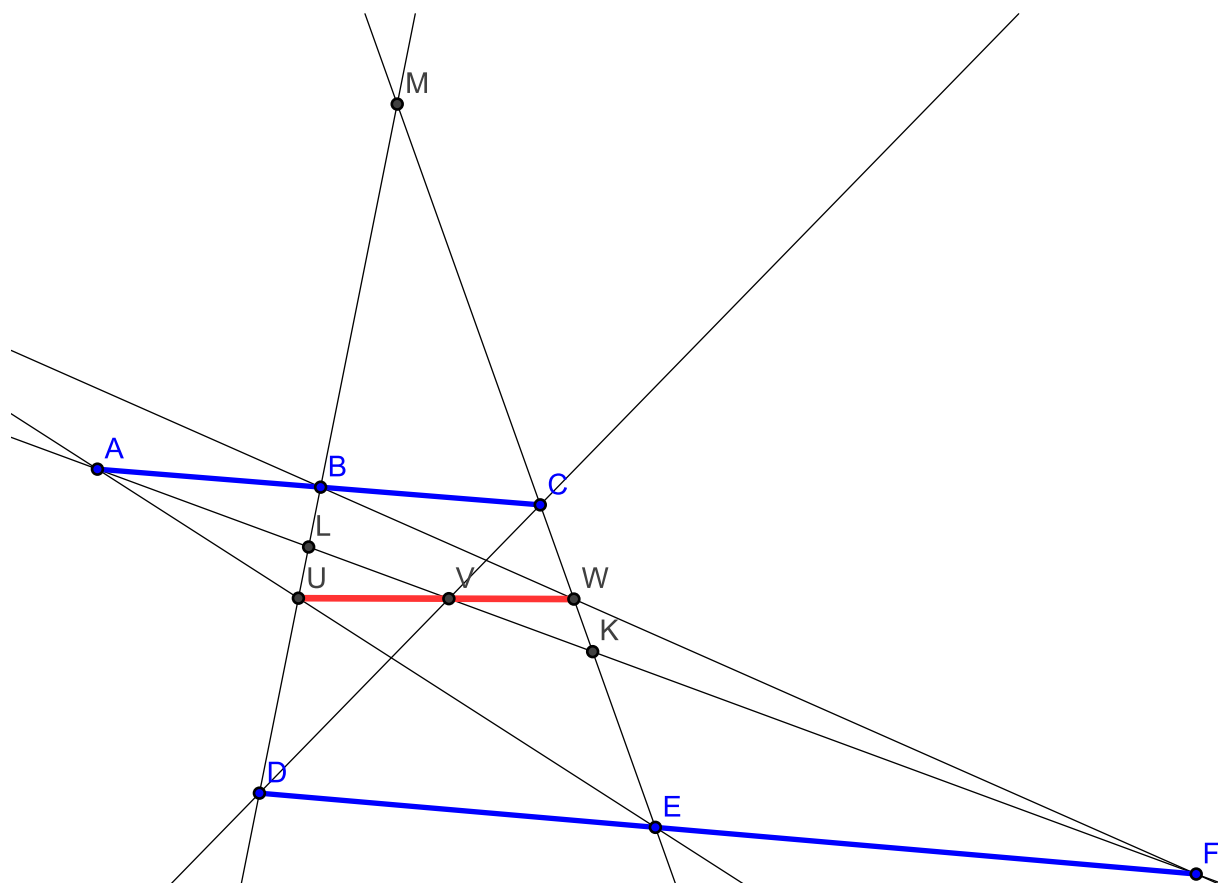


Abbildung 4.4: Zum Theorem von PAPPUS

schiedlichen Geraden:

$$\begin{array}{l|l} \frac{[LU]}{[UM]} \cdot \frac{[ME]}{[EK]} \cdot \frac{[KA]}{[AL]} = -1 & \text{(mit der Geraden } UEA), \\ \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \frac{[KF]}{[FL]} \cdot \frac{[LB]}{[BM]} = -1 & \text{(mit der Geraden } WFB), \\ \frac{[KV]}{[VL]} \cdot \frac{[LD]}{[DM]} \cdot \frac{[MC]}{[CK]} = -1 & \text{(mit der Geraden } VDC), \\ \frac{[LA]}{[AK]} \cdot \frac{[KC]}{[CM]} \cdot \frac{[MB]}{[BL]} = -1 & \text{(mit der Geraden } ACB), \\ \frac{[LF]}{[FK]} \cdot \frac{[KE]}{[EM]} \cdot \frac{[MD]}{[DL]} = -1 & \text{(mit der Geraden } FED). \end{array}$$

Multiplikation aller Gleichungen liefert dann bald die Behauptung, über die Umkehrung des Theorems von Menelaos. \square

Theorem 4.47 (Pascal). *Die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seitengeraden eines Sehnensechsecks in einem Kreis sind kollinear.*

Dieses Sehnensechseck kann konvex sein oder auch beliebig überschlagen, vgl. die Abbildungen. Die Aussage gilt sogar für beliebige sechs Punkte auf einem Kegelschnitt (wie von BLAISE PASCAL 1639 im gereiften Alter von 16 Jahren beobachtet); und weil ein Geradenpaar eine spezielle Form eines Kegelschnitts ist, ergibt sich das Theorem von Pappus als Spezialfall des Theorems von Pascal. Eine Beweisskizze dazu kommt gleich (Theorem 4.48).

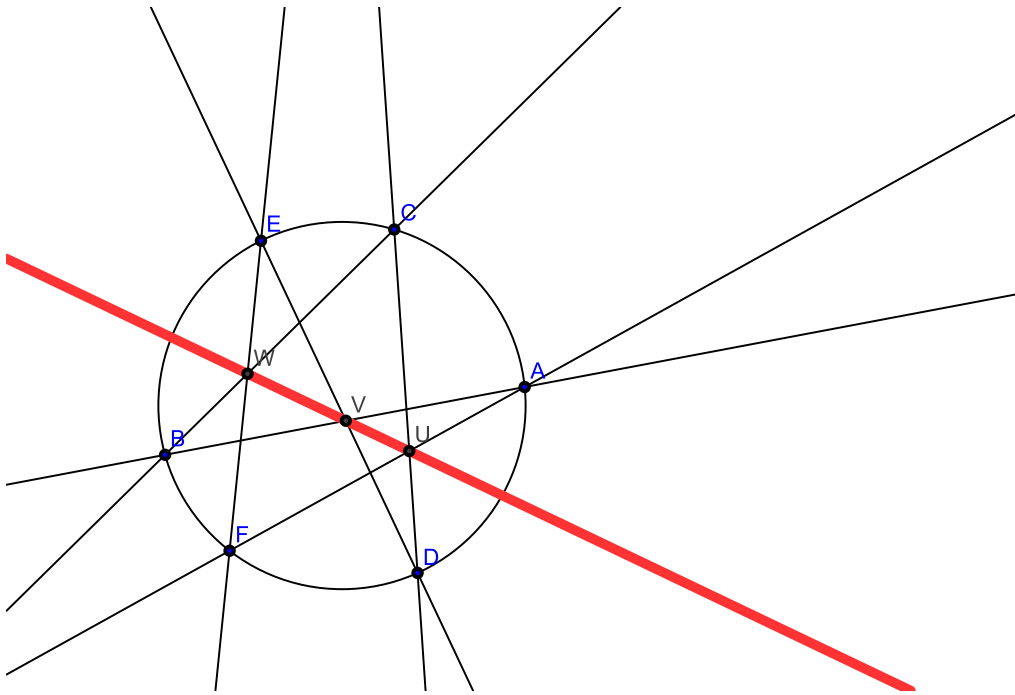


Abbildung 4.5: Zum Theorem von PASCAL

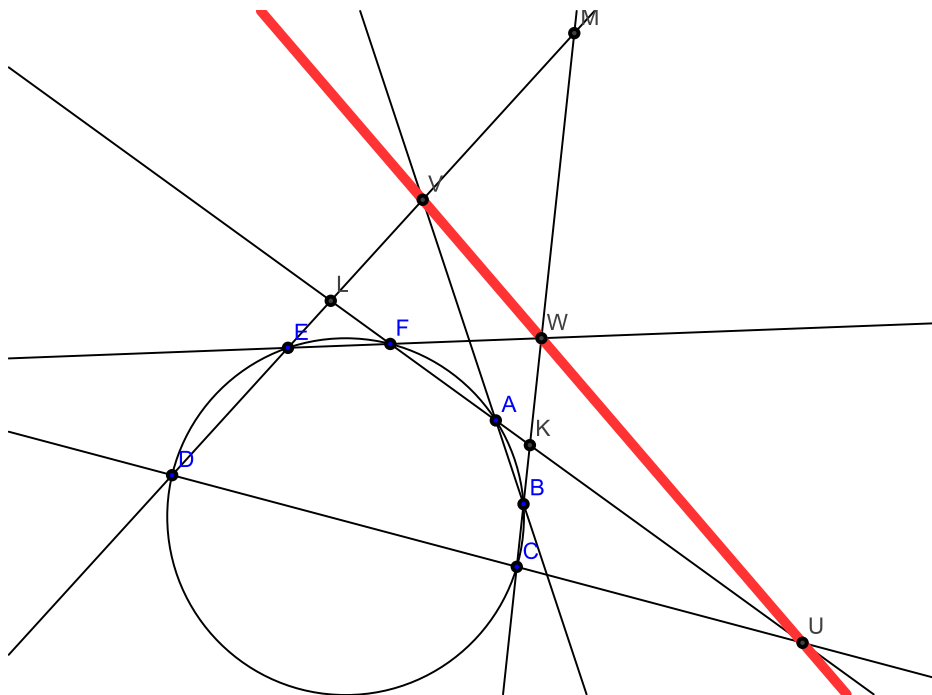


Abbildung 4.6: Zum Theorem von PASCAL

Beweis. Das Sehnensechseck sei $ABCDEF$. Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seitengeraden werden benannt wie folgt:

$$\{U\} := CD \cap FA, \quad \{V\} := AB \cap DE, \quad \{W\} := BC \cap EF.$$

Wir setzen weiterhin

$$\{K\} := BC \cap FA, \quad \{L\} := DE \cap FA, \quad \{M\} := BC \cap DE,$$

Wir wenden das Theorem von Menelaos auf $\triangle KLM$ an:

$$\begin{array}{l|l} \frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LD]}{[DM]} \cdot \frac{[MC]}{[CK]} = -1 & \text{(mit der Geraden } UDC), \\ \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MB]}{[BK]} \cdot \frac{[KA]}{[AL]} = -1 & \text{(mit der Geraden } VBA), \\ \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \frac{[KF]}{[FL]} \cdot \frac{[LE]}{[EM]} = -1 & \text{(mit der Geraden } WFE). \end{array}$$

Wir multiplizieren die erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LD]}{[DM]} \cdot \frac{[MC]}{[CK]} \cdot \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MB]}{[BK]} \cdot \frac{[KA]}{[AL]} \cdot \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \frac{[KF]}{[FL]} \cdot \frac{[LE]}{[EM]} = -1,$$

und sortieren um:

$$\frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \left(\frac{[LD]}{[DM]} \cdot \frac{[LE]}{[EM]} \right) \cdot \left(\frac{[MC]}{[CK]} \cdot \frac{[MB]}{[BK]} \right) \cdot \left(\frac{[KA]}{[AL]} \cdot \frac{[KF]}{[FL]} \right) = -1.$$

Die gerichteten Strecken in den Klammern beziehen sich jeweils auf dieselbe Gerade, weshalb wir in jeder Klammer die Rechenoperationen umordnen können:

$$\frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \left(\frac{[LD] \cdot [LE]}{[DM] \cdot [EM]} \right) \cdot \left(\frac{[MC] \cdot [MB]}{[CK] \cdot [BK]} \right) \cdot \left(\frac{[KA] \cdot [KF]}{[AL] \cdot [FL]} \right) = -1.$$

Je nachdem, ob L, M, K nun außerhalb des Kreises liegen oder innerhalb, wenden wir den Sekantensatz oder den Sehnensatz auf die Zähler in den Klammern an:

$$\frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MW]}{[WK]} \cdot \left(\frac{[LF] \cdot [LA]}{[DM] \cdot [EM]} \right) \cdot \left(\frac{[ME] \cdot [MD]}{[CK] \cdot [BK]} \right) \cdot \left(\frac{[KB] \cdot [KC]}{[AL] \cdot [FL]} \right) = -1,$$

und jetzt folgt tatsächlich

$$\frac{[KU]}{[UL]} \cdot \frac{[LV]}{[VM]} \cdot \frac{[MW]}{[WK]} = -1,$$

wie gewünscht. \square

Theorem 4.48 (Pascal). *Die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seitengeraden eines Sehnensechsecks in einer Ellipse bzw. Parabel bzw. Hyperbel sind kollinear.*

Beweisskizze. Wir beschränken uns auf den Fall einer Ellipse und verwenden die Bezeichnungen aus Abbildung 3.3. Die Ellipse sei der Schnitt des Kegelmantels Ω mit der Ebene π , und wir verwenden weiterhin eine Ebene α , die senkrecht auf der Kegellachse steht. Diese Ebene α schneidet den Kegelmantel Ω im Kreis C . Die Kegelspitze sei O . Wir definieren eine Zentralprojektion von der Ebene π in die Ebene α (mit Zentrum O) wie folgt: ein Punkt $P \in \pi$ wird abgebildet auf $P' \in \alpha$ gemäß $\{P'\} := \alpha \cap OP$ (unter der stillen Annahme, daß die Gerade OP nicht parallel zur Ebene α sei. Hier ist eine Beweislücke.).

Das Sehnensechseck in der Ellipse sei $XYZUVW$. Die Schnittpunkte seiner gegenüberliegenden Seitengeraden seien R, S, T . Das Bild von $XYZUVW$ ist ein Sehnensechseck im Kreis C , auf das wir das Theorem von Pascal (in der Kreisversion) anwenden können. Also sind die Bildpunkte R', S', T' kollinear. Es bleibt nur noch, daran zu erinnern, daß die Zentralprojektion geradentreu ist. \square

4.4 Ein Zerlegungssatz für Sehnenneunecke

Jetzt beweisen wir:

Theorem 4.49 (Sehnenneuneckssatz). *In einem Kreis sei ein Sehnenneuneck gegeben, das wir durch Einzeichnen von 6 nichtkreuzenden Diagonalen in 7 Teildreiecke zerlegen. Von jedem Teildreieck betrachten wir den Inkreis.*

Dann gilt: jede Wahl der nichtkreuzenden Diagonalen ergibt dieselbe Summe der 7 Inkreisradien.

Wir beginnen mit einigen Werkzeugen:

Lemma 4.50. *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Kantenlängen a, b, c , dem Inkreisradius r und dem Umkreisradius R . Dann gelten, mit*

$$s := \frac{1}{2}(a + b + c)$$

als halbem Umfang (Semiperimeter), folgende Formeln für den Flächeninhalt \mathcal{F} des Dreiecks:

$$\mathcal{F} = rs, \quad \mathcal{F} = \frac{abc}{4R}.$$

Beweis. Zum Beweis der ersten Formel ziehe man Strecken vom Inkreismittelpunkt zu den Eckpunkten und betrachte die Flächeninhalte der Teildreiecke.

Wir nehmen oBdA an, daß der Winkel α spitz ist. Die Höhe von C schneidet dann \overline{AB} in einem inneren Punkte H_C . Sei Ω der Umkreis von $\triangle ABC$. Wir ziehen durch C einen Durchmesser, der Ω in einem zweiten Punkt C' schneidet. Dann haben die Dreiecke $\triangle ACH_C$ und $\triangle C'CB$ einen rechten Winkel und einen Winkel α gemeinsam, woraus wir die Ähnlichkeitsbeziehung

$$\frac{|CA|}{|CH_C|} = \frac{2R}{|BC|}$$

schlußfolgern. Es verbleibt noch, an die Identität $\mathcal{F} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CH_C|$ zu erinnern. \square

Lemma 4.51 (Heronische Flächenformel). *Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Kantenlängen a, b, c , halbem Umfang $s := \frac{1}{2}(a + b + c)$ und Flächeninhalt \mathcal{F} . Dann ist*

$$\mathcal{F} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Beweisskizze. Man benutze die Formeln

$$\mathcal{F} = \frac{ab \sin \gamma}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad 1 = \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma.$$

Das Ausmultiplizieren von Klammern wird nicht empfohlen (dritte binomische Formel hilft!). \square

Natürlich hatte HERON VON ALEXANDRIA ($\approx 10 - \approx 70$, Mathematiker und Ingenieur) noch keine Winkelfunktionen zur Verfügung, jedoch kann ein geistreicher Beweis mit Methoden des Altertums in [1] nachgelesen werden.

Satz 4.52 (Carnot). *Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, seien M_A, M_B, M_C die Seitenmitten, O der Umkreismittelpunkt, und R, r die Radien von Umkreis und Inkreis.*

Dann gilt $|OM_A| + |OM_B| + |OM_C| = R + r$.

Beweis. Die Kantenlängen nennen wir $c = |AB|$, $a = |BC|$, $b = |CA|$. Der Satz von Ptolemaios im Sehnenviereck AM_BOM_C liefert

$$R \cdot \frac{a}{2} = |AO| \cdot |M_B M_C| = |OM_C| \cdot |AM_B| + |AM_C| \cdot |OM_B| = |OM_C| \cdot \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \cdot |OM_B|.$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} R \cdot \frac{b}{2} &= |OM_A| \cdot \frac{c}{2} + |OM_C| \cdot \frac{a}{2}, \\ R \cdot \frac{c}{2} &= |OM_A| \cdot \frac{b}{2} + |OM_B| \cdot \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

und Addition schenkt uns dann

$$R \cdot (a + b + c) = (a + b) \cdot |OM_C| + (b + c) \cdot |OM_A| + (c + a) \cdot |OM_B|.$$

Weiterhin haben wir (mit \mathcal{F}_{XYZ} als Flächeninhalt eines Dreiecks XYZ)

$$r \cdot (a + b + c) = 2\mathcal{F} = 2(\mathcal{F}_{ABO} + \mathcal{F}_{BCO} + \mathcal{F}_{CAO}) = c \cdot |OM_C| + a \cdot |OM_A| + b \cdot |OM_B|.$$

Wir addieren beide Gleichungen und dividieren durch $(a + b + c)$. □

Satz 4.53 (Carnot, allgemein). Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, seien M_A, M_B, M_C die Seitenmitten, O der Umkreismittelpunkt, und R, r die Radien von Umkreis und Inkreis.

Dann ist $\pm|OM_A| \pm |OM_B| \pm |OM_C| = R + r$, wobei ein Minus vor $|OM_X|$ genau dann gilt, wenn der Innenwinkel bei X stumpf ist.

Beweis. Wir erkennen $\pm|OM_A| = R \cos \alpha$, sodaß die Behauptung lautet:

$$R(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \stackrel{?}{=} r + R.$$

Wir benutzen den Cosinus-Satz in der Form

$$\cos \alpha = \frac{ab^2 + ac^2 - a^3}{2abc},$$

und zu zeigen ist dann

$$\frac{ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} \stackrel{?}{=} 1 + \frac{r}{R}.$$

Hierin benutzen wir jetzt die Formeln

$$r = \frac{\mathcal{F}}{s}, \quad R = \frac{abc}{4\mathcal{F}},$$

sodaß die Behauptung sich in

$$\frac{ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} \stackrel{?}{=} 1 + \frac{4\mathcal{F}^2}{sabc}$$

verwandelt, also

$$\frac{s}{2} \cdot (ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3) \stackrel{?}{=} sabc + 4\mathcal{F}^2.$$

Man setzt hier die Heron-Formel ein:

$$ab^2 + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3 \stackrel{?}{=} 2abc + 8(s-a)(s-b)(s-c).$$

Das braucht man nur noch nachrechnen. □

Jetzt liegen alle Werkzeuge bereit für den Beweis des Sehnenneueckssatzes:

Beweis. Alle beteiligten 7 Dreiecke haben denselben Umkreismittelpunkt O . Auf jedem Teildreieck verwendet man den Satz von Carnot. Wegen des Peripherie-Zentriwinkelsatzes ist ein Dreieck genau dann stumpfwinklig, wenn sein Umkreismittelpunkt außerhalb liegt. Diejenigen Strecken $|OM_i|$, die sich auf die Diagonalen beziehen, heben sich bei Addition aller Carnot-Formeln auf. Dies wird erzwungen durch den Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck (denn Gegenwinkel im Sehnenviereck können nicht beide stumpf sein, weil sie einander zu 180° ergänzen). □

Offenkundig spielt die Zahl 9 keine besondere Rolle.

4.5 Der Feuerbachkreis

Zu einem Dreieck $\triangle ABC$ seien a, b, c die Kanten bzw. deren Längen (a liegt A gegenüber usw.). Die Seitenmittelpunkte seien S_A, S_B, S_C . Die Strecken $s_a := \overline{AS_A}$, $s_b := \overline{BS_B}$, $s_c := \overline{CS_C}$ schneiden einander im Schwerpunkt S .

Lemma 4.54. *Es ist $|AS| : |SS_A| = |BS| : |SS_B| = |CS| : |SS_C| = 2$.*

Beweis. Der Strahlensatz mit Zentrum C und Parallelen $AB, S_A S_B$ gibt uns $|AB| : |S_A S_B| = 2$, und dann liefert uns der Strahlensatz mit Zentrum S und denselben Parallelen, daß $|AS| : |SS_A| = 2$. \square

Übungsaufgabe 4.7. *Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal ein Dreieck aus den gegebenen Streckenlängen s_a, s_b, s_c . Unter welchen Voraussetzungen ist diese Konstruktion durchführbar? Hinweis: suchen Sie ein eindeutig konstruierbares Parallelogramm.*

Die Höhenfußpunkte im Dreieck $\triangle ABC$ taufen wir H_A, H_B, H_C , und der Schnittpunkt der Höhen heiße H . Der Umkreismittelpunkt sei M .

Satz 4.55 (Euler–Gerade). *Es liegen H, S, M auf einer Geraden, S zwischen H und M , und es ist*

$$|SH| : |MS| = 2.$$

Beweis. Es sei Φ zentrische Streckung mit Zentrum S und Faktor $-1/2$. Dann ist

$$\Phi(A) = S_A, \quad \Phi(B) = S_B, \quad \Phi(C) = S_C,$$

also wird $\triangle ABC$ auf $\triangle S_A S_B S_C$ abgebildet. Die Mittelsenkrechten(geraden) im Dreieck $\triangle ABC$ sollen m_a, m_b, m_c heißen, also

$$m_a \perp a, \quad m_b \perp b, \quad m_c \perp c, \quad m_a \cap a = \{S_A\}, \quad m_b \cap b = \{S_B\}, \quad m_c \cap c = \{S_C\}.$$

Die Höhenggeraden AH_A, BH_B bzw. CH_C stehen senkrecht auf den Strecken a, b bzw. c , also stehen auch deren Bilder senkrecht auf a, b bzw. c . Das bedeutet

$$\Phi(AH_A) = m_a, \quad \Phi(BH_B) = m_b, \quad \Phi(CH_C) = m_c.$$

Die Mittelsenkrechten schneiden einander in M , also ist $\Phi(H) = M$. Das wollten wir zeigen. \square

Satz 4.56 (Feuerbachs Neunpunktekreis). *Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AH}, \overline{BH}, \overline{CH}$ seien A', B', C' genannt. Dann liegen $A', B', C', H_A, H_B, H_C, S_A, S_B, S_C$ auf einem Kreis, und der Mittelpunkt dieses Kreises halbiert die Strecke \overline{HM} .*

Beweis. Sei Ψ die zentrische Streckung mit Zentrum H und Faktor $+1/2$. Dann ist

$$\Psi(A) = A', \quad \Psi(B) = B', \quad \Psi(C) = C',$$

und die Dreiecke $\triangle S_A S_B S_C, \triangle A' B' C'$ sind einander kongruent, also gibt es eine Kongruenzabbildung, die $\triangle S_A S_B S_C$ auf $\triangle A' B' C'$ abbildet. Wir erhalten $\triangle ABC$ aus $\triangle S_A S_B S_C$ durch eine Streckung um den Faktor 2 und eine Drehung um 180° , also ist die Kongruenzabbildung, welche $\triangle S_A S_B S_C$ auf $\triangle A' B' C'$ abbildet, eine Drehung um 180° , und das Drehzentrum Z ist der (notwendigerweise gemeinsame) Mittelpunkt der Strecken $\overline{A'S_A}, \overline{B'S_B}, \overline{C'S_C}$. Das Drehzentrum halbiert auch die Verbindungsstrecke der Höhenschnittpunkte der beiden Dreiecke $\triangle S_A S_B S_C$ und $\triangle A' B' C'$. Diese Höhenschnittpunkte sind aber M und H . Also liegt Z auf der Strecke \overline{HM} genau in der Mitte. Insgesamt haben wir dann auf der Eulerschen Strecke \overline{HM} folgende Lagebeziehungen:

$$|HZ| = \frac{1}{2}|HM|, \quad |HS| = \frac{2}{3}|HM|, \quad |ZS| = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)|HM| = \frac{1}{6}|HM|, \quad |SM| = \frac{1}{3}|HM|.$$

Wir bestimmen jetzt die Umkreismittelpunkte von $\triangle S_A S_B S_C$ und $\triangle A' B' C'$. Wegen $\triangle S_A S_B S_C = \Phi(\triangle ABC)$ (die Notation stammt aus dem Beweis zu Satz 4.55) ist $\Phi(M)$ gleich dem Umkreismittelpunkt von $\triangle S_A S_B S_C$. Es ist aber Φ eine Streckung um S mit Faktor $-1/2$, also ist $\Phi(M) = Z$, denn laut obigen Rechnungen ist $|ZS| = \frac{1}{2}|SM|$.

Weiterhin ist $\triangle A'B'C' = \Psi(\triangle ABC)$, also ist der Umkreismittelpunkt von $\triangle A'B'C'$ gleich $\Psi(M)$. Weil aber Ψ eine Streckung um H mit Faktor $+1/2$ ist, haben wir $\Psi(M) = Z$.

Deshalb liegen die sechs Punkte $S_A, S_B, S_C, A', B', C'$ auf einem Kreis um den Mittelpunkt Z . Dieser Kreis wird **Feuerbachkreis** genannt und hat die Strecken $\overline{A'S_A}, \overline{B'S_B}, \overline{C'S_C}$ als Durchmesser.

Der Feuerbachkreis ist also gleich dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{A'S_A}$. Andererseits hat das Dreieck $\triangle A'H_A S_A$ einen rechten Winkel bei H_A . Nach Umkehrung des Thalesatzes liegt also auch H_A auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{A'S_A}$.

Folglich liegt H_A auf dem Feuerbachkreise, und gleiches gilt für H_B und H_C . \square

Ohne Beweis geben wir noch an: der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks $\triangle ABC$. Ein Beweis findet sich in [4], Kapitel IV.4.

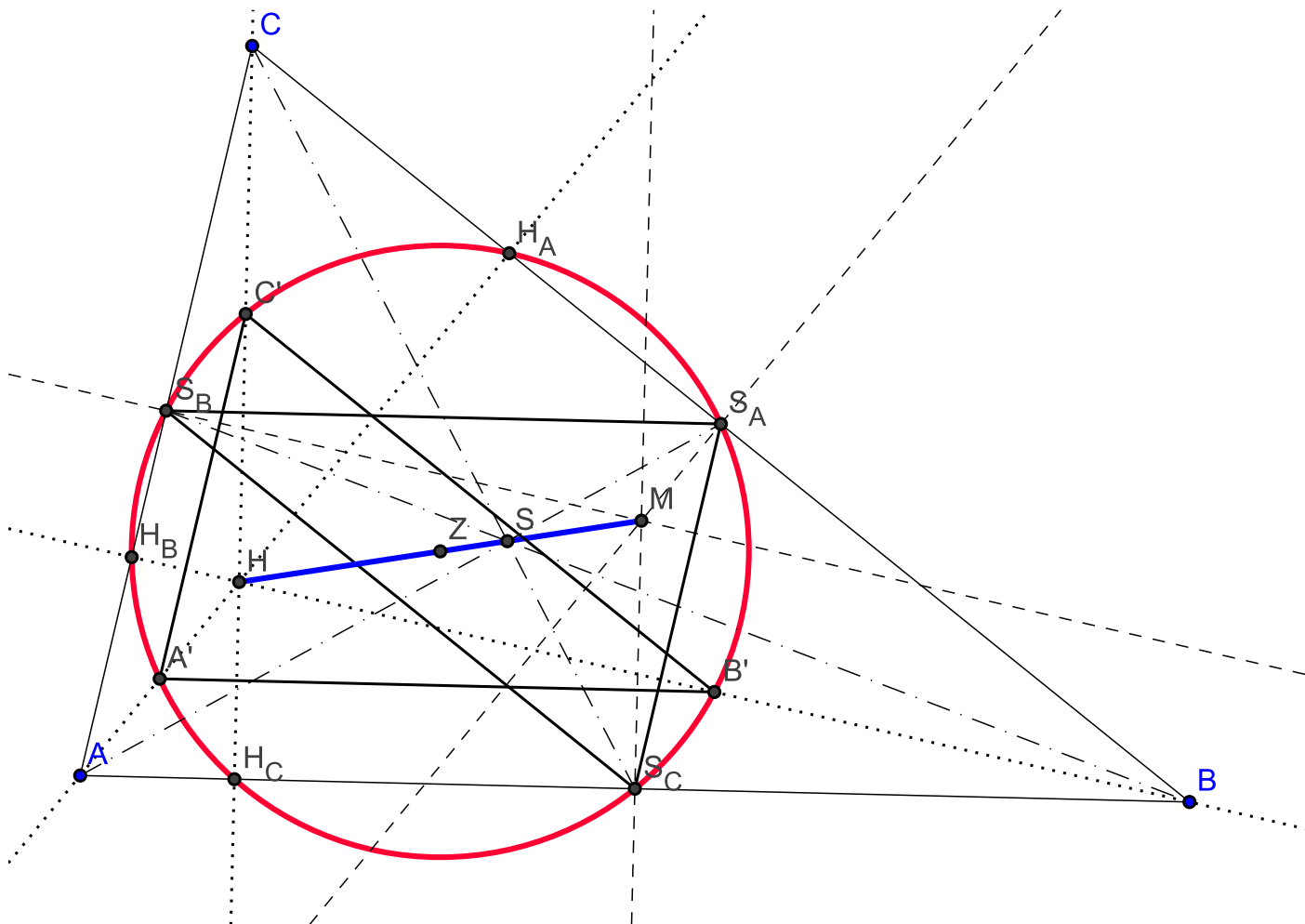
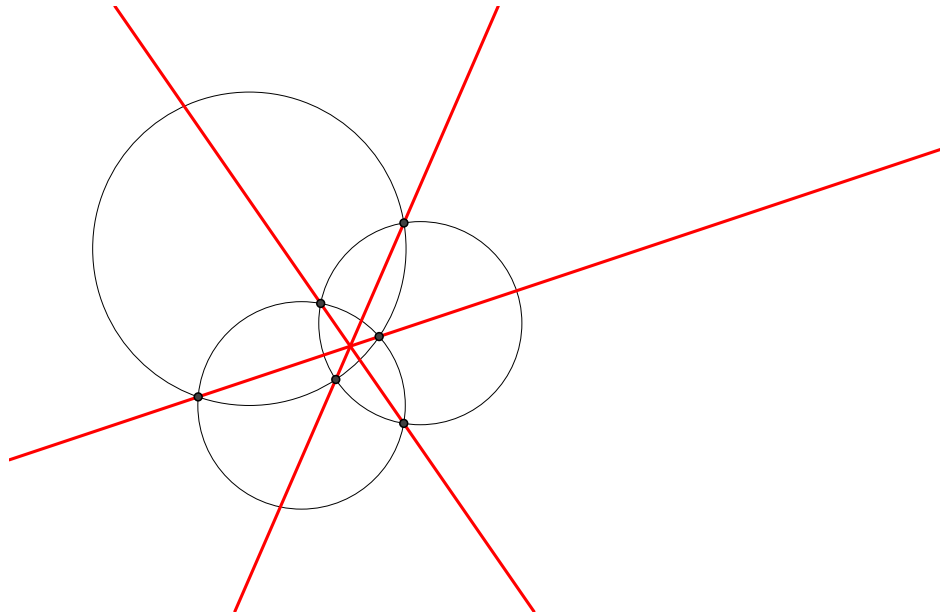


Abbildung 4.7: Zum Feuerbachkreis. Die Höhen sind punktiert, die Mittelsenkrechten gestrichelt, und die Seitenhalbierenden gestrichpunktet.

Gelegentlich wird der Feuerbachkreis auch *Euler-Kreis* genannt, denn schon Euler hatte 1765 erkannt, daß der Umkreis des Seitenmittelpunktsdreiecks $\triangle S_A S_B S_C$ durch die Höhenfußpunkte H_A, H_B, H_C verläuft. Der erste Beweis, daß auf diesem Kreis auch die oberen Höhenabschnitte liegen, geht auf JEAN-VICTOR PONCELET (1821) zurück. Die Erkenntnis von KARL WILHELM FEUERBACH besteht darin, daß dieser Kreis auch den Inkreis und die drei Ankreise berührt. Siehe auch [16].

Es empfiehlt sich, die verschiedenen Feuerbachs auseinander zu halten: der berühmte Rechtsgelehrte PAUL JOHANN ANSELM VON FEUERBACH war der Vater, der Philosoph LUDWIG FEUERBACH der Bruder, und der Maler ANSELM FEUERBACH war der Nefte des Mathematiklehrers Karl Wilhelm Feuerbach.

4.6 Potenzgeraden



Folgende Situation könnte bekannt sein: gegeben seien drei Kreise $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, wobei Ω_i und Ω_j (mit $i < j$) einander in zwei verschiedenen Punkten A_{ij} und B_{ij} schneiden. Durch A_{ij} und B_{ij} legen wir eine Gerade g_{ij} . Dann schneiden sich g_{12}, g_{23}, g_{13} in einem Punkte.

Das wollen wir jetzt beweisen; und es stellt sich heraus, daß der Beweis sehr einfach wird, wenn man erst mal über das richtige Werkzeug verfügt.

Definition 4.57. Sei Ω ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r . Dann definieren wir für jeden beliebigen Punkt P die Potenz von P bezüglich Ω als

$$\mathfrak{Poten}_{\Omega}(P) := |OP|^2 - r^2.$$

Es wird sich zeigen, daß man mit diesem unauffällig erscheinenden Begriff tatsächlich etwas Nützliches anstellen kann.

Wir beobachten:

- Wenn P außerhalb von Ω liegt, dann ist $\mathfrak{Poten}_{\Omega}(P)$ positiv, und zwar gleich der quadrierten Tangentenabschnittslänge;
- Wenn P auf Ω liegt, dann ist $\mathfrak{Poten}_{\Omega}(P)$ gleich Null;
- Wenn P innerhalb von Ω liegt, dann ist $\mathfrak{Poten}_{\Omega}(P)$ negativ.

Lemma 4.58. Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten O_1 und O_2 . Dann ist die Menge aller Punkte P , für die $\mathfrak{Poten}_{\Omega_1}(P) = \mathfrak{Poten}_{\Omega_2}(P)$ gilt, eine Gerade, die senkrecht auf der Geraden O_1O_2 steht.

Beweis. Übungsaufgabe. Der Beweis geht vielleicht am schnellsten mit den Methoden der analytischen Geometrie. \square

Definition 4.59. Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten. Die Gerade aller Punkte P , für die $\mathfrak{Poten}_{\Omega_1}(P) = \mathfrak{Poten}_{\Omega_2}(P)$ gilt, heißt Potenzgerade der beiden Kreise Ω_1 und Ω_2 .

Wir beobachten erneut:

- wenn die beiden Kreise einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden, dann ist die Potenzgerade gleich der Geraden durch A und B ,

- wenn die beiden Kreise einander in einem Punkte berühren, dann ist die Potenzgerade gleich der Tangente an diesem Punkt,
- wenn die beiden Kreise einander nicht schneiden, und wenn keiner im anderen enthalten ist, dann geht die Potenzgerade durch die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken der Berührungspunkte von gemeinsamen Tangenten,
- wenn die beiden Kreise einander nicht schneiden, aber einer im anderen enthalten ist, dann verläuft die Potenzgerade außerhalb von beiden Kreisen.

Satz 4.60. Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ drei Kreise mit verschiedenen Mittelpunkten, und seien g_{12}, g_{23}, g_{13} die drei Potenzgeraden der drei Kreispaaire $(\Omega_1, \Omega_2), (\Omega_2, \Omega_3), (\Omega_1, \Omega_3)$.

Dann schneiden g_{12}, g_{23}, g_{13} einander in einem Punkte, oder sie sind alle zueinander parallel.

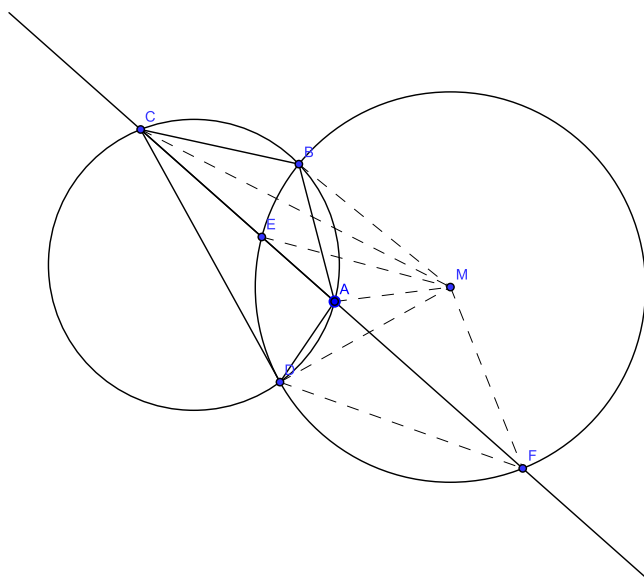
Beweis. Wenn sie einander nicht parallel sind, dann gibt es zwei von den drei genannten Geraden, die einander schneiden. Diese seien oBdA g_{12} und g_{23} . Ihr Schnittpunkt heiße P . Dann ist $\mathfrak{Potenz}_{\Omega_1}(P) = \mathfrak{Potenz}_{\Omega_2}(P)$, denn $P \in g_{12}$. Und es ist $\mathfrak{Potenz}_{\Omega_2}(P) = \mathfrak{Potenz}_{\Omega_3}(P)$, denn $P \in g_{23}$. Also ist auch $\mathfrak{Potenz}_{\Omega_1}(P) = \mathfrak{Potenz}_{\Omega_3}(P)$, und somit zwangsläufig $P \in g_{13}$. \square

Nach demselben Muster hatten wir schon bewiesen, daß die drei Mittelsenkrechten einander in einem Punkte schneiden, und analoges für die drei Winkelhalbierenden.

Als Anwendung präsentieren wir eine Aufgabe aus dem Einzelwettbewerb der **Mittleuropischen Mathematik-Olympiade 2010**, bei der die deutsche Mannschaft (bestehend aus Schülern der elften Klasse) einen dritten Platz (nach Ungarn und Polen) erzielt hatte:

Übungsaufgabe: Gegeben sei ein Sehnenviereck $ABCD$ mit einem Punkte E auf der Diagonalen \overline{AC} , sodaß $|AD| = |AE|$ und $|CB| = |CE|$. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks $\triangle BDE$. Der Kreis k schneide die Gerade AC in E und F .

Man zeige, daß die Geraden FM, AD, BC einander in einem Punkte schneiden.



Lösung. Wegen $|ME| = |MB|$ und $|CE| = |CB|$ ist $EMBC$ ein Drachenviereck, in welchem die Diagonalen MC und EB aufeinander senkrecht stehen. Dann folgt $\angle BMC = \angle CME = \frac{1}{2}\angle BME$. Wegen des Peripherie-Zentri-Winkelsatzes (im Kreis k) ist aber $\angle BME = 2\angle BFE$, also ist $\angle BMC = \angle BFE = \angle BFC$, und somit ist $BMFC$ ein Sehnenviereck (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes).

Wegen $|MD| = |ME|$ und $|AD| = |AE|$ ist $DMEA$ ein Drachenviereck, in welchem die Diagonalen MA und DE aufeinander senkrecht stehen. Dann folgt $\angle EMA = \angle AMD = \frac{1}{2}\angle EMD$. Wegen des Peripherie-Zentri-Winkelsatzes (im Kreis k) ist aber $\angle EMD = 2\angle EFD$, also ist $\angle AMD = \angle EFD = \angle AFD$, und somit ist $FMAD$ ein Sehnenviereck (Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes).

Die Umkreise um $ABCD$ und $BMFC$ haben die Potenzgerade BC , die Umkreise um $ABCD$ und $FMAD$ haben die Potenzgerade AD , und die Umkreise um $BMFC$ und $FMAD$ haben die Potenzgerade FM . \square

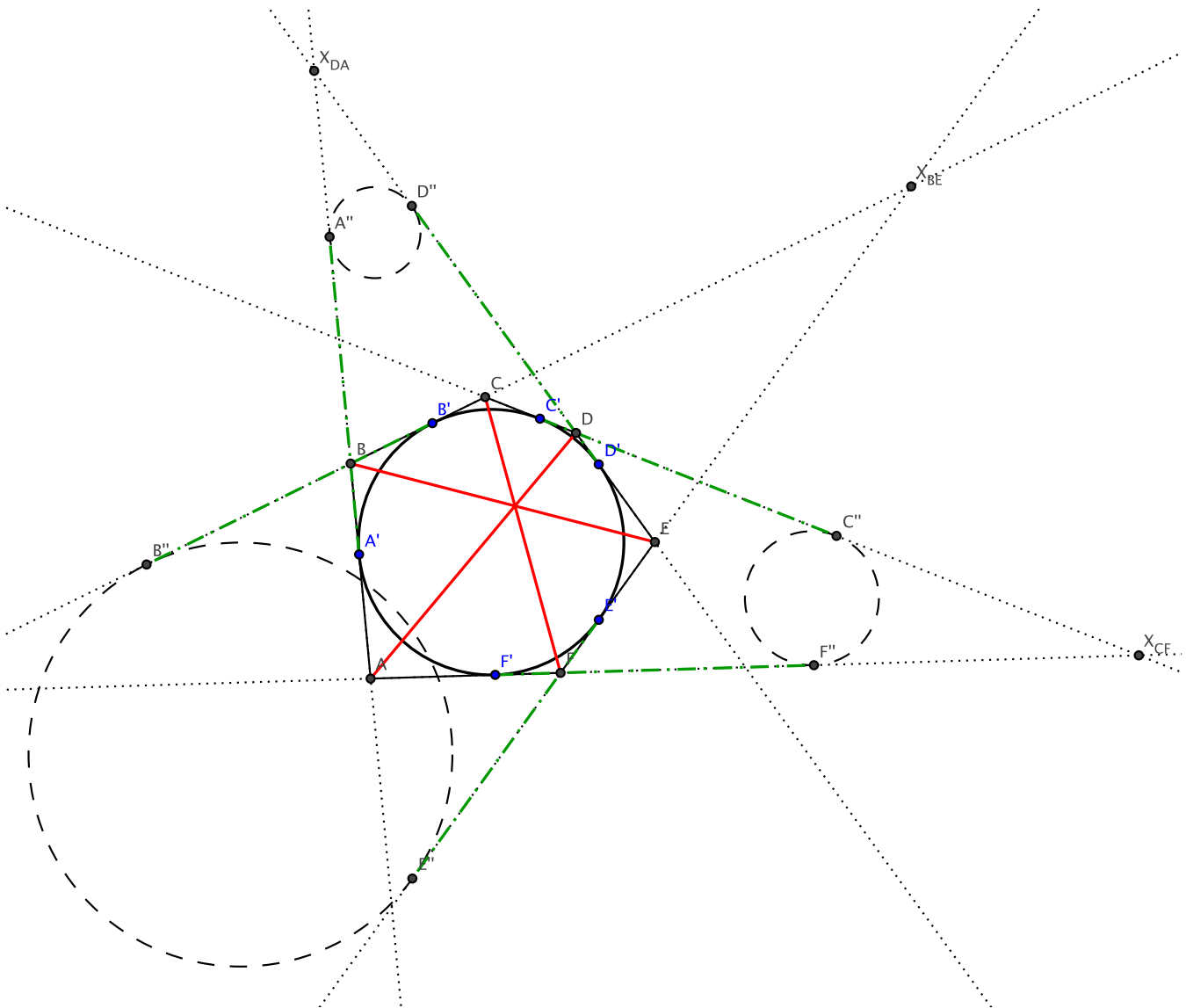
elementare Lösung. Wie oben sind $BMFC$ und $FMAD$ Sehnenvierecke. Wir nehmen an, daß A zwischen C und F liegt (der andere Fall, daß C zwischen A und F liegt, geht analog). Die Geraden AD und BC mögen sich in P schneiden. Dann sind $\angle AEM$ und $\angle MBP$ Außenwinkel am Drachenviereck $EMBC$, also gleich. Weiterhin ist $\angle MDP = \angle MDA = \angle AEM = \angle MBP$, und somit ist auch $MPBD$ ein Sehnenviereck. Dann haben wir (unter mehrfacher Ausnutzung des Peripheriewinkelsatzes und des Satzes über Gegenwinkel im Sehnenviereck)

$$\angle PMB = \angle PDB = \angle ADB = \angle ACB = \angle FCB = 180^\circ - \angle BMF,$$

also $\angle PMB + \angle BMF = 180^\circ$, womit P, M, F kollinear sind. Also liegt P auch auf der Geraden FM . Das wollten wir zeigen. \square

4.7 Der Satz von Brianchon und Potenzgeraden \star

Theorem 4.61. Sei $ABCDEF$ ein Tangentensechseck an einem Kreis Ω . Mit dieser Bezeichnung gilt: die drei Hauptdiagonalen AD, BE, CF schneiden einander in einem Punkte.



Für den Beweis benötigen wir noch drei Kreise (gestrichelt), und die Kuriosität besteht darin, daß man die Kreise fast beliebig wählen kann.

Beweis. Zur Einfachheit wollen wir annehmen, daß keine zwei Sechsecksseiten parallel sind (der gegen-
teilige Fall geht sinngemäß genauso).

Die Kreisberührungspunkte des Tangentensechsecks nennen wir A', B', \dots, F' , mit $A' \in \overline{AB}$, $B' \in \overline{BC}$,
 $C' \in \overline{CD}$, $D' \in \overline{DE}$, $E' \in \overline{EF}$, $F' \in \overline{FA}$.

Tangentenabschnitte vom selben Punkt zum selben Kreis sind gleichlang, also ist

$$\begin{aligned} |AA'| &= |AF'|, \\ |BB'| &= |BA'|, \\ |CC'| &= |CB'|, \\ |DD'| &= |DC'|, \\ |EE'| &= |ED'|, \\ |FF'| &= |FE'|. \end{aligned}$$

Wir verlängern die Sechsecksseiten zu Geraden und definieren Schnittpunkte

$$\{X_{DA}\} := AB \cap DE, \quad \{X_{BE}\} := BC \cap EF, \quad \{X_{CF}\} := CD \cap FA.$$

Tangentenabschnitte sind gleichlang, also

$$|X_{DA}D'| = |X_{DA}A'|, \quad |X_{BE}B'| = |X_{BE}E'|, \quad |X_{CF}C'| = |X_{CF}F'|.$$

Wir wählen eine beliebige Streckenlänge ℓ (grün in der Skizze), die länger als jede Sechsecksseite sein
möge. Dann tragen wir ℓ an wie folgt:

$$\begin{cases} \text{von } A' \text{ über } B \text{ hinaus, erhalte } A'', \\ \text{von } D' \text{ über } D \text{ hinaus, erhalte } D'', \\ \text{von } C' \text{ über } D \text{ hinaus, erhalte } C'', \\ \text{von } F' \text{ über } F \text{ hinaus, erhalte } F'', \\ \text{von } E' \text{ über } F \text{ hinaus, erhalte } E'', \\ \text{von } B' \text{ über } B \text{ hinaus, erhalte } B''. \end{cases}$$

Die Reihenfolge der Punkte wurde so gewählt, daß

$$|X_{DA}A''| = |X_{DA}D''|, \quad |X_{BE}B''| = |X_{BE}E''|, \quad |X_{CF}C''| = |X_{CF}F''|.$$

Deshalb gibt es genau einen Kreis ω_{DA} , der AA'' in A'' tangiert und DD'' in D'' . Analog bestimmen wir
Kreise ω_{BE} und ω_{CF} .

Jetzt betrachten wir B und die Kreise ω_{DA} , ω_{BE} . Es ist

$$|BA''| = |A'A''| - |BA'| = \ell - |BA'| = \ell - |BB'| = |B'B''| - |BB'| = |BB''|,$$

also folgt $\mathfrak{Potenz}_{\omega_{DA}}(B) = \mathfrak{Potenz}_{\omega_{BE}}(B)$, denn nach Konstruktion der Kreise ω_{DA} und ω_{BE} liegt B
außerhalb dieser beiden Kreise, und in dieser Lage ist die Potenz von B bezüglich eines jeden dieser
Kreise gleich der quadrierten Länge des Tangentenabschnitts. Damit liegt B auf der Potenzgeraden des
Kreispaars $(\omega_{DA}, \omega_{BE})$.

Als nächstes betrachten wir E und die Kreise ω_{DA} , ω_{BE} . Es ist

$$|ED''| = |ED'| + |D'D''| = |EE'| + \ell = |EE'| + |E'E''| = |EE''|,$$

also folgt $\mathfrak{Potenz}_{\omega_{DA}}(E) = \mathfrak{Potenz}_{\omega_{BE}}(E)$. Damit liegt auch noch E auf der Potenzgeraden des Kreispaars
 $(\omega_{DA}, \omega_{BE})$.

Folglich ist die Hauptdiagonale BE des Tangentensechsecks gleich der Potenzgeraden des Kreispaars
 $(\omega_{DA}, \omega_{BE})$.

Die anderen beiden Hauptdiagonalen behandelt man genauso. □

Das Theorem von Brianchon ist dual zum Theorem von Pascal, und die Dualität wird vermittelt über das Konzept der Pole und Polaren, wie wir bald sehen werden. Wir bringen später noch einen leistungsfähigeren Beweis mit den Methoden der projektiven Geometrie (der sich dann sofort auf Tangentensechsecke an Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln verallgemeinert). Das Dualitätsprinzip aus Abschnitt 4.10 kann auch benutzt werden, einen weiteren Beweis des Satzes von Pascal zu gewinnen (indem man das Brianchon–Theorem zuerst beweist). Beide Theoreme (von Pascal und Brianchon) zusammen gehören zu den Höhepunkten der Elementargeometrie, weshalb wir uns den Luxus gönnen, sie mehrfach zu beweisen.

4.8 Die schönste Aufgabe zu Potenzgeraden ✿

In diesem Abschnitt beweisen wir folgenden Satz:³

Satz 4.62. *Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck. Die Fußpunkte seiner Höhen mögen A' , B' , C' heißen. Die Lotfußpunkte von A' auf die Geraden AC und AB seien A_B und A_C genannt. Analog sollen die Lotfußpunkte von B' auf die Geraden BA und BC mit B_C und B_A bezeichnet werden, und die Lotfußpunkte von C' auf die Geraden CB und CA seien C_A und C_B .*

Sei a die Gerade durch A_B und A_C , b sei die Gerade durch B_A und B_C , und c sei die Gerade durch C_B und C_A . Weiterhin setzen wir

$$\{A''\} := b \cap c, \quad \{B''\} := c \cap a, \quad \{C''\} := a \cap b.$$

Dann gilt: die Geraden AA'' , BB'' und CC'' schneiden einander in einem Punkte.

Die Einstufung dieses Satzes als *schönster Aufgabe zu Potenzgeraden* rührt sicherlich daher, daß das Konzept der Potenzgeraden in mehrfacher (und unterschiedlicher!) Weise in den Beweis eingeht. Zur Schönheit trägt aber auch bei, daß wir eine fast schon absurd hohe Zahl an Sehnenvierecken benötigen (insgesamt 15 Stück). Diese 15 Sehnenvierecke liegen in 15 Kreisen, von denen sich dann aber drei als identisch herausstellen (es sind also letztlich doch bloß 13 Kreise). Aus nachvollziehbarem Grunde unterlassen wir es, diese Kreise in Abbildung 4.8 einzutragen.

Wir benötigen ein Hilfsmittel:

Lemma 4.63. *Sei X ein Punkt innerhalb eines Kreises Ω , und sei AB eine beliebige Sehne in Ω , die durch X verläuft. Dann ist $\mathfrak{Potenz}_\Omega(X) = -|AX| \cdot |BX|$.*

Sei X ein Punkt außerhalb eines Kreises Ω , und sei AB eine beliebige Sekante von Ω , die durch X verläuft. Dann ist $\mathfrak{Potenz}_\Omega(X) = +|AX| \cdot |BX|$.

Als Hilfsmittel für den Beweis im Selbststudium empfehlen wir die dritte binomische Formel und den Sehnensatz bzw. den Sehnen–Tangentensatz.

Jetzt kommt der angekündigte Beweis zu Satz 4.62. Zum Zwecke der sprachlichen Vereinfachung bezeichnen wir die sechs Punkte A_B , A_C , ... als „Höhenfußpunkte zweiten Grades“. Weiterhin taufen wir den Höhenschnittpunkt im Dreieck $\triangle ABC$ auf den Namen H .

Beweis zu Satz 4.62.

Teil 1: Klärung der Lagebeziehungen

Die Gerade CC' teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Weil $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegt A' auf der Strecke \overline{BC} , also liegen A' und B in derselben Halbebene bezüglich der Geraden CC' . Weiterhin ist $CC' \parallel A'A_C$, denn beide stehen auf AB senkrecht. Also liegen A' , A_C , B in derselben Halbebene bezüglich der Geraden CC' . Also liegt A_C zwischen C' und B . Analog klärt man die Lage der restlichen fünf Höhenfußpunkte zweiten Grades.

³ Es kann durchaus geschehen, daß eine Aufgabe von diesem Typ bei der **Internationalen Mathematik–Olympiade (IMO)**, dem berühmtesten internationalen Schülerwettbewerb für Mathematik, gestellt wird. Bei der IMO werden 2 Klausuren zu je 4.5 Stunden geschrieben, mit insgesamt 6 Aufgaben. Siehe auch <http://www.imo-official.org> für absolut alle Informationen zur IMO.

Teil 2: $C_B C' C_A C$ und $C' A_C C_A A'$ und $C' B A' H$ sind Sehnenvierecke

Denn: auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{CC'}$ liegen die Punkte C_B und C_A (auf verschiedenen Seiten). Weiterhin liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $\overline{C'A'}$ die Punkte A_C und C_A (auf derselben Seite). Und schließlich liegen A' und C' auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser \overline{HB} (auf verschiedenen Seiten).

Nach demselben Muster findet man noch sechs weitere Sehnenvierecke.

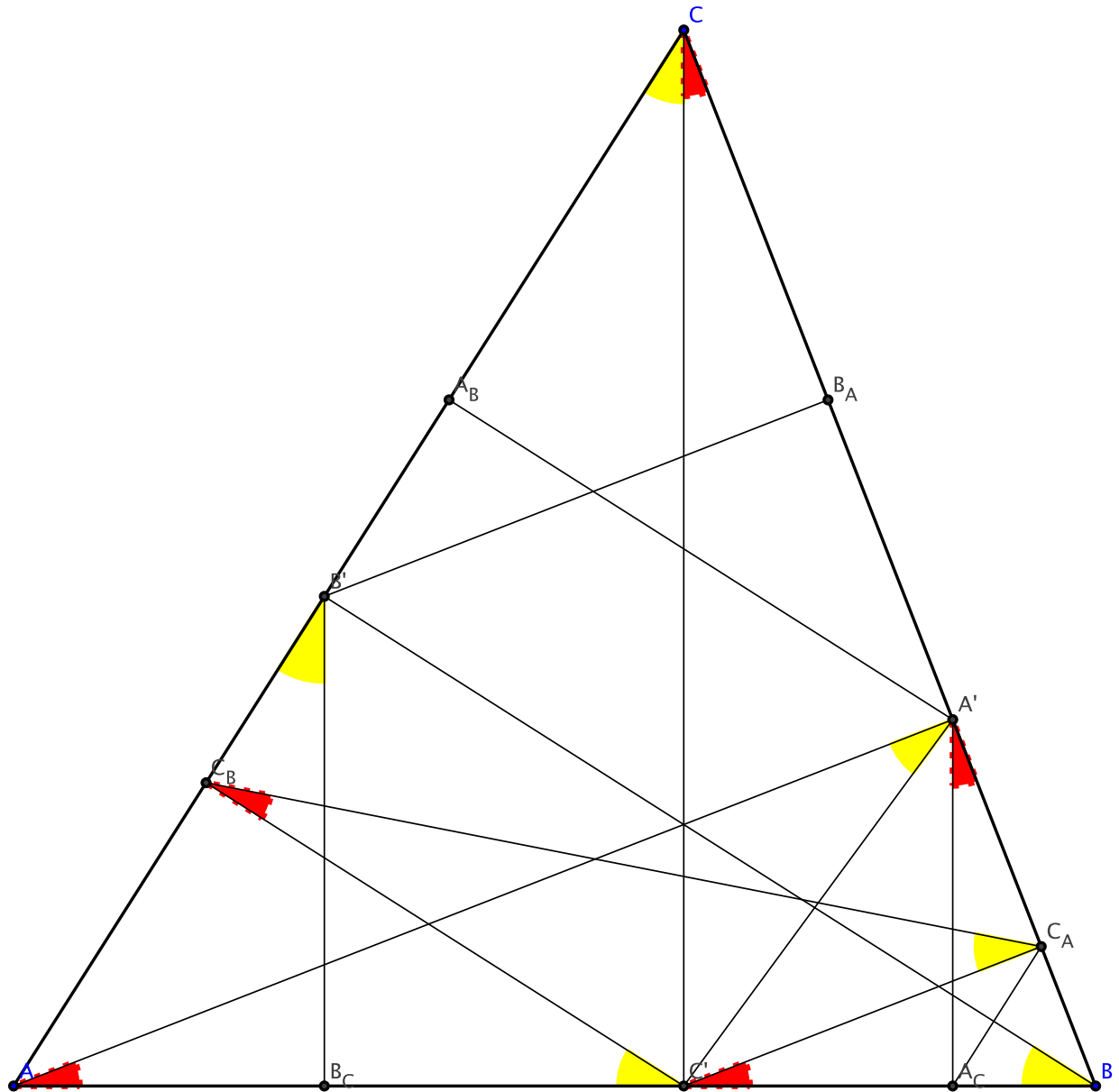


Abbildung 4.8: Nach der Winkeljagd. Die gelben Winkel sind $90^\circ - \alpha$, die roten Winkel sind $90^\circ - \beta$.

Teil 3: Winkeljagd

Die Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$ bezeichnen wir in üblicher Weise mit α, β, γ . Wir suchen jetzt Teildreiecke, bei denen der eine Innenwinkel β ist und ein zweiter Innenwinkel gleich 90° (dann muß der dritte Innenwinkel gleich $90^\circ - \beta$ sein). Auf diesem Wege zeigen wir

$$90^\circ - \beta = \angle C'CB = \angle A_C A' B = \angle B C' C_A = \angle B A A'.$$

Teil 5: $A_C C_A \parallel AC$ und $C_B B_C \parallel CB$ und $B_A A_B \parallel BA$

Denn

$$\begin{array}{l|l}
 \angle C' A' B = \angle H A' B - \angle H A' C' & \\
 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha, & \\
 \angle C' A' C_A = \alpha & \text{denn } C_A \text{ zwischen } A' \text{ und } B \\
 \angle C_A A_C C' = 180^\circ - \alpha & \text{denn } C' A_C C_A A' \text{ ist Sehnenviereck} \quad (4.2) \\
 \angle B A_C C_A = \alpha & \text{Nebenwinkel am Punkt } A_C \\
 \angle B A C = \alpha & \text{Definition von } \alpha
 \end{array}$$

also $A_C C_A \parallel AC$ wegen der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

Teil 6: $C_B B_A A_C C_A$ ist Sehnenviereck mit Umkreis ω_c . Und analog ist $A_C C_A B_A A_B$ ein Sehnenviereck, dessen Umkreis ω_a heißen möge, und $B_A A_B C_B B_C$ ist ein Sehnenviereck mit Umkreis ω_b .

Denn es ist

$$\begin{array}{l|l}
 \angle A_C B_C C_B = \angle B B_C C_B & A_C \text{ zwischen } B_C \text{ und } B \\
 = 180^\circ - \angle C_B B_C A & \text{Nebenwinkel} \\
 = 180^\circ - \angle C B A & C_B B_C \parallel BC \text{ und Stufenwinkel} \\
 = 180^\circ - \beta, & \\
 \angle C_B C_A A_C = \angle C_B C_A C' + \angle C' C_A A_C & \\
 = (90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \angle B C' C_A - \angle C_A A_C C') & \sum \text{Innenwinkel im } \triangle C' C_A A_C \\
 = 90^\circ - \alpha + 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha) & (4.2) \\
 = \beta, &
 \end{array}$$

und jetzt nehmen wir die Umkehrung des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck.

Teil 7: $\omega_a = \omega_b = \omega_c$

Es kann nicht sein, daß $\omega_a = \omega_b \neq \omega_c$. Denn ω_a enthält vier der sechs Höhenfußpunkte zweiten Grades, ω_b enthält auch die zwei noch fehlenden, also sind alle sechs in $\omega_a = \omega_b$ enthalten. Dann kann ω_c nicht woanders liegen.

Seien also ω_a , ω_b und ω_c paarweise verschieden. Es ist $\omega_a \cap \omega_b = \{B_A, A_B\}$, also ist $A_B B_A$ die Potenzgerade des Kreispaares (ω_a, ω_b) . Analog ist $B_C C_B$ die Potenzgerade des Kreispaares (ω_b, ω_c) , und $C_A A_C$ ist die Potenzgerade des Kreispaares (ω_c, ω_a) . Nach Satz 4.60 schneiden diese drei Potenzgeraden einander in einem Punkte X . Diesen suchen wir jetzt. Wegen Stufenwinkelsatz ist $\angle B A_C C_A = \alpha$ und $\angle C_B B_C A = \beta$. Wir wenden den Scheitelwinkelsatz an den Punkten B_C und A_C an, und anschließend das Parallelenpostulat von Euklid in seiner Originalform (das fünfte Postulat auf Seite 17). Es folgt, daß X in derjenigen Halbebene bezüglich der Geraden AB liegt, in der C nicht ist (in der Abbildung ist X also „unterhalb“ der Geraden AB). Analog zeigt man, daß der Schnittpunkt von $A_C C_A$ und $A_B B_A$ „rechts oberhalb“ der Geraden BC liegt, und der Schnittpunkt von $B_A A_B$ und $C_B B_C$ liegt „links oberhalb“ der Geraden CA . Nach Satz 4.60 muß dieser Schnittpunkt aber immer derselbe Punkt X sein. Das ist absurd.

Es ist also unmöglich, daß $\omega_a = \omega_b \neq \omega_c$, und auch, daß alle drei Kreise paarweise verschieden sind.

Teil 8: BB'' ist Potenzgerade des Kreispaares (Ω_a, Ω_c) . Und analoge Aussagen für AA'' und CC'' .

Es schneiden Ω_a und Ω_c einander in B und in einem anderen unbekanntem Punkt. Also gehört B zur Potenzgerade von (Ω_a, Ω_c) .

Es sind a und c Sekanten (mit Schnittpunkt B'') im Sechspunktekreis $\omega_a = \omega_b = \omega_c$, nach Sehensatz ist also $|B'' A_B| \cdot |B'' A_C| = |B'' C_B| \cdot |B'' C_A|$. Aus dem ersten Kriterium von Lemma 4.63 folgt dann $\mathfrak{P}oten_{\Omega_a}(B'') = \mathfrak{P}oten_{\Omega_c}(B'')$. Also liegt B'' auf der Potenzgeraden des Kreispaares (Ω_a, Ω_c) .

Teil 9: Vollendung

Weil AA'' , BB'' und CC'' die Potenzgeraden von Paaren aus einem Tripel $(\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c)$ von Kreisen sind, schneiden sie einander in einem Punkt.

Der Beweis von Satz 4.62 ist vollständig. □

Ganz nebenbei haben wir bewiesen: die sechs Höhenfußpunkte zweiten Grades bilden ein Sehnensechseck, und in diesem Sechseck sind einander gegenüberliegende Seiten zueinander parallel.

Übungsaufgabe 4.8. Welche Aussagen können Sie zeigen, wenn Sie in diesem Sehnensechseck auf geeignete Weise das Theorem von Pascal anwenden (mit passend zu wählender Reihenfolge der sechs Ecken) ?

4.9 Die Spiegelung am Kreis

Wir wollen uns (ein Stück weit) mit dem APOLLONIUS–Problem beschäftigen: gegeben seien drei Kreise in der Ebene. Gesucht ist ein weiterer Kreis, der jeden der drei gegebenen Kreise berührt. Die Konstruktion soll ausschließlich mit Zirkel und Lineal erfolgen.

Weil ein Kreis entarten kann zu einem Punkte (Radius wurde Null) oder zu einer Gerade (Radius wurde unendlich), sind folgende Fälle von gegebenen Stücken zu betrachten:

1. drei Punkte,
2. drei Geraden,
3. ein Punkt, zwei Geraden,
4. zwei Punkte, eine Gerade,
5. ein Kreis, zwei Punkte,
6. ein Kreis, zwei Geraden,
7. ein Kreis, ein Punkt, eine Gerade,
8. zwei Kreise, ein Punkt,
9. zwei Kreise, eine Gerade,
10. drei Kreise.

Die Ordnung erfolgte ansteigend nach geschätztem Schwierigkeitsgrad. Siehe die Aufgaben A.17 und A.18. Eine höchst elegante Lösung des zehnten Problems, die zurückgeht auf GERGONNE, findet sich in [5].

Wir wollen hier eine Methode vorstellen, die zumindest bei einigen der gelisteten 10 Fälle zügig auf eine Lösung führt.

Definition 4.64. Sei Ω ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r . Wir definieren eine Spiegelung am Kreis wie folgt:

Sei P ein Punkt der Ebene, der ungleich O ist. Dann definieren wir den Bildpunkt P' als denjenigen Punkt auf dem Strahle \overrightarrow{OP} , für den dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2.$$

Weiterhin ergänzen wir die Ebene um **einen** unendlich fernen Punkt ∞ und vereinbaren, daß er auf jeder Geraden liegt, aber auf keinem Kreis. Wir können uns vorstellen, daß er oberhalb der Zeichenebene schwebt, senkrecht über O (oder wir stellen ihn uns überhaupt nicht vor). Dann können wir definieren, daß die Spiegelung am Kreis den Mittelpunkt O auf ∞ abbildet. Und ∞ wird auf O abgebildet.

Weiterhin haben dann zwei parallele Geraden genau einen Schnittpunkt (nämlich ∞), und zwei nichtparallele Geraden genau zwei Schnittpunkte (nämlich den bisherigen und ∞).

Wir beobachten, daß diese Spiegelung das Kreisinnere mit dem Kreisäußeren vertauscht. Jeder Punkt auf dem Kreise bleibt dort, wo er ist. Wenn der Kreis gleich dem Einheitskreis im $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist, und wenn wir komplexe Zahlen einführen, dann können wir die Spiegelung am Kreis darstellen durch die Abbildungsvorschrift

$$z \mapsto \overline{\left(\frac{1}{z}\right)},$$

und dies ist die Kombination einer Spiegelung an der reellen Achse mit einer holomorphen Funktion. Aus der Funktionentheorie kennen wir einige Methoden, das Verhalten von holomorphen Funktionen zu beschreiben und zu untersuchen, sodaß wir manche der demnächst präsentierten Ergebnisse auch auf funktionentheoretischem Wege bekommen könnten, wenn gewünscht.

Folgende Eigenschaften sollten klar sein:

- die Spiegelung am Kreis ist eine Involution der erweiterten euklidischen Ebene auf sich (ist also gleich ihrer eigenen inversen Abbildung),
- jede Gerade durch O wird auf sich selbst abgebildet (aber nicht jeder Punkt auf einer solchen Geraden auf sich). Hierbei haben wir jede Gerade stillschweigend um den Punkt ∞ ergänzt (damit die Sprechweise einfacher wird).

Der Kathetensatz gibt uns eine Möglichkeit, den Bildpunkt mit Zirkel und Lineal zu konstruieren:

P liegt auf Ω : dann ist $P' = P$.

P liegt außerhalb von Ω , aber $P \neq \infty$: wir legen die Tangenten von P an den Kreis und erhalten die Tangentenberührungspunkte T_1 und T_2 . Dann ist $\{P'\} = OP \cap T_1T_2$.

P liegt innerhalb von Ω , aber $P \neq O$: wir errichten in P die Senkrechte auf den Strahl \overrightarrow{OP} . Die Schnittpunkte der Senkrechten mit Ω nennen wir T_1 und T_2 . Dann ist P' gleich dem Schnittpunkt der beiden Tangenten an Ω in T_1 und T_2 miteinander.

$P = O$ oder $P = \infty$: siehe oben.

Lemma 4.65. *Sei g eine Gerade, die nicht durch O verläuft. Dann wird g bei der Spiegelung am Kreis Ω auf einen Kreis abgebildet, der durch O verläuft.*

Beweis. Wir fällen das Lot von O auf g und taufen den Lotfußpunkt P . Sein Bild unter der Spiegelung am Kreis sei P' . Sei Q ein beliebiger weiterer Punkt auf g , und sein Bildpunkt sei Q' . Dann haben wir $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$, also liegen (wegen der Umkehrung des Sekantensatzes) die Punkte P, P', Q, Q' auf einem Kreis. Im Dreieck $\triangle P'PQ$ gibt es einen rechten Winkel bei P , also muß (wegen der Umkehrung des Thalesatzes) die Strecke $\overline{P'Q}$ der Durchmesser des Kreises um die Punkte P, P', Q, Q' sein. Wegen des Thalesatzes ist dann auch im Dreieck $\triangle PQ'Q$ der Winkel bei Q' ein rechter Winkel, also ist das Dreieck $\triangle OP'Q'$ ein rechtwinkliges mit rechtem Winkel bei Q' .

Wir haben damit erhalten: jeder Punkt Q der Geraden g wird auf einen Punkt Q' auf denjenigen Kreis abgebildet, der $\overline{OP'}$ als Durchmesser hat. Damit ist das Bild der Geraden g enthalten auf dem genannten Kreise, und es fehlt bloß noch die Surjektivität.

Wenn wir die Argumentation uns nochmal anschauen, erkennen wir, daß jeder Punkt auf dem Kreise mit Durchmesser $\overline{OP'}$ seinerseits aber bei Spiegelung am Kreis Ω auf g abgebildet wird. Also ist das Bild von g gleich dem Kreis mit Durchmesser $\overline{OP'}$. \square

Korollar 4.66. *Kreise durch den Punkt O werden bei der Spiegelung am Kreis auf Geraden abgebildet, die nicht durch O verlaufen.*

Lemma 4.67. *Jeder Kreis ω , der nicht durch O verläuft, wird bei Spiegelung am Kreis Ω auf einen Kreis ω' abgebildet, der ebenfalls nicht durch O verläuft.*

Beweis. Wir wählen eine Gerade durch O , die den Kreis ω in einem Durchmesser schneidet. Die Endpunkte dieses Durchmessers des Kreises ω seien A und B . Sei C irgendein weiterer Punkt auf dem Kreise ω .

Die Bildpunkte von A, B, C unter der Spiegelung am Kreis Ω sollen A', B', C' heißen, wie üblich. Dann haben wir einerseits $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = |OC| \cdot |OC'| = r^2$, und andererseits ist der Winkel bei C im Dreieck $\triangle ABC$ ein rechter Winkel, wegen des Thalesatzes.

Wegen der Umkehrung des Sekantensatzes liegen die Punkte A, A', C, C' auf einem Kreise, und die Punkte B, B', C, C' liegen auch auf einem Kreise. Wegen des Satzes 4.23 haben wir dann

$$\angle A'C'C \equiv \angle A'AC \pmod{180^\circ}, \quad \angle B'C'C \equiv \angle B'BC \pmod{180^\circ}.$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \angle B'C'A' &\equiv \angle B'C'C + \angle CC'A' \pmod{360^\circ} \\ &\equiv \angle B'C'C - \angle A'C'C \pmod{360^\circ} \\ &\equiv \angle B'BC - \angle A'AC \pmod{180^\circ} \\ &\equiv -\angle CBB' + \angle CAA' \pmod{180^\circ} \\ &\equiv -\angle CBA + \angle CAB \pmod{180^\circ} && \left| \begin{array}{l} (4.1), \quad (4.1) \end{array} \right. \\ &\equiv \angle ABC + \angle CAB \pmod{180^\circ} \\ &\equiv (180^\circ - \angle BCA) \pmod{180^\circ} && \left| \begin{array}{l} \text{(Innenwinkelsumme im Dreieck } \triangle ABC) \end{array} \right. \\ &\equiv 90^\circ \pmod{180^\circ}, \end{aligned}$$

also hat das Dreieck $\triangle A'B'C'$ einen rechten Winkel bei C' . Damit liegt C' auf dem Thaleskreise über der Strecke $\overline{A'B'}$.

Also haben wir gezeigt: das Bild des Kreises ω unter der Spiegelung am Kreis Ω liegt auf dem Thaleskreise über der Strecke $\overline{A'B'}$. Auf üblichem Wege stellen wir die Surjektivität fest, was den Beweis vollendet. \square

Warnung 4.68. Der Mittelpunkt des Originalkreises wird in den meisten Fällen **nicht** auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet !

Satz 4.69. Seien A, B zwei von O und ∞ verschiedene Punkte, und seien A', B' ihre Bildpunkte. Dann gilt für deren Abstände, daß

$$|A'B'| = \frac{|AB| \cdot r^2}{|OA| \cdot |OB|}.$$

Beweis. Es ist $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'| = r^2$, also sind die Dreiecke $\triangle OAB$ und $\triangle OB'A'$ ähnlich. Daraus folgt dann

$$\frac{|A'B'|}{|BA|} = \frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{r^2}{|OA|} \cdot \frac{1}{|OB|},$$

woraus wir zügig die Behauptung gewinnen. \square

Satz 4.70. Die Spiegelung am Kreis ist lokal winkeltreu. Das bedeutet: wenn zwei glatte Kurven einander in einem Punkte $P \neq O$ unter einem Winkel α schneiden, ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$), dann schneiden auch die Bildkurven einander am Bildpunkte P' unter demselben Winkel. Der Winkel zwischen zwei Kurven ist definiert als Winkel zwischen den entsprechenden Tangenten (genommen am Schnittpunkt).

Beweis. Dies gilt für jede holomorphe Funktion f in einer Umgebung eines Punktes z_0 , wenn dort $f'(z_0) \neq 0$ ist. Und die Spiegelung am Einheitskreis ist aber die Komposition aus der holomorphen Funktion $f = f(z) = 1/z$ und der Spiegelung an der reellen Achse. Und tatsächlich ist $f'(z) \neq 0$ für jegliches $z \neq 0$. \square

Wer mag, kann die lokale Winkeltreue auch aus Satz 4.69 herausholen, wobei die beiden Kurven durch den Punkt A verlaufen mögen, und B_1 sei auf der einen Kurve, B_2 auf der anderen, und beide recht nah an A . Die Sekanten AB_1 und AB_2 nähern die jeweiligen Tangenten an, usw.

Übungsaufgabe 4.9. Es sei H der Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$. Durch Spiegelung an einem Kreis mit Mittelpunkt H mögen die Punkte A, B, C abgebildet werden auf A', B', C' . Zeige, daß H der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ ist.

Wie angekündigt, hier nun eine Lösung des Apollonius-Problems für den Fall, daß eines der gegebenen Stücke ein Punkt ist. Es seien also die drei Stücke P, K_1, K_2 gegeben, wobei P ein Punkt ist, und K_i ist jeweils ein Punkt oder eine Gerade oder ein Kreis. Wir beschränken uns jetzt auf den Fall, daß P weder mit K_1 noch mit K_2 inzidiert (und überlassen diesen ignorierten Fall den Leserinnen und Lesern). Der gesuchte Kreis heiße K .

Wir wählen einen beliebigen Hilfskreis Ω mit Mittelpunkt P . Die Spiegelung am Kreis Ω bildet ab wie folgt:

wenn K_i ein Punkt ist: dann ist K'_i auch ein Punkt,

wenn K_i eine Gerade oder ein Kreis ist: dann ist K'_i ein Kreis,

und es ist K ein Kreis durch P : also ist K' eine Gerade, die nicht durch P verläuft.

Weil die Spiegelung lokal winkeltreu ist, muß K' eine Tangente an K'_i sein, wenn K'_i ein Kreis ist.

Wir suchen also eine Gerade K' , die genau eines der drei folgenden Dinge bewerkstelligt:

K' geht durch zwei Punkte,

K' geht durch einen Punkt und tangiert einen Kreis,

K' tangiert zwei gegebene Kreise.

Die erste Konstruktionsaufgabe ist trivial, die zweite einfach (Hinweis: Thalesatz), und für die dritte verweisen wir auf Aufgabe A.7.

Nachdem wir K' gewonnen haben, bekommen wir K durch erneutes Spiegeln am Kreis Ω .

4.10 Pole, Polaren und Dualität ☹

Für die h-Geometrie (vgl. Abschnitt 1.5) und die projektive Geometrie brauchen wir noch zwei Begriffe.

Definition 4.71. Sei Ω ein Kreis mit Mittelpunkt O . Für einen Punkt $P \neq O$ definieren wir die Polare von P (geschrieben als $\mathfrak{Polare}(P)$) als diejenige Gerade, die senkrecht auf dem Halbstrahl \overrightarrow{OP} steht und durch den Bildpunkt P' von P bei Spiegelung am Kreis Ω verläuft.

Sei umgekehrt g eine Gerade, die nicht durch O verläuft. Dann definieren wir den Pol von g (geschrieben als $\mathfrak{Pol}(g)$) als denjenigen Punkt P , für den $g = \mathfrak{Polare}(P)$.

Es ergibt sich später jeweils aus dem Kontext, auf welchen Kreis Ω sich diese Konstruktion bezieht.

Für einen Punkt P außerhalb von Ω verläuft $\mathfrak{Polare}(P)$ durch die beiden Berührungspunkte der Tangenten von P an den Kreis Ω ; und wir wollen uns schrittweise einige äquivalente Beschreibungen erarbeiten.

Der folgende Satz hat unter der Bezeichnung **Dualitätsprinzip** allerhöchste Bedeutung erlangt.

Satz 4.72. Seien P und Q zwei Punkte ungleich O . Dann liegt P auf der Polaren zu Q genau dann, wenn Q auf der Polaren zu P liegt.

Beweis. Die Bildpunkte von P und Q bei Spiegelung am Kreis nennen wir P' bzw. Q' . Sei $Q \in \mathfrak{Polare}(P)$. Wir wollen zeigen, daß $P \in \mathfrak{Polare}(Q)$.

Wir errichten in Q' die Senkrechte zum Strahl \overrightarrow{OQ} . Diese muß den Strahl \overrightarrow{OP} schneiden (warum?), und den Schnittpunkt nennen wir \tilde{P} . Die Behauptung würde sich ergeben, wenn wir gezeigt hätten, daß $|O\tilde{P}| = |OP|$. Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle OP'Q$ und $\triangle OQ'\tilde{P}$ ist

$$|O\tilde{P}| \cdot |OP'| = |OQ'| \cdot |OQ|,$$

und nach Definition der Spiegelung am Kreis ist $|OP| \cdot |OP'| = |OQ| \cdot |OQ'|$, also ist tatsächlich $|O\tilde{P}| = |OP|$. Damit ist der Beweis des Dualitätsprinzips vollendet. \square

Als eine Anwendung nehmen wir zwei verschiedene Punkte R, S und fragen nach dem Pol der Geraden RS (unter den Zusatzannahmen $R \neq O, S \neq O$, und RS verläuft nicht durch O). Wir gelangen zur Vermutung, daß $\mathfrak{Pol}(RS) = \mathfrak{Polare}(R) \cap \mathfrak{Polare}(S)$ gelten könnte, unter der Zusatzannahme, daß $\mathfrak{Polare}(R)$ und $\mathfrak{Polare}(S)$ nicht-parallel sind. (Es ist gerade der Vorteil der projektiven Geometrie, daß all diese lästigen Zusatzannahmen sich in Luft auflösen.)

Um diese Vermutung zu prüfen, definieren wir $\{T\} := \mathfrak{Polare}(R) \cap \mathfrak{Polare}(S)$. Dann ist $T \in \mathfrak{Polare}(R)$, also $R \in \mathfrak{Polare}(T)$. Und analog haben wir $T \in \mathfrak{Polare}(S)$, also $S \in \mathfrak{Polare}(T)$. Nun ist aber $\mathfrak{Polare}(T)$ eine Gerade, und die verschiedenen Punkte R und S liegen darauf, also ist $\mathfrak{Polare}(T) = RS$. Das ist nach Definition aber gleichbedeutend mit $T = \mathfrak{Pol}(RS)$. Damit ist die Vermutung $\mathfrak{Pol}(RS) = \mathfrak{Polare}(R) \cap \mathfrak{Polare}(S)$ bestätigt.

Wir kommen zu einer weiteren Beschreibung von Polaren.

Satz 4.73. *Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einem Kreis Ω . Wir bilden alle drei Schnittpunkte von Geradenpaaren:*

$$\{P\} := AB \cap CD, \quad \{Q\} := AC \cap BD, \quad \{R\} := AD \cap BC.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{Polare}(P) = QR, \quad \mathfrak{Polare}(Q) = RP, \quad \mathfrak{Polare}(R) = PQ.$$

Beweis. Die Tangenten an Ω in den Punkten A, B, C, D nennen wir t_A, t_B, t_C, t_D . Dann setzen wir

$$\{X\} := t_A \cap t_D, \quad \{Y\} := t_B \cap t_C,$$

was Punkte außerhalb des Kreises Ω sind. Aus der Definition der Polaren haben wir direkt

$$AD = \mathfrak{Polare}(X), \quad BC = \mathfrak{Polare}(Y).$$

Wegen $R \in AD, R \in BC$ folgt dann also

$$R \in \mathfrak{Polare}(X), \quad R \in \mathfrak{Polare}(Y),$$

und das Dualitätsprinzip macht daraus

$$X \in \mathfrak{Polare}(R), \quad Y \in \mathfrak{Polare}(R),$$

was dann direkt $XY = \mathfrak{Polare}(R)$ impliziert.

Nun wählen wir einen Punkt A_1 auf Ω , der in der Nähe von A liegt, und einen Punkt D_1 auf Ω , der in der Nähe von D liegt. Wir wenden das Theorem von Pascal auf das Sehnensechseck AA_1BDD_1C an, und dann lassen wir A_1 nach A konvergieren, und D_1 nach D . Die Schnitte gegenüberliegender Seiten in diesem Sehnensechseck konvergieren dann zu

$$t_A \cap t_D = \{X\}, \quad AB \cap DC = \{P\}, \quad BD \cap CA = \{Q\},$$

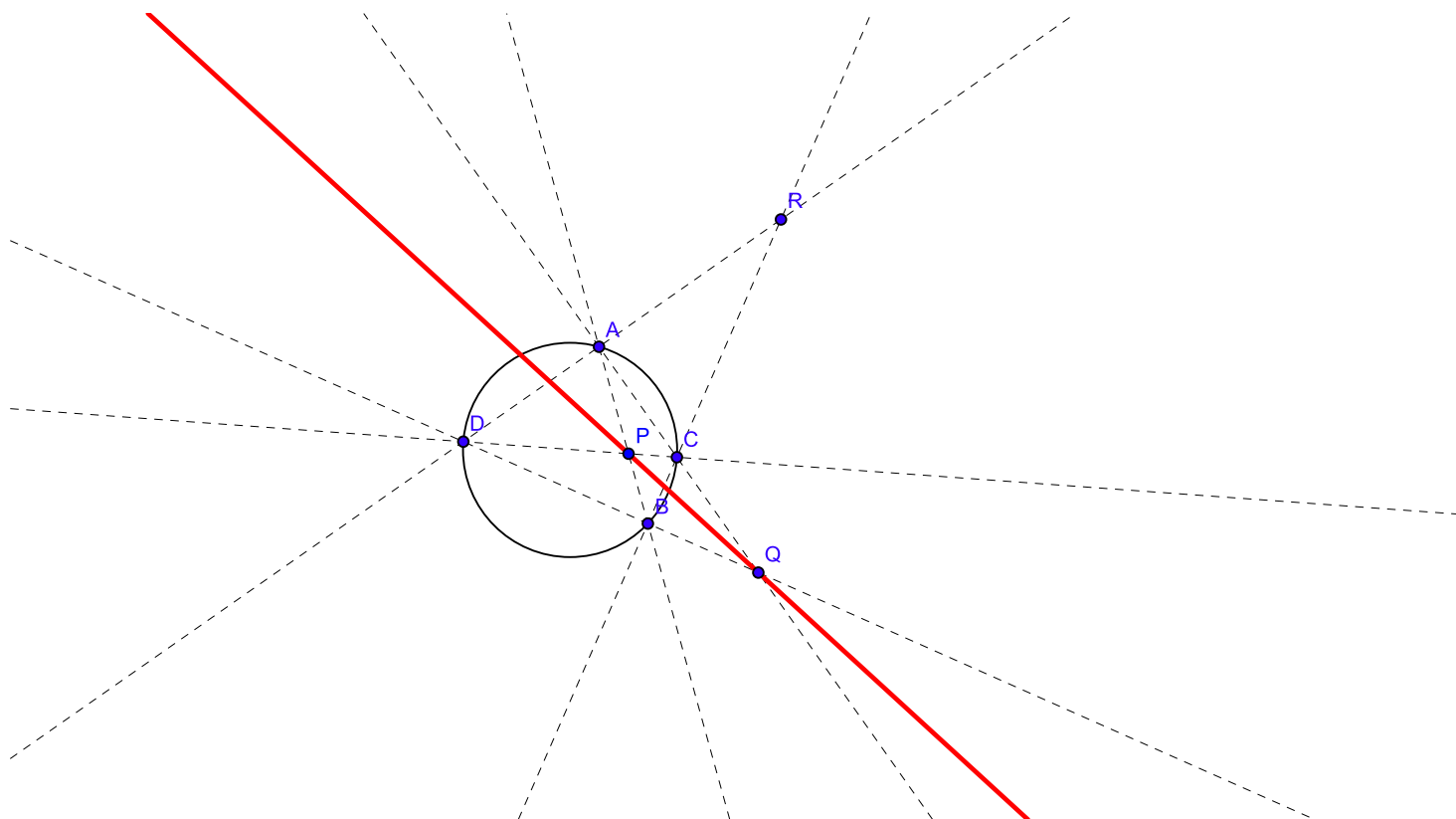
also sind X, P, Q kollinear.

Analog wenden wir das Theorem von Pascal auf das (entartete) Sehnensechseck $ABBDC$ an, und die Schnitte gegenüberliegender Seiten sind dann

$$AB \cap DC = \{P\}, \quad t_B \cap t_C = \{Y\}, \quad BD \cap CA = \{Q\},$$

und demzufolge sind P, Y, Q kollinear. Zusammen mit dem vorigen Ergebnis heißt dies, daß P, Q, X, Y auf einer Geraden liegen, also $PQ = XY$ als Gleichheit von Geraden, und somit $PQ = \mathfrak{Polare}(R)$. Die anderen beiden Identitäten $\mathfrak{Polare}(P) = QR$ und $\mathfrak{Polare}(Q) = RP$ beweisen sich analog. \square

Übungsaufgabe 4.10. *Sei ein Punkt außerhalb eines Kreises gegeben. Konstruieren Sie die Tangenten von diesem Punkt an den Kreis, aber nur mit Lineal.*



4.11 Harmonien und Doppelverhältnisse der Punkte

Für vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D auf derselben Geraden ist das Doppelverhältnis der Punktepaare (C, D) und (A, B) erklärt als

$$DV(A, B; C, D) := \frac{|AC|}{|CB|} : \frac{|AD|}{|DB|}, \quad (4.3)$$

und wir rechnen schnell nach, daß

$$DV(B, A; C, D) = \frac{1}{DV(A, B; C, D)}, \quad (4.4)$$

$$DV(C, D; A, B) = DV(A, B; C, D). \quad (4.5)$$

Gleichung (4.3) legt dann für paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D die Definitionen

$$DV(A, A; C, D) = 1, \quad DV(A, B; B, D) = \infty, \quad DV(A, B; A, D) = 0$$

(und ähnliche daraus sich mittels (4.4) und (4.5) ergebende) nahe. Hierbei vereinbaren wir, daß $+\infty = -\infty$. Wir unternehmen keinen Versuch, den Ausdruck DV zu definieren, wenn drei der Argumente derselbe Punkt sind.

Definition 4.74. Zwei Punktepaare (A, B) und (C, D) auf derselben Geraden heißen harmonisch genau dann, wenn

$$DV(A, B; C, D) = -1.$$

Man sagt auch, daß diese beiden Paare (zueinander) harmonisch liegen.

Wenn die Paare (A, B) , (U, V) zueinander harmonisch liegen, dann ist einer der Punkte U, V innerhalb der Strecke \overline{AB} , der andere außerhalb, und wir haben dann

$$\frac{|AU|}{|UB|} = \frac{|AV|}{|VB|}$$

als Gleichheit von Quotienten traditioneller Streckenlängen. Das passiert häufiger als gedacht:

Satz 4.75. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck; die Innenwinkelhalbierende bei C schneide die Strecke \overline{AB} in U , und die Außenwinkelhalbierende bei C schneide die Gerade AB in V .

Dann liegen (A, B) und (U, V) zueinander harmonisch.

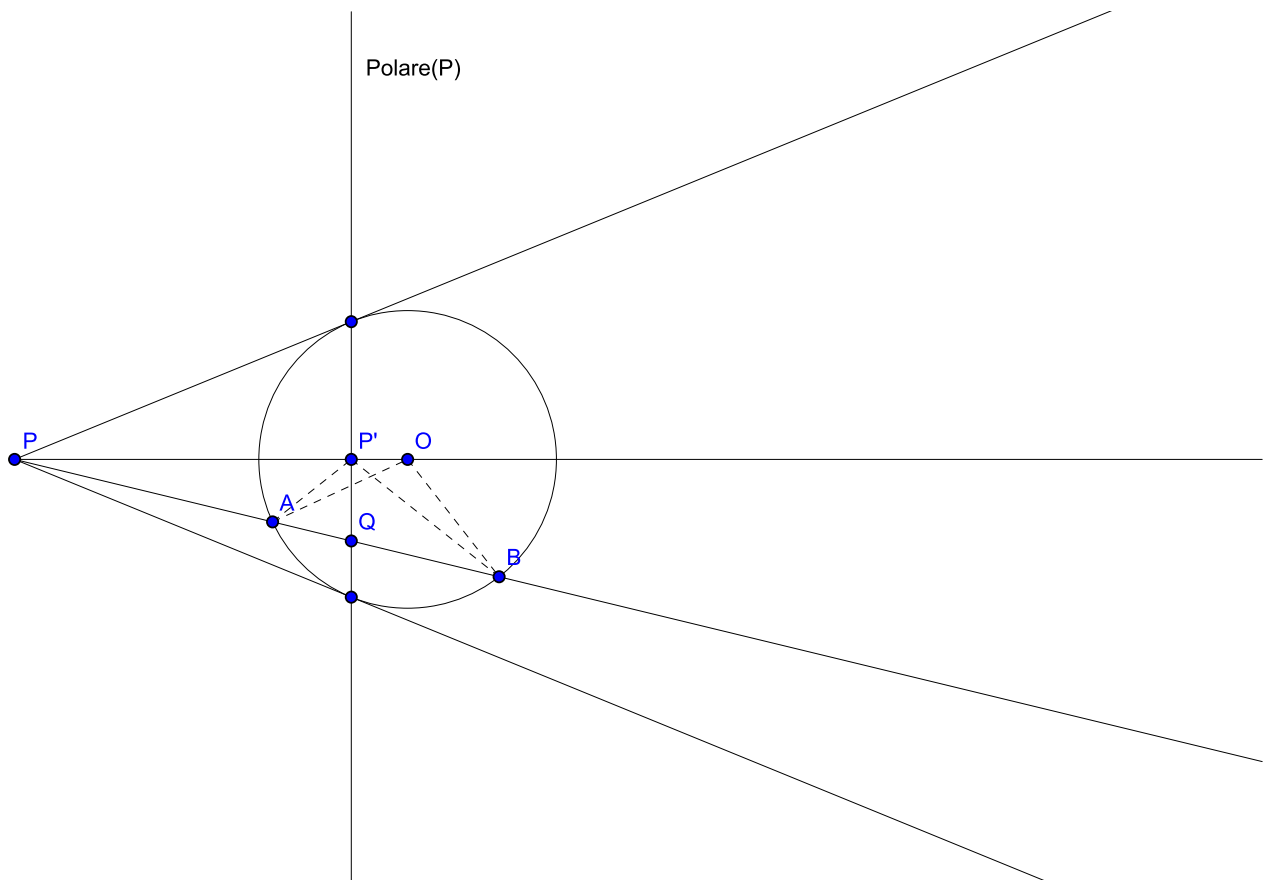
Beweis. Aus Satz 4.36 haben wir $|AU| : |UB| = |AC| : |BC|$. Weiterhin ist (mit ähnlicher Argumentation wie im Beweis zu Satz 4.36)

$$\frac{|AV|}{|VB|} = \frac{\mathcal{F}(\triangle AVC)}{\mathcal{F}(\triangle VBC)} = \frac{\frac{1}{2}|AC| \cdot \text{dist}(V, AC)}{\frac{1}{2}|BC| \cdot \text{dist}(V, BC)} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

also gilt tatsächlich $|AU| : |UB| = |AV| : |VB|$. \square

Satz 4.76. Sei P ein Punkt außerhalb des Kreises Ω , g eine Sekante durch P , die Ω in den Punkten A und B schneiden möge, und sei $\{Q\} := g \cap \mathfrak{Polare}(P)$.

Dann sind (A, B) und (P, Q) harmonische Punktepaare.



Beweis. Sei P' der Bildpunkt von P bei Spiegelung an Ω . Es ist dann, gemäß der Definition der Spiegelung am Kreis,

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2 = |OA|^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|OA|}{|OP|} = \frac{|OP'|}{|OA|},$$

also folgt die Ähnlichkeit $\triangle AOP' \sim \triangle POA$, denn beide Dreiecke haben den Winkel bei O gemeinsam. Dann ergibt sich aber

$$\frac{|AP'|}{|OP'|} = \frac{|PA|}{|OA|}. \quad (4.6)$$

Weiterhin ist

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2 = |OB|^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|OB|}{|OP|} = \frac{|OP'|}{|OB|},$$

also folgt die Ähnlichkeit $\triangle BOP' \sim \triangle POB$, denn beide Dreiecke haben den Winkel bei O gemeinsam. Dann ergibt sich aber

$$\frac{|BP'|}{|OP'|} = \frac{|PB|}{|OB|}.$$

Division von (4.6) durch diese Gleichung verschafft uns dann

$$\frac{|AP'|}{|BP'|} = \frac{|PA|}{|PB|},$$

denn $|OA| = |OB|$. Also ist die Gerade PP' die Außenwinkelhalbierende zum Winkel bei P' am Dreieck $\triangle AP'B$. Weil die Gerade $P'Q$ senkrecht auf der Geraden PP' steht, muß dann $P'Q$ die Innenwinkelhalbierende am Eckpunkt P' des Dreiecks $\triangle AP'B$ sein, denn bei jedem Dreieck stehen an jeder Ecke die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende aufeinander senkrecht.

Nun brauchen wir bloß noch Satz 4.75 bemühen. □

Wenn (A, B) , (P, P') zueinander harmonisch liegen, dann ist offenkundig

$$-1 = DV(A, B; P, P') = DV(B, A; P, P') = DV(A, B; P', P) = DV(P', P; A, B) = \dots,$$

wegen der Rechenregeln (4.4), (4.5). Damit eröffnet sich uns eine zweite Variante, Polaren zu definieren.

Satz 4.77. *Sei $P \neq O$, $P \notin \Omega$. Zu jeder Sekante g von Ω , die durch P verläuft, bestimmen wir den eindeutigen Punkt P' auf g , für den (P, P') harmonisch liegt zu $g \cap \Omega$.*

Dann bildet die Menge aller Punkte P' , die man mit dieser Konstruktion erhält bei Variation der Sekante g , eine Gerade, und diese Gerade ist gleich der Polaren von P .

Hierbei spielt es keine Rolle, ob P innerhalb oder außerhalb von Ω liegt. Erwähnenswert bleibt auch: anstelle des Kreises Ω können wir auch einen beliebigen Kegelschnitt nehmen, und die Menge der entstehenden P' ist jedesmal eine Gerade, die wir dann *die Polare von P* taufen.

4.12 Noch mehr Harmonie und Dualität ❀

Wir wollen einen zweiten Beweis von Satz 4.73 geben, der es vermeidet, das Theorem von Pascal zu bemühen. Stattdessen verwenden wir einen etwas elementareren Satz.

Ein (vollständiges) Viereck entsteht, indem man sich vier Punkte in allgemeiner Lage vorgibt (das heißt: die vier Punkte sind paarweise verschieden, und keine drei davon sind auf einer gemeinsamen Geraden), und anschließend alle Verbindungsgeraden bildet. Das sind sechs Stück, von denen typischerweise zwei als *Diagonalen* bezeichnet werden.

Ein vollständiges *Vierseit* entsteht auf umgekehrtem Wege: man wählt vier Geraden in allgemeiner Lage (das heißt: die vier Geraden sind paarweise verschieden, keine drei davon gehen durch einen gemeinsamen Punkt, und keine zwei sind zueinander parallel), und anschließend werden alle Schnittpunkte gebildet (sechs Stück).

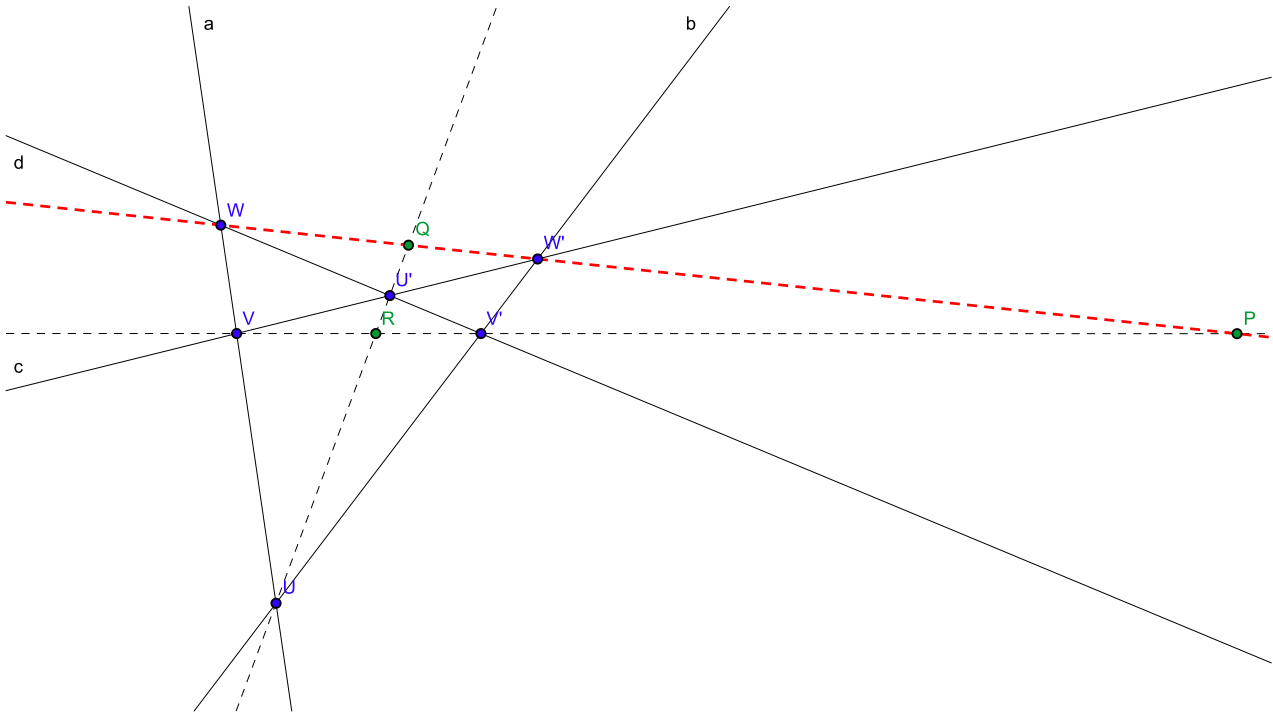
Satz 4.78. *Die Geraden a, b, c, d mögen ein vollständiges Vierseit erzeugen. Dann setzen wir*

$$\begin{aligned} \{U\} &:= a \cap b, & \{V\} &:= a \cap c, & \{W\} &:= a \cap d, \\ \{U'\} &:= c \cap d, & \{V'\} &:= b \cap d, & \{W'\} &:= b \cap c. \end{aligned}$$

Anschließend sei

$$\{P\} := VV' \cap WW', \quad \{Q\} := WW' \cap UU', \quad \{R\} := UU' \cap VV'.$$

Dann sind die Punktepaare (U, U') und (Q, R) in harmonischer Lage, die Punktepaare (V, V') und (R, P) auch, und die Punktepaare (W, W') und (P, Q) ebenfalls.



Beweis. Das Theorem von Ceva, angewandt auf das Dreieck $\triangle WW'U$ und den Ecktransversalenschnittpunkt U' , gibt uns

$$\frac{[WV]}{[VU]} \cdot \frac{[UV']}{[V'W']} \cdot \frac{[W'Q]}{[QW]} = +1.$$

Hierbei spielt es keine Rolle, ob U' innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt. Das Theorem von Menelaos, ebenfalls angewandt auf das Dreieck $\triangle WW'U$, mit der Geraden $VV'P$, liefert

$$\frac{[WV]}{[VU]} \cdot \frac{[UV']}{[V'W']} \cdot \frac{[W'P]}{[PW]} = -1.$$

Division beider Gleichungen bringt uns dann

$$\frac{[W'Q]}{[QW]} : \frac{[W'P]}{[PW]} = -1,$$

also $DV(W', W; Q, P) = -1$. Das wollten wir zeigen. \square

Satz 4.79 (Vgl. Satz 4.73). Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck im Kreis Ω . Wir definieren $\{K\} := AB \cap CD$, $\{L\} := AC \cap BD$, $\{M\} := AD \cap BC$. Dann gilt $\mathfrak{Polare}(M) = LK$.

Beweis. Wir haben ein vollständiges Vierseit aus den Geraden $a = DBL$, $b = AKB$, $c = DKC$, $d = ACL$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.78 haben wir dann

$$U = B, \quad V = D, \quad W = L, \quad U' = C, \quad V' = A, \quad W' = K.$$

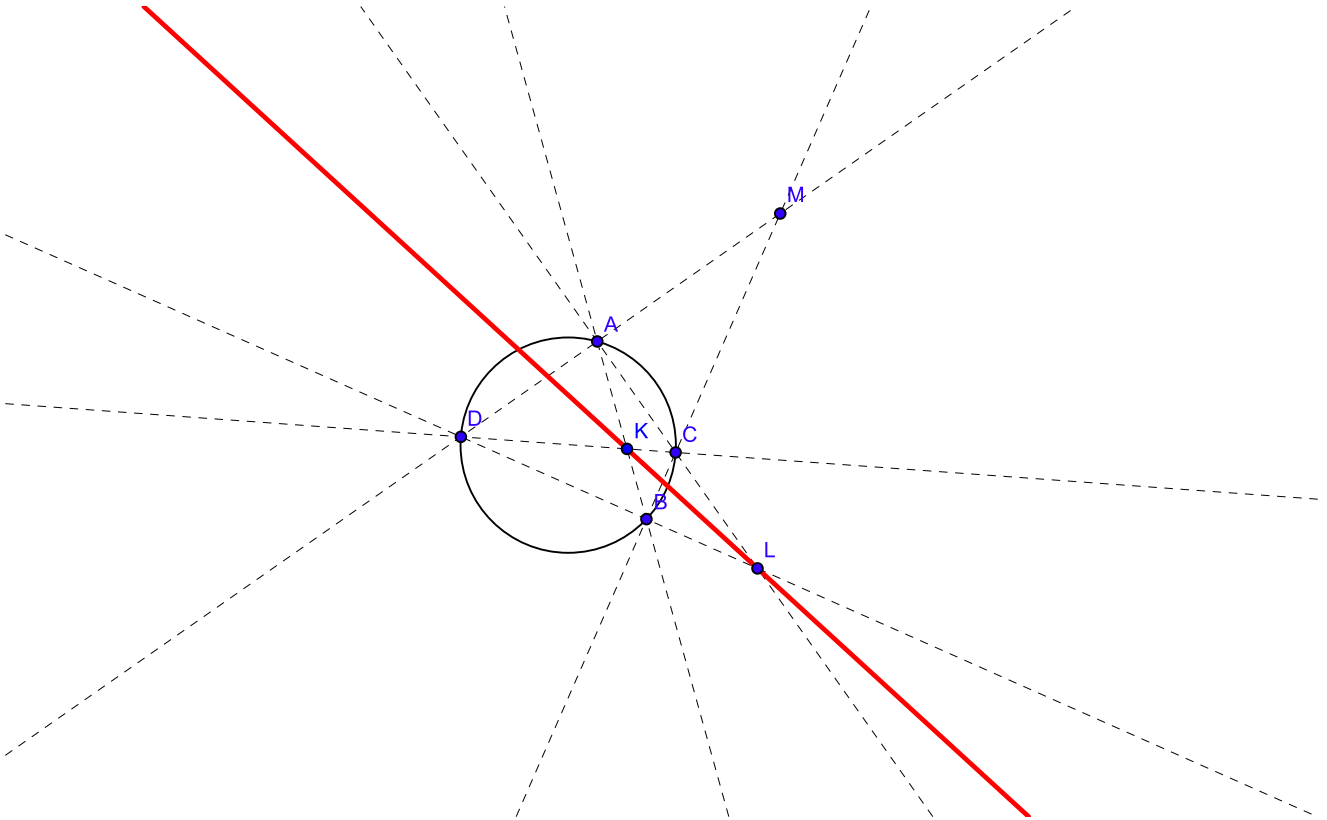
Weiterhin ist $\{R\} := UU' \cap VV' = BC \cap DA = \{M\}$, sowie

$$\{P\} := VV' \cap WW' = AD \cap LK, \quad \{Q\} := WW' \cap UU' = LK \cap BC.$$

Satz 4.78 besagt nun, daß (B, C) und (Q, M) ein harmonisches Punktapaar bilden. Also liegt, wegen Satz 4.77, Q auf der Polaren von M .

Satz 4.78 besagt aber auch, daß (D, A) und (M, P) ein harmonisches Punktapaar bilden. Wir wenden Satz 4.77 erneut an und bekommen, daß jetzt P auf der Polaren von M liegt.

Weil die Polare aber eine Gerade ist, ist demnach $\mathfrak{Polare}(M) = PQ$, und per Definition ist $PQ = LK$, als Gleichheit von Geraden. \square



Lemma 4.80. Seien (A, B) und (C, D) harmonische Punktepaare, und sei M der Mittelpunkt von \overline{CD} . Dann gilt

- $[AB] \cdot [AM] = [AC] \cdot [AD]$,
- $[MA] \cdot [MB] = [MC]^2 = [MD]^2$.

Beweis. Wir haben $[AM] = \frac{1}{2}([AC] + [AD])$ und $[AC] : [CB] = -[AD] : [DB]$ aus Harmoniegründen, woraus wir $[AC] \cdot [BD] = [AD] \cdot [CB]$ erhalten. Dann ist die erste Behauptung äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 & [AB] \cdot [AC] + [AB] \cdot [AD] = 2[AC] \cdot [AD], \\
 \Leftrightarrow & [AB] \cdot [AC] + [AB] \cdot [AD] = [AC] \cdot ([AB] + [BD]) + ([AB] + [BC]) \cdot [AD], \\
 \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad 0 = [AC] \cdot [BD] + [BC] \cdot [AD], \\
 \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad -[AC] \cdot [BD] = [BC] \cdot [AD], \\
 \Leftrightarrow & \qquad \qquad \qquad [AC] \cdot [BD] = [AD] \cdot [CB],
 \end{aligned}$$

und dies hatten wir aber vorausgesetzt. Und die zweite Behauptung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 [MA] \cdot [MB] &= [MA] \cdot ([MA] + [AB]) = [MA]^2 - [AC] \cdot [AD] \\
 &= ([MC] + [CA])^2 - [AC] \cdot [AD] \\
 &= [MC]^2 + 2[MC] \cdot [CA] + [CA]^2 - [AC] \cdot [AD] \\
 &= [MC]^2 + 2[CM] \cdot [AC] + [AC]^2 + [AC] \cdot [DA] \\
 &= [MC]^2 + [AC] \cdot (2[CM] + [AC] + [DA]) \\
 &= [MC]^2 + [AC] \cdot ([CD] + [DA] + [AC]) = [MC]^2.
 \end{aligned}$$

Und offenkundig ist $[MD]^2 = [MC]^2$, denn M ist der Mittelpunkt von \overline{CD} . □

Ganz nebenbei haben wir damit auch gezeigt, daß M außerhalb der Strecke \overline{AB} liegen muß (ansonsten bekämen wir einen Vorzeichenwiderspruch in der zweiten Behauptung).

4.13 Der wahrscheinlich eleganteste Beweis des Theorems von Pascal

Zur Abrundung beweisen wir das berühmte Theorem von Pascal ein weiteres Mal. Der originale Beweis (1639) von Pascal ist verloren gegangen, und im Laufe der Zeit wurden verschiedene Beweise angegeben. Überraschend ist, daß der folgende Beweis erst 1993 durch van Yzeren [18] entdeckt wurde, basierend auf (nicht ganz so eleganten) Betrachtungen in [8].

Beweis. Siehe Abbildung 4.10. Das Sechseck (nicht unbedingt konvex) sei $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$. Wir setzen

$$\{P_0\} := A_0A_1 \cap A_3A_4, \quad \{P_1\} := A_1A_2 \cap A_4A_5, \quad \{P_2\} := A_2A_3 \cap A_5A_0.$$

Wir betrachten noch den Umkreis von $\triangle A_1P_1A_4$. Dieser schneidet die Gerade P_0A_1 außerdem noch in B_0 , und die Gerade P_0A_4 außerdem noch in B_1 .

Wir wollen zeigen, daß die Dreiecke $\triangle B_0B_1P_1$ und $\triangle A_0A_3P_2$ auseinander durch Streckung am Zentrum P_0 hervorgehen. Zu diesem Zwecke weisen wir nach, daß entsprechende Kanten zueinander parallel sind. Wir betreiben Winkeljagd und verwenden ausgiebig Satz 4.23 und (4.1):

$$\begin{aligned} \angle A_1A_0A_3 &\equiv \angle A_1A_4A_3 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1A_4B_1 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1B_0B_1 \pmod{180^\circ}, \end{aligned}$$

also ist $A_0A_3 \parallel B_0B_1$ wegen der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes.

Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} \angle A_2P_1B_1 &\equiv \angle A_1P_1B_1 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1A_4B_1 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1A_4A_3 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1A_2A_3 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_1A_2P_2 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle P_1A_2P_2 \pmod{180^\circ}, \end{aligned}$$

also ist $P_1B_1 \parallel P_2A_2$ wegen der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes, und dann auch $P_2A_3 \parallel P_1B_1$.

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \angle A_5P_1B_0 &\equiv \angle A_4P_1B_0 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_4A_1B_0 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_4A_1A_0 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_4A_5A_0 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle A_4A_5P_2 \pmod{180^\circ} \\ &\equiv \angle P_1A_5P_2 \pmod{180^\circ}, \end{aligned}$$

also $B_0P_1 \parallel A_5P_2$ (Umkehrung des Wechselwinkelsatzes), und deshalb auch $A_0P_2 \parallel B_0P_1$. Demnach gehen die Dreiecke $\triangle A_0A_3P_2$ und $\triangle B_0B_1P_1$ tatsächlich durch Streckung auseinander hervor, und das Streckzentrum muß der Schnittpunkt von A_0B_0 und A_3B_1 sein, also P_0 . \square

Wir beobachten:

- Wenn man genügend viele Sehnenvierecke hat, dann lassen sich viele Sachverhalte beweisen (vgl. Satz 4.29).
- Mathematik erfordert Phantasie. Wie soll man bloß auf die Idee kommen, ausgerechnet den Umkreis von $\triangle A_1P_1A_4$ einzuzichnen? Und anschließend die Punkte B_0 und B_1 einzuführen? Das dürfte wesentlich dazu beigetragen haben, daß dieser Beweis über 350 Jahre hinweg nicht entdeckt wurde.

In [18] schreibt van Yzeren, wie er auf diesen Weg gefunden hat. Es klingt so, als ob er eigentlich andere Dinge untersuchen wollte und dann das Theorem von Pascal nur aus Versehen bewiesen hat. Das passiert in der Mathematik öfter.

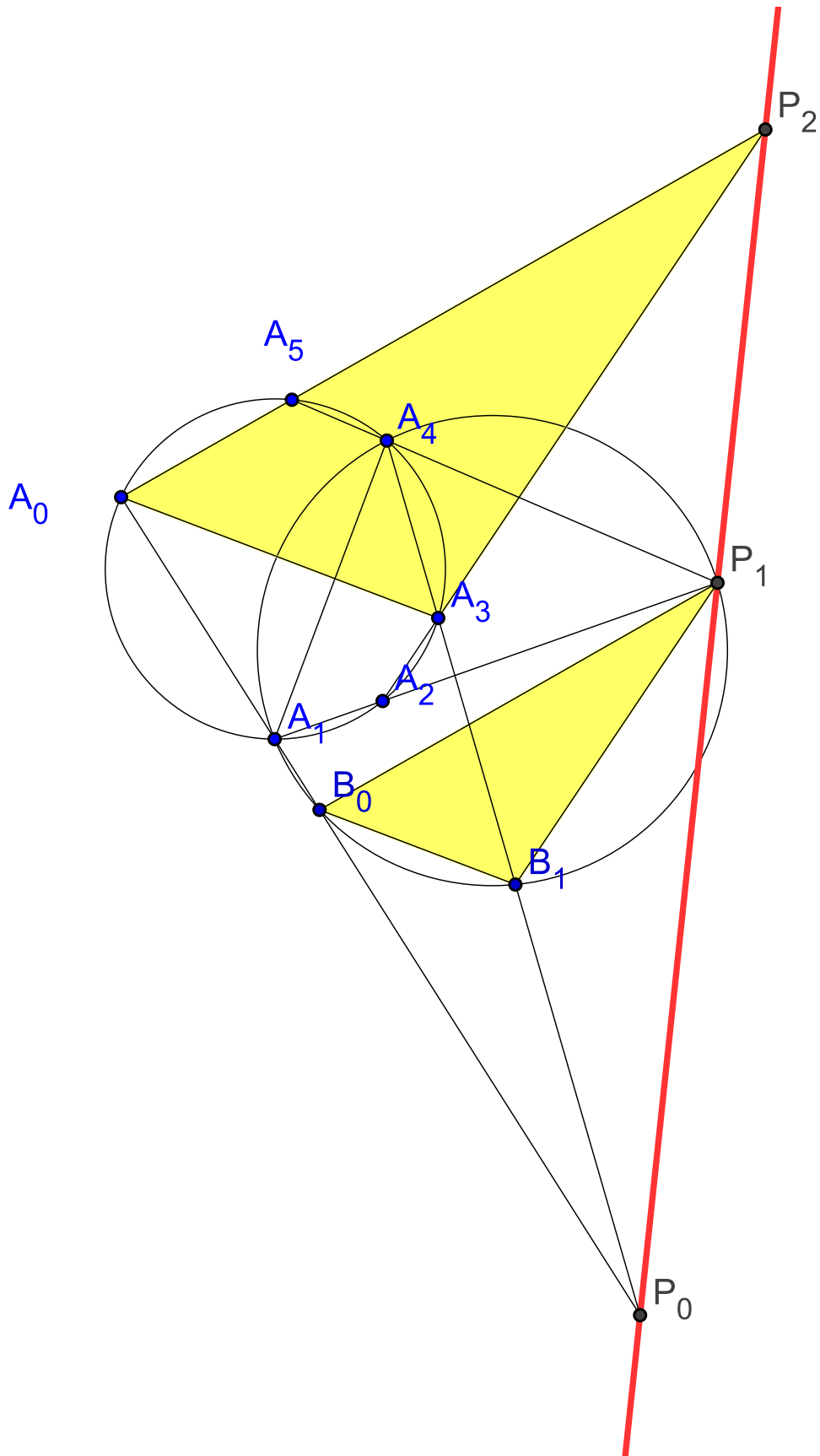


Abbildung 4.10: Zum Beweis des Theorems von Pascal

Kapitel 5

Die Eulersche Polyederformel

5.1 Allgemeines ☹

Zuerst wollen wir erklären, was ein *Polyeder* ist.

Definition 5.1. *Ein Polyeder \mathcal{P} ist eine beschränkte, abgeschlossene und zusammenhängende Punktmenge im \mathbb{R}^3 , deren Rand gebildet wird von endlich vielen ebenen Flächenstücken, die ihrerseits Polygone sind.*

Beispiele dafür sind Quader, Prismen, Pyramiden und alles, was man durch (endlich oft wiederholtes) zusammenhängendes Aneinanderfügen von diesen Körpern erhält. Kegel, Zylinder, (Halb-)Kugeln sind keine Polyeder.

Die Anzahl der Ecken, Flächen, Kanten eines Polyeders bezeichnen wir immer mit E , F , K ; und die Eulersche Polyederformel wird uns mitteilen, daß es einen Zusammenhang zwischen diesen 3 Zahlen gibt (zumindest dann, wenn das Polyeder konvex ist). Hierbei unternehmen wir keinen Versuch, die Begriffe „Ecke“, „Fläche“, „Kante“ logisch präzise zu definieren und begnügen uns mit der naheliegenden anschaulichen Interpretation.

Wenn wir nichts anderes erwähnen, ist ein Polyeder immer konvex (also insbesondere ohne Durchbohrungen (präziser: ohne Durchstanzungen) und ohne Hohlräume). Man überlegt sich für konvexe Polyeder:

- jede Fläche wird von mindestens 3 Kanten begrenzt,
- an jeder Ecke stoßen mindestens 3 Kanten zusammen,
- für jede Ecke gilt: all die Flächenwinkel, die diese Ecke als Scheitelpunkt haben, addieren sich zu weniger als 360° (hierfür brauchen wir die Konvexität, wie man sich überlegt, wenn man zwei Quader wie ein \top übereinanderbaut).

Wir nennen eine Ecke *n-wertig*, wenn an ihr genau n Kanten zusammenstoßen. Offenkundig ist dann $n \geq 3$, und es gibt genau n Flächeninnenwinkel, die diese Ecke als Scheitelpunkt haben.

Wir beginnen mit einer kleinen Beobachtung.

Lemma 5.2. *Sei \mathcal{P} ein Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen.*

- Wenn jede seiner Flächen ein Dreieck ist, dann gilt $3F = 2K$.
- Wenn jede seiner Ecken dreiwertig ist, dann gilt $3E = 2K$.

Beweis. • Wir gehen zu jeder Fläche und fragen sie: „Wieviele Kanten begrenzen dich?“ und addieren alle Antworten auf. Das ergibt $3F$. Dabei wird jede Kante zweimal gezählt, denn jede Kante ist die Schnittmenge von genau zwei Flächen. Also ist $3F = 2K$.

- Wir gehen zu jeder Ecke und fragen sie nach ihrer Wertigkeit und addieren alle Antworten auf. Das ergibt $3E$. Dabei wird jede Kante zweimal gezählt, denn jede Kante hat genau zwei Endpunkte (Ecken). Also ist $3E = 2K$.

□

In jedem \bullet haben wir die Technik des *doppelten Abzählens* verwendet. Diese ist so leistungsstark, daß wir sie noch öfter anwenden werden.

Satz 5.3. *Die Anzahlen der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, ... unter den Flächen eines Polyeders nennen wir F_3, F_4, F_5, \dots*

Dann ist

$$\sum_{j=3}^{\infty} F_j = F, \quad \sum_{j=3}^{\infty} jF_j = 2K, \quad 3F \leq 2K.$$

Die Anzahlen der dreiwertigen Ecken, vierwertigen Ecken, fünfwertigen Ecken, ... unter den Ecken eines Polyeders nennen wir E_3, E_4, E_5, \dots

Dann ist

$$\sum_{j=3}^{\infty} E_j = E, \quad \sum_{j=3}^{\infty} jE_j = 2K, \quad 3E \leq 2K.$$

Beweisidee. Sehr ähnlich zum vorigen Lemma. □

Bemerkung 5.4. *Man beobachte die Dualität Ecken \leftrightarrow Flächen,*

- auf der Ebene der Bezeichnungen,
- auf der Ebene der Beweisführung.

Es folgt das Hauptergebnis dieses Kapitels.

Theorem 5.5 (Eulersche Polyederformel). *Für jedes konvexe Polyeder \mathcal{P} mit E Ecken, K Kanten, F Flächen gilt $E - K + F = 2$.*

Beweis. Wir wählen eine Kugel \mathcal{K} groß genug, die \mathcal{P} in ihrem Inneren enthält. Vom Mittelpunkt der Kugel projizieren wir die Ecken, Flächen und Kanten von \mathcal{P} auf die Kugel. Weil das Polyeder \mathcal{P} konvex ist, hat die Bildfigur \mathcal{P}' auf der Kugel keine einander kreuzenden Kanten.

Wir wählen auf \mathcal{K} einen Punkt aus, der keine Ecke oder Kante von \mathcal{P}' ist, und ernennen ihn zum *Nordpol* N der Kugel, und sein Antipode heißt *Südpol* S der Kugel.

Jetzt projizieren wir \mathcal{P}' *stereographisch* auf eine Ebene. Das bedeutet folgendes: Wir wählen eine waagerechte Ebene und legen die Kugel \mathcal{K} darauf, sodaß S unten ist. Jeder Punkt X ($\neq N$) auf der Kugel wird auf die Ebene dadurch projiziert, daß man den Schnittpunkt X' des Strahls \overline{NX} mit der Ebene ermittelt. Dieser Punkt X' ist das Bild von $X \in \mathcal{K}$ bei der stereographischen Projektion von \mathcal{K} auf die Ebene.

In der Ebene entsteht ein sogenannter *Graph*¹ mit E Ecken und K Kanten, der $F - 1$ Teilflächen einschließt und von einer unbeschränkten Fläche umschlossen wird. Dieser Graph hat zwei wichtige Eigenschaften. Er ist

zusammenhängend: das heißt, daß man von jeder seiner Ecken zu jeder anderen Ecke entlang von Kanten laufen kann,

planar: das heißt, daß keine zwei seiner Kanten einander kreuzen. An dieser Stelle verwenden wir die Konvexität von \mathcal{P} .

Wir wollen zeigen, daß $E - K + F = 2$. Der Beweis wird einfacher, wenn wir allgemein zeigen, daß für jeden planaren zusammenhängenden Graphen mit $E(\geq 1)$ Ecken und K Kanten, der $F - 1$ Teilflächen der Ebene einschließt, gilt, daß $E - K + F = 2$.

Dies ist deshalb allgemeiner, weil nicht jeder solche Graph auf dem Wege unserer beiden Projektionen aus einem Polyeder erhalten werden kann (man denke an den Buchstaben X mit $E = 5, K = 4, F - 1 = 0$, bei dem es vier einwertige Ecken gibt).

¹Graphen sind übrigens ein ganz wichtiges Konzept in der Informatik. Dort wird das, was wir hier als *Ecken* aufführen, *Knoten* genannt. Wir bleiben trotzdem beim Begriff *Ecken*.

Der Beweis verläuft wie folgt: wir starten mit einem zusammenhängenden planaren Graphen (mit $E \geq 1$), bei dem wir den Wert von $E - K + F$ nicht kennen. Wir bauen ihn schrittweise ab, sodaß er immer planar und zusammenhängend bleibt (und auch die Eigenschaft $E \geq 1$ bleibt erhalten), sodaß während des Abbaus der Ausdruck $E - K + F$ invariant bleibt. Dies machen wir solange, bis der Graph „sehr einfach“ ist.

Wir brauchen noch den Begriff des *Zyklus* in einem Graphen: dies sind Ecken X_1, X_2, \dots, X_n (mindestens 3 Stück, keine zwei von diesen n Ecken sind gleich), sodaß es eine Kante X_1X_2 gibt, und eine Kante X_2X_3, \dots , eine Kante $X_{n-1}X_n$, und schließlich eine Kante X_nX_1 .

Fall 1: es ist $K \geq 1$, und der Graph enthält einen Zyklus

Dieser Zyklus enthält mindestens drei Kanten. Wenn wir genau eine Kante des Zyklus entfernen, dann bleibt der Graph zusammenhängend (denn wir können ja noch „andersrum laufen“). Es sinkt K um eins, und die Eckenzahl E bleibt gleich. Weiterhin sinkt F um eins, denn es sind jetzt zwei Flächenstücke „zusammengewachsen“. Eines von diesen liegt im „Innengebiet“ des Zyklus, das andere im „Außengebiet“. Also ändert sich $E - K + F$ nicht. Offenkundig ist immer noch $E \geq 1$.

Fall 2: es ist $K \geq 1$, und der Graph enthält keinen Zyklus

Dann muß der Graph eine einwertige Ecke haben. Das begründen wir so: angenommen, jede Ecke hätte mindestens die Wertigkeit Zwei (die Wertigkeit Null kann nicht auftreten, weil dies der Zusammenhangseigenschaft des Graphen widerspräche). Dann wählen wir irgendeine Ecke und eine beliebige der von ihr startenden Kanten. Diese Kante laufen wir entlang und kommen zur nächsten Ecke, welche ihrerseits mindestens die Wertigkeit Zwei hat. Von dieser neuen Ecke laufen wir entlang einer Kante weiter, wobei die bereits durchlaufenen Kanten verboten sind. In diesem Stile laufen wir immer weiter (wenn es an einer Ecke mehrere Wahlmöglichkeiten der Wegfortsetzung gibt, nehmen wie eine beliebige von diesen Wahlmöglichkeiten), und die jemals zuvor durchlaufenen Kanten sind für immer verboten. Wenn wir an einer Ecke ankommen, sind genau zwei Fälle möglich:

an dieser Ecke waren wir früher schon einmal: das kann nicht sein, denn dann hätte der Graph einen Zyklus, was aber ausgeschlossen wurde.

an dieser Ecke waren wir nie zuvor: dann können wir von dieser Ecke aus aber weiterlaufen, denn diese Ecke hat mindestens die Wertigkeit zwei, und beim Ankommen an dieser neuen Ecke ist erst eine Kante verbraucht.

Es tritt beim Durchlaufen des Graphen also immer der zweite Fall ein, niemals der erste. Also können wir den Graphen unendlich weit durchlaufen. Aber der Graph hat bloß endlich viele Ecken. Das ist ein Widerspruch.

Also gibt es eine Ecke der Wertigkeit Eins. Diese Ecke entfernen wir, und damit zwangsläufig auch die zu dieser Ecke hinführende Kante. Es sinken E und K um eins, aber F bleibt gleich. Also ändert sich $E - K + F$ nicht. Offenkundig ist immer noch $E \geq 1$.

Fall 3: es ist $K = 0$

Nach dem Abbauschritt von Fall 1 bzw. Fall 2 ist jeweils $E \geq 1$, also kann jetzt nicht $E = 0$ sein. Also ist $E \geq 1$. Weil der Graph aber zusammenhängend ist, ist $E \geq 2$ unmöglich. Also ist $E = 1$. Dann besteht der Graph aus genau einer Ecke, demzufolge auch keiner Kante, und es ist $F = 1$. Folglich ist² $E - K + F = 1 - 0 + 1 = 2$.

In den Abbauschritten der beiden Fälle 1 und 2 wird K jeweils um eins reduziert, also kommen wir nach endlich vielen Schritten tatsächlich im Fall 3 an. Das vollendet den Beweis der Eulerschen Polyederformel. \square

Beispiel:

Tetraeder: $E = 4, K = 6, F = 4,$

Würfel: $E = 8, K = 12, F = 6,$

Oktaeder: $E = 6, K = 12, F = 8.$

²Dies ist eine der wenigen Stellen der Mathematik, wo man die Erkenntnis $1 + 1 = 2$ explizit benötigt.

Übungsaufgabe 5.1. Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus regelmäßigen Fünfecken und regelmäßigen Sechsecken zusammen. An jeder Ecke stoßen genau zwei Sechsecke und genau ein Fünfeck zusammen. Man bestimme die Anzahl der Fünfecke und der Sechsecke.³

Lösung:

Es ist nach unseren bisherigen Darlegungen offenkundig

$$E = E_3, \quad F = F_5 + F_6, \quad E - K + F = 2, \quad 2K = 3E, \quad 2K = 5F_5 + 6F_6.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich nicht eindeutig nach F_5 und F_6 auflösen. Also verwenden wir erneut die Technik des doppelten Abzählens: an jeder Ecke sitzt genau ein Fünfeck, und jedes Fünfeck hat genau fünf Ecken (ach was). Also ist

$$E = 5F_5.$$

An jeder Ecke sitzen genau zwei Sechsecke, und jedes Sechseck hat genau sechs Ecken. Wir zählen wieder doppelt ab und finden

$$2E = 6F_6.$$

Es folgt jetzt

$$\begin{aligned} 2 &= E - K + F_5 + F_6 \\ &= E - \frac{3}{2}E + \frac{E}{5} + \frac{E}{3} \\ &= \frac{E}{30}, \end{aligned}$$

also $E = 60$, $F_5 = 12$, $F_6 = 20$.

Also sind es genau zwölf Fünfecke und zwanzig Sechsecke. ■

Die folgende Aufgabe ist bekanntgeworden als *Formel von Descartes* und äquivalent zur Eulerschen Polyederformel, welche vielleicht besser nach Descartes benannt werden könnte, da dieser ein Jahrhundert eher lebte:

Übungsaufgabe 5.2. Für ein konvexes Polyeder wollen wir unter dem Defektwinkel einer Ecke X denjenigen Winkel verstehen, der sich ergibt, wenn man die Summe aller Flächeninnenwinkel mit Scheitelpunkt X von 360° abzieht (bei einem Quader hat jede Ecke also einen Defektwinkel von 90°).

Zeigen Sie, daß dann die Summe der Defektwinkel aller Ecken stets 720° beträgt.

Definition 5.6. Ein konvexes Polyeder heißt platonischer Körper, wenn folgendes gilt:

- jede seiner Flächen ist ein regelmäßiges Polygon,
- alle seine Flächen sind zueinander kongruent,
- alle seine Ecken haben die gleiche Wertigkeit.

Der folgende Satz ist einer der Höhepunkte der Geometrie von Euklid.

Theorem 5.7. Es gibt genau fünf Sorten von platonischen Körpern: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder.

Beweis. Angenommen, es gäbe platonische Körper. Sei \mathcal{P} ein solcher.

Jede Ecke von \mathcal{P} hat als Wertigkeit mindestens Drei. Regelmäßige Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke haben die Innenwinkelgrößen 60° , 90° , 108° , 120° . Die Innenwinkel an einer Ecke ergeben zusammen weniger als 360° . Also kann eine Fläche von \mathcal{P} kein Sechseck, Siebeneck, Achteck, ... sein, sondern nur ein regelmäßiges Dreieck, oder ein Quadrat, oder ein regelmäßiges Fünfeck. Und an einer Ecke können lediglich folgende Flächen anstoßen:

³ Diese Aufgabe ist der ersten Runde des *Bundeswettbewerbs Mathematik 1983* entlehnt. Die damalige Aufgabenstellung war wie folgt (beide Aufgaben sind *nicht* äquivalent, wie man nach einiger Zeit erkennt !):

Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten jedes Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke.

1. drei regelmäßige Dreiecke,
2. vier regelmäßige Dreiecke,
3. fünf regelmäßige Dreiecke,
4. drei Quadrate,
5. drei regelmäßige Fünfecke.

Wir diskutieren die Fälle nacheinander:

1. Jetzt ist $E = E_3$ und $F = F_3$. Weiterhin ist $2K = 3F_3$ und $2K = 3E_3$, also $F = E = \frac{2}{3}K$, und somit

$$2 = E - K + F = \frac{2}{3}K - K + \frac{2}{3}K = \frac{1}{3}K,$$

woraus wir $K = 6$ und $E = F = 4$ erzielen.

2. Jetzt ist $E = E_4$ und $F = F_3$. Weiterhin ist $2K = 3F_3$ und $2K = 4E_4$, also

$$2 = E - K + F = \frac{1}{2}K - K + \frac{2}{3}K = \frac{1}{6}K,$$

also $K = 12$, $E = 6$, $F = 8$.

3. Jetzt ist $E = E_5$ und $F = F_3$. Weiterhin ist $2K = 3F_3$ und $2K = 5E_5$, also

$$2 = E - K + F = \frac{2}{5}K - K + \frac{2}{3}K = \frac{1}{15}K,$$

also $K = 30$, $E = 12$, $F = 20$.

4. Jetzt ist $E = E_3$ und $F = F_4$. Weiterhin ist $2K = 4F_4$ und $2K = 3E_3$, also

$$2 = E - K + F = \frac{2}{3}K - K + \frac{1}{2}K = \frac{1}{6}K,$$

also $K = 12$, $E = 8$, $F = 6$.

5. Jetzt ist $E = E_3$ und $F = F_5$. Weiterhin ist $2K = 5F_5$ und $2K = 3E_3$, also

$$2 = E - K + F = \frac{2}{3}K - K + \frac{2}{5}K = \frac{1}{15}K,$$

also $K = 30$, $E = 20$, $F = 12$.

Dies sind alle möglichen Konfigurationen von platonischen Körpern. Es bleibt noch zu zeigen, daß es diese Körper tatsächlich gibt, was wir dadurch erledigen, daß wir deren Konstruktion skizzieren. Die Kantenlänge sei dabei jeweils a .

1. Wir stellen vier gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge a zu einer dreiseitigen Pyramide zusammen und bekommen das Tetraeder („Vierflächner“).
2. Wir nehmen ein Quadrat der Kantenlänge a und errichten darüber eine vierseitige Pyramide, deren Manteldreiecke jeweils gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge a sind. Dies ist auf eindeutige Weise möglich. Zwei solcher vierseitigen Pyramiden fügen wir an den Grundflächenquadraten aneinander. Dieser Körper heißt Oktaeder („Achtflächner“).
3. Die Konstruktion verläuft jetzt sinngemäß so: zwei „fünfsackige Kronen“ werden so angeordnet, daß ihre Zacken „ineinander greifen“. Dieser Ring aus zehn Dreiecken wird oben und unten abgeschlossen durch zwei fünfseitige Pyramiden, und es entsteht das Ikosaeder („Zwanzigflächner“).
4. Wir nehmen einen Würfel der Kantenlänge a , auch bekannt als Hexaeder („Sechsfächner“).
5. Sinngemäß: Wir fügen sechs regelmäßige Fünfecke zu einer „Blüte“ zusammen; ein Fünfeck als „Blütengrund“, die anderen als Blütenblätter. Zwei solcher Blüten fügen wir an ihren „Oberseiten“ zusammen. Es entsteht ein Dodekaeder („Zwölfblättner“).

□

Übungsaufgabe 5.3. Zeigen Sie auf exakte Weise (z.B. mittels analytischer Geometrie), daß die angedeuteten Konstruktionen von Ikosaeder und Dodekaeder tatsächlich durchführbar sind.

Übungsaufgabe 5.4. Wenn wir die Flächenmittelpunkte eines platonischen Körpers als Ecken eines neuen Polyeders wählen, erhalten wir einen dualen platonischen Körper. Ermitteln Sie, wer zu wem dual ist, und beweisen Sie, daß diese Konstruktion tatsächlich funktioniert.

5.2 Weiterführende Aspekte ✨

Bei Polyedern gibt es unterschiedliche Typen von Eigenschaften: einerseits geometrische Eigenschaften wie Aussagen über Streckenlängen, Winkel, Parallelitäten.

Andererseits gibt es Eigenschaften, die nicht geometrischer Natur sind, wie z.B. die Zahlen der Ecken, Flächen, Winkel, oder die Art, wie die Flächen sich zu einem Polyeder „zusammenfügen“. In diesem Sinne wären ein Würfel und ein vierseitiges Prisma mit trapezförmiger Grundfläche „gleich“.

Das sollten wir genauer fassen:

Definition 5.8. Zwei Polyeder \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 heißen isomorph, wenn es zwischen ihnen Bijektionen Φ_E , Φ_F , Φ_K der Ecken, Flächen, Kanten gibt, mit folgenden Eigenschaften:

- Wenn A_1 eine Fläche von \mathcal{P}_1 ist, dann ist $\Phi_F(A_1)$ eine Fläche von \mathcal{P}_2 , und zwar mit genau so vielen Ecken wie A_1 .
- Wenn A_1 und B_1 Flächen von \mathcal{P}_1 sind, die einander in der Kante k_1 schneiden, dann schneiden $\Phi_F(A_1)$ und $\Phi_F(B_1)$ einander in der Kante $\Phi_K(k_1)$.
- Wenn k_1 und m_1 zwei Kanten von \mathcal{P}_1 sind, die einander in der Ecke e_1 schneiden, dann schneiden $\Phi_K(k_1)$ und $\Phi_K(m_1)$ einander in der Ecke $\Phi_E(e_1)$.

Damit können wir jetzt die oben angedeuteten „anderen Eigenschaften“ wenigstens etwas sauberer definieren:

Definition 5.9. Eine Polyedereigenschaft, die sich nicht ändert, wenn man ein Polyeder durch ein isomorphes Polyeder austauscht, heißt topologische Eigenschaft.

Ohne Beweis geben wir an:

Satz 5.10. Die Eckenzahl, die Flächenzahl, die Kantenzahl eines Polyeders sind topologische Eigenschaften. Die Wertigkeit einer Ecke ist auch eine topologische Eigenschaft. Die Konvexität ist es nicht.

Für eine weitere topologische Eigenschaft müssen wir etwas ausholen. Wir stellen uns einen Quader vor, und auf seiner Hülle zeichnen wir einen Streckenzug ein, der sich schließt, aber der sich nicht selbst überkreuzt. Dann zerlegt dieser Streckenzug die Quaderhülle in zwei Teile, die voneinander getrennt sind. Wenn z.B. der Streckenzug „um den Quader herumläuft“, dann gibt es eine „linke Hüllenhälfte“ und eine „rechte Hüllenhälfte“ (für geeignete Definitionen der Begriffe links/rechts). Wenn z.B. der Streckenzug innerhalb einer Quaderfläche verbleibt, dann wird die Quaderhülle in einen „inneren“ und einen „äußeren“ Teil zerlegt. Wichtig ist: man kann nicht vom einen Hüllenteil in den anderen gelangen, ohne den Streckenzug zu überqueren. In diesem Sinne gibt es zwei getrennte Flächenstücke.

Wenn andererseits ein plattenförmiger Quader gegeben ist, in den wir ein prismatisches Loch hineinstanzen, dann kann man mit etwas Phantasie den sich schließenden Streckenzug so positionieren, daß die Polyederhülle nicht in zwei Teile zerfällt.

Definition 5.11. Ein Polyeder ist vom Geschlecht Null, wenn jeder auf der Oberfläche des Polyeders gezeichnete Streckenzug (der sich schließt, aber nicht sich selbst überkreuzt) die Oberfläche des Polyeders in zwei getrennte Flächenstücke zerlegt.

Ein Polyeder ist vom Geschlecht n , wenn n die größte Zahl von auf der Oberfläche gezeichneten Streckenzügen (die sich schließen, die sich nicht überkreuzen, die noch dazu auch einander nicht kreuzen) ist, die bei geeigneter Positionierung die Oberfläche des Polyeders nicht in getrennte einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen.

Ein plattenförmiger Quader, in den genau n prismatische Löcher hineingestanz sind, die einander weder berühren noch überlappen, hat das Geschlecht n .

Man überlegt sich, daß konvexe Polyeder das Geschlecht Null haben müssen.

Definition 5.12 (EULERCHARAKTERISTIK). *Die Eulercharakteristik eines Polyeders \mathcal{P} mit E Ecken, F Flächen und K Kanten ist definiert als $\chi(\mathcal{P}) := E - K + F$.*

Ohne Beweis geben wir an:

Satz 5.13 (EULERSCHE POLYEDERFORMEL). *Für ein Polyeder \mathcal{P} mit Geschlecht g ist $\chi(\mathcal{P}) = 2 - 2g$.*

Das Geschlecht eines Polyeders ist eine topologische Eigenschaft.

Kapitel 6

Fragmente der projektiven Geometrie

6.1 Grundideen. Überlegungen zur Axiomatik

Wir listen einige Geometrien auf.

- Die *euklidische Geometrie* haben wir im Kapitel 4 ausführlich behandelt (beschränkt auf die ebene Geometrie, auch *Planimetrie* genannt).
- Die *affine Geometrie* kann (etwas unpräzise formuliert) erhalten werden, indem man in der euklidischen Geometrie auf die Begriffe „Winkel“ und „Streckenlänge“ verzichtet. Wir konzentrieren uns hier auf diejenigen affinen Geometrien, die durch reelle Vektorräume erzeugt werden. Das hat die Konsequenz, daß wir den Begriff des Teilverhältnisses weiterhin verwenden können. Ein typischer Satz einer solchen affinen Geometrie ist der *Strahlensatz*: Seien g_1 und g_2 zwei parallele Geraden in einer Ebene, in der noch ein Punkt O liegt (weder auf g_1 noch auf g_2). Drei Geraden a, b, c durch O schneiden g_1 bzw. g_2 in A_1, B_1, C_1 bzw. A_2, B_2, C_2 . Dann ist $TV(A_1, B_1; C_1) = TV(A_2, B_2; C_2)$. Dies würde auch dann noch gelten, wenn wir auf g_1 und g_2 „Einheitslängen“ definiert hätten, die „unterschiedlich lang“ wären. In diesem Sinne halten wir am Teilverhältnisbegriff (pro Gerade) fest, verzichten aber auf den Längenbegriff von Strecken (und damit auch auf den Begriff der Kongruenz). In der Sprache der linearen Algebra: die affine Geometrie verwendet lediglich die beiden Vektorraumoperationen im \mathbb{R}^2 ; aber die euklidische Geometrie verwendet zusätzlich noch die Begriffe „Skalarprodukt“ und „Norm“.
- In der *projektiven Geometrie* (der Ebene und des Raumes) verzichtet man zusätzlich noch auf den Begriff der Parallelität (und auf die Relation „zwischen“ für Punktetripel auf Geraden). Zum Ausgleich ergänzt man die affine Ebene bzw. den affinen Raum um *unendlich ferne Elemente*.

Im Folgenden soll eine Variante der projektiven Geometrie in der Ebene vorgestellt werden, wobei wir uns auf „anschauliche“ Konfigurationen konzentrieren wollen. Für abstraktere Zugänge verweisen wir auf [2]; und höherdimensionale Varianten behandeln wir ebenfalls nur am Rande.

Definition 6.1 (Fernpunkt, Ferngerade). Sei g eine Gerade in einer affinen Ebene $\varepsilon_{\text{affin}}$. Die Menge aller zu g parallelen Geraden nennen wir $[g]$. Dieser Klasse ordnen wir einen unendlich fernen Punkt ∞_g (Fernpunkt) zu, und wir vereinbaren, daß je zwei beliebige (verschiedene) Geraden aus der Äquivalenzklasse $[g]$ sich genau im Punkt ∞_g schneiden. Die Menge

$$\{\infty_g : g \text{ ist Gerade in der affinen Ebene } \varepsilon_{\text{affin}}\}$$

aller Fernpunkte heißt unendlich ferne Gerade (Ferngerade).

Die projektive Ebene ε wird definiert als die Vereinigungsmenge von allen affinen Punkten in $\varepsilon_{\text{affin}}$ und allen Fernpunkten.

Ein Punkt heißt projektiver Punkt, wenn er affiner Punkt oder Fernpunkt ist.

Eine Gerade heißt projektive Gerade, wenn sie affine Gerade oder Ferngerade ist.

Wir erzielen damit:

- durch je zwei verschiedene projektive Punkte geht genau eine projektive Gerade,
- je zwei verschiedene projektive Geraden schneiden einander in genau einem Punkte.

Ein Vorteil ist jetzt, daß wir nicht mehr zu unterscheiden haben, ob zwei Geraden parallel zueinander sind oder nicht. Ein Nachteil ist, daß wir keine „zwischen“-Relation mehr haben: Seien A, B, C verschiedene Punkte auf einer affinen Geraden g , wobei $C = \infty_g$. Dann läßt sich nicht entscheiden, ob A zwischen B, C liegt, oder B zwischen A, C .

Im Unterschied zur Spiegelung am Kreis (vgl. Abschnitt 4.9) ergänzen wir jetzt die affine Ebene nicht bloß um einen unendlich fernen Punkt, sondern um unendlich viele davon.

Ein entscheidender Aspekt der (hier vorgestellten Variante der) projektiven Geometrie besteht darin, daß alle projektiven Punkte gleichberechtigt sind (egal ob affiner Punkt oder Fernpunkt), und analoges gilt für die Geraden.

Wir überlegen uns, wie ein Axiomensystem aussehen könnte, wobei unsere Betrachtungen vom Hilbertsystem starten mögen. Zunächst ist klar, daß das Parallelenaxiom gegenstandslos und überflüssig wird. Da wir keine Streckenlängen mehr betrachten wollen, sondern nur noch Teilverhältnisse (wenn überhaupt), entfallen alle Kongruenzaxiome, und auch das archimedische Axiom. Mangels „zwischen“-Relation können auch die Anordnungsaxiome nicht mehr aufrechterhalten werden. Übrig bleiben höchstens die Inzidenzaxiome und das Vollständigkeitsaxiom, auf das wir aber auch noch verzichten.

Definition 6.2. *Eine Struktur mit den Grundbegriffen „Punkt“, „Gerade“, „Inzidenz“, heißt projektive Ebene, wenn folgende Axiome erfüllt sind.*

- Wenn A und B zwei verschiedene Punkte sind, so gibt es genau eine Gerade, die mit A und mit B inzidiert.
- Wenn a und b zwei verschiedene Geraden sind, so gibt es genau einen Punkt, der mit a und mit b inzidiert.
- Jede Gerade inzidiert mit mindestens drei verschiedenen Punkten.
- Es gibt mindestens zwei verschiedene Geraden.

In dieser Definition sind projektive Ebenen, die nur endlich viele Punkte besitzen, ausdrücklich erlaubt. Viele Anwendungen dazu (z.B. in der Kryptographie) finden sich in [2].

Definition 6.3 (Punktreihe, Geradenbüschel, Grundgebilde). *Sei A ein Punkt in einer projektiven Ebene. Die Menge $g(A)$ aller Geraden, die mit A inzidieren, heißt Geradenbüschel mit Trägerpunkt A .*

Sei a eine Gerade in einer projektiven Ebene. Die Menge $P(a)$ aller Punkte, die mit a inzidieren, heißt Punktreihe mit Trägergeraden a .

Geradenbüschel und Punktreihen heißen Grundgebilde.

Für Inzidenz von Punkt und Gerade verwenden wir die Zeichen \in bzw. \ni mit naheliegender Bedeutung.

Definition 6.4 (elementarprojektive Abbildungen). *Folgende Abbildungen heißen elementarprojektive Abbildungen:*

- die Projektion von einem Geradenbüschel $g(A)$ auf eine Punktreihe $P(b)$ (wobei die Gerade b nicht mit dem Punkt A inzidiert), gemäß der Vorschrift

$$g(A) \rightarrow P(b), \\ c \mapsto Q, \quad \text{mit } Q \in c, \quad Q \in b,$$

- die Projektion von einer Punktreihe $P(a)$ auf ein Geradenbüschel $g(B)$ (wobei der Punkt B nicht mit der Geraden a inzidiert), gemäß der Vorschrift

$$P(A) \rightarrow g(B), \\ C \mapsto q, \quad \text{mit } q \ni C, \quad q \ni B.$$

Definition 6.5 (projektive Abbildungen). Seien \mathcal{X} und \mathcal{Y} zwei Grundgebilde in einer projektiven Ebene. Wir sagen, daß \mathcal{X} und \mathcal{Y} zueinander in projektiver Relation stehen, wenn es eine Komposition von elementarprojektiven Abbildungen gibt, die \mathcal{X} bijektiv auf \mathcal{Y} abbildet. Eine solche zusammengesetzte Abbildung heißt projektive Abbildung.

Offenkundig muß die erwähnte Komposition eine Abfolge von elementarprojektiven Abbildungen sein, die „typwechselnd“ angeordnet sind.

Beispiele für projektive Abbildungen kommen im nächsten Abschnitt. Siehe Bemerkung 6.12.

Die Beziehungen zwischen Grundgebilden, die durch projektive Abbildungen und die Schnittoperationen (zwei Geraden ergeben genau einen Punkt, zwei Punkte ergeben genau eine Gerade), entstehen, werden in der sogenannten *synthetischen projektiven Geometrie* untersucht.

Es bietet sich an, hier die Begriffe *Synthese* und *Analyse* näher zu beschreiben.

Die Synthese (= Zusammensetzung, Zusammenfügung, Verknüpfung) ist eine Arbeitsmethode der Wissenschaften, bei der elementare Dinge zusammengefügt werden zu neuen Dingen. In der Chemie z.B. versteht man darunter die Herstellung komplizierter Verbindungen aus einfachen Grundstoffen. In der Musik (synthesizer) die Erzeugung von Klängen, Melodien und Harmonien aus einfachen elektronischen Schaltungen. In der Geometrie ist damit gemeint, daß einfache Grundbegriffe (Punkt, Gerade, Inzidenz) als gegeben angenommen werden (ihre „innere Natur“ wird also nicht weiter studiert); und anschließend wird untersucht, welche Lagebeziehungen geschlußfolgert werden können. Siehe [12] für einen traditionellen Zugang, lesenswert auch wegen des Kapitels über die historische Entwicklung der projektiven Geometrie.

Die Analyse (= Auflösung) ist eine umgekehrte Arbeitsmethode, bei der ein Objekt in seine Einzelbestandteile zerlegt wird; und diese werden dann systematisch untersucht. Zum Beispiel dienen chemische Analysen dazu, herauszufinden, woraus sich eine unbekannte Stoffprobe zusammensetzt. In der Geometrie bedeutet Analyse, daß man die Frage stellt, was die „innere Natur“ eines geometrischen Objektes (z.B. einer Gerade oder eines Kreises) sei; und als Antwort ergibt sich: Geraden und Kreise sind Lösungsmengen von Systemen linearer oder nichtlinearer Gleichungen, wobei sich diese Gleichungen auf vorher eingeführte Koordinatensysteme beziehen. In diesem Sinne benutzt die analytische Geometrie algebraische Begriffe (Vektorraum, Körper) dazu, um geometrische Objekte zu definieren und zu untersuchen.

6.2 Homogene Koordinaten und Punktbasen

Ab jetzt praktizieren wir nur noch analytische Geometrie, und insbesondere konzentrieren wir uns auf ein konkretes Modell einer projektiven Ebene. Dazu statuen wir die affine Ebene mit Fernelementen aus und führen ein Koordinatensystem ein wie folgt:

Definition 6.6. Im Raum $\mathbb{R}^3 = \{(x_0, x_1, x_2)^\top : x_j \in \mathbb{R}\}$ sei $O = (0, 0, 0)^\top$ der übliche Ursprung und

$$\varepsilon_{\text{affin}} := \{(1, x_1, x_2)^\top : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

sei eine affine Ebene. Deren projektiver Abschluß (entstanden durch Hinzufügen von Fernelementen) sei ε . Jedem Punkt $A = (1, a_1, a_2)^\top \in \varepsilon_{\text{affin}}$ ordnen wir die Gerade $OA \subset \mathbb{R}^3$ zu,

$$OA = \{(t, ta_1, ta_2)^\top : t \in \mathbb{R}\}.$$

Und jedem Fernpunkt $A \in \varepsilon$ mit $A = \infty_g$, wobei $g = \{(1, tg_1, tg_2)^\top : t \in \mathbb{R}\}$, ordnen wir die Gerade $\{(0, tg_1, tg_2)^\top : t \in \mathbb{R}\}$ zu.

Auf diese Weise entsteht eine Bijektion zwischen der Menge der projektiven Punkte in ε und der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^3 durch O . Ein Richtungsvektor $(x_0, x_1, x_2)^\top$ (mit Länge $\neq 0$) einer solchen Geraden heißt Tripel $[x_0 : x_1 : x_2]$ von homogenen Koordinaten des der Gerade zugeordneten projektiven Punktes in ε .

Ein affiner Punkt $(1, x_1, x_2)^\top$ aus ε hat also die homogenen Koordinaten $[1 : x_1 : x_2]$, aber auch die Koordinaten $[7 : 7x_1 : 7x_2]$. Ein Fernpunkt in Richtung von obiger Geraden g hat homogene Koordinaten $[0 : g_1 : g_2]$, aber auch $[0 : 13g_1 : 13g_2]$.

Ein Tripel homogener Koordinaten (bezüglich des hier festgewählten Koordinatensystems) bestimmt also genau einen projektiven Punkt, aber nicht umgekehrt. Die homogenen Koordinaten $[0 : 0 : 0]$ können offenkundig nie auftreten.

Wir schreiben $[x_0 : x_1 : x_2] \sim [y_0 : y_1 : y_2]$, wenn es ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $t(x_0, x_1, x_2) = (y_0, y_1, y_2)$.

In diesem Sinne könnten wir die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ definieren als

$$\mathbb{R}P^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) / \sim.$$

Wir bemerken nebenbei, daß es üblich ist, n -dimensionale projektive Räume über einem Körper \mathbb{K} zu definieren als $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$.

Lemma 6.7. *Seien A und B zwei verschiedene Punkte in der projektiven Ebene ε , mit den homogenen Koordinaten $[a_0 : a_1 : a_2]$ und $[b_0 : b_1 : b_2]$. Dann besteht die projektive Gerade durch die Punkte A, B genau aus allen Punkten X in ε , deren homogene Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$ enthalten sind in der Menge*

$$\{[x_0 : x_1 : x_2] : (x_0, x_1, x_2) = \alpha(a_0, a_1, a_2) + \beta(b_0, b_1, b_2), \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Sei $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein (bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmtes) Tripel, für das $\sum_{j=0}^2 c_j a_j = \sum_{j=0}^2 c_j b_j = 0$. Dann ist

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 \stackrel{!}{=} 0, \quad (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

die Gleichung für die homogenen Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$ der Punkte X auf der Verbindungsgeraden der projektiven Punkte A und B .

Beweis. Übungsaufgabe. □

Zu jeder projektiven Geraden in ε gehört genau eine Ebene durch O , und diese Korrespondenz sieht folgendermaßen aus: Sei g eine affine Gerade in ε . Dann gibt es genau eine Ebene durch g und O . Und wenn g die Ferngerade in ε ist, dann verläuft die gesuchte Ebene durch O und ist parallel zu $\varepsilon_{\text{affin}}$. Der erwähnte Vektor c ist Normalenvektor auf der konstruierten Ebene durch O .

Im Gegensatz zur affinen Geometrie lautet die Gleichung einer projektiven Geraden jetzt also $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$; es gibt demnach kein Absolutglied. Das motiviert die Bezeichnung *homogene* Koordinaten.

Bevor wir weitere geometrische Objekte studieren, sollten wir uns einige Gedanken machen über Koordinatensysteme. Bekanntlich gibt es im affinen Raum \mathbb{R}^n nicht nur das kanonische Koordinatensystem (bestehend aus dem Ursprung $O = (0, \dots, 0)^\top$ und den Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^\top, \dots, \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)^\top$), sondern noch beliebige weitere Koordinatensysteme. Diese werden gegeben durch $n + 1$ Punkte P_0, \dots, P_{n+1} , und zwar wie folgt. Wir starten mit einem n -dimensionalen affinen Raum. In diesem wählen wir $n + 1$ Punkte in allgemeiner Lage (also: keine zwei sind gleich, keine drei liegen auf einer gemeinsamen Geraden, keine vier in einer gemeinsamen Ebene, usw). Einen der Punkte, P_0 , ernennen wir zum Ursprung. Mit diesem und den anderen Punkten P_j definieren wir Basisvektoren $\vec{b}_j := \overrightarrow{OP_j}$. Schließlich ordnen wir dem Punkt P_0 die Koordinaten $(0, \dots, 0)^\top$ zu, und die restlichen P_j bekommen die Koordinaten $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ in naheliegender Weise. Auf diesem Wege wird der n -dimensionale affine Raum isomorph zum \mathbb{R}^n .

Diese Verfahrensweise wollen wir jetzt für projektive Räume $\mathbb{R}P^n$ wiederholen. Es wird sich nach einiger Zeit ergeben, daß jetzt $n + 2$ Punkte in allgemeiner Lage vorgegeben werden müssen.

Jeder Punkt des $\mathbb{R}P^n$ ist gleich einem eindimensionalen Unterraum des Vektorraums \mathbb{R}^{1+n} .

Sei also $P \in \mathbb{R}P^n$, dann gibt es ein $\vec{p} \in \mathbb{R}^{1+n}$ (bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt), sodaß

$$P \simeq \{t\vec{p} : t \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}\vec{p}.$$

Mit der Standardbasis $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ des \mathbb{R}^{1+n} können wir \vec{p} eindeutig darstellen als $\vec{p} = \sum_{j=0}^n p_j \vec{e}_j$, und wir schreiben $[p_0 : p_1 : \dots : p_n]$ als die homogenen Koordinaten von P . Jeder \vec{e}_j erzeugt genau einen eindimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^{1+n} , nämlich $\mathbb{R}\vec{e}_j := \{t\vec{e}_j : t \in \mathbb{R}\}$. Dieser Unterraum ist gleich einem Punkte E_j des $\mathbb{R}P^n$.

Leider ist diese Konstruktion nicht eindeutig umkehrbar: wenn Punkte B_0, B_1, \dots, B_n aus dem projektiven Raum $\mathbb{R}P^n$ gegeben sind, dann sind diese (gemäß obiger Merkregel) gleich eindimensionalen Unterräumen $\mathbb{R}\vec{b}_j$ des \mathbb{R}^{1+n} , aber hieraus bekommen wir einen solchen Vektor \vec{b}_j nicht mehr eindeutig ermittelt, sondern nur bis auf skalare Vielfache. Damit sind dann die homogenen Koordinaten $[p_0 : \dots : p_n]$ nicht mehr bestimmbar, denn jedes p_j kann mit einem skalaren Faktor gestreckt worden sein (und insbesondere kann dieser Faktor von j abhängen).

Der Ausweg liegt darin, noch einen weiteren Punkt $B_{n+1} = \mathbb{R}\vec{b}_{n+1}$ hinzuzunehmen, wobei $\vec{b}_{n+1} = \sum_{j=0}^n \vec{b}_j$ gelten soll.

Die Bestimmung der Koordinaten eines Punktes $P \in \mathbb{R}P^n$ in Bezug auf eine Punktbasis $(B_0, B_1, \dots, B_{n+1})$ verläuft dann wie folgt: die Punkte (B_0, \dots, B_{n+1}) sollen im $\mathbb{R}P^n$ *in allgemeiner Lage* liegen. Das heißt: wir schreiben $B_j = \mathbb{R}\vec{b}_j$ mit bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmten \vec{b}_j . Dann sollen jeweils $n+1$ der Vektoren \vec{b}_j im \mathbb{R}^{1+n} linear unabhängig sein.

Aus dem eindimensionalen linearen Unterraum $B_{n+1} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ wählen wir einen Vektor ($\neq \vec{0}$) aus und nennen ihn \vec{b}_{n+1} . Dies ist (abgesehen von skalaren Vielfachen) eindeutig möglich. Anschließend ermitteln wir auf eindeutige Weise Vektoren $\vec{b}_0 \in B_0, \dots, \vec{b}_n \in B_n$, sodaß $\vec{b}_{n+1} = \vec{b}_0 + \dots + \vec{b}_n$. Nun ist $P = \mathbb{R}\vec{p}$ mit einem Vektor \vec{p} , der bis auf einen skalaren Faktor eindeutig festgelegt ist. Wir können \vec{p} nach der Basis $(\vec{b}_0, \dots, \vec{b}_n)$ entwickeln: $\vec{p} = p_0\vec{b}_0 + \dots + p_n\vec{b}_n$, und die homogenen Koordinaten von P sind dann $[p_0 : \dots : p_n]$. Diese sind eindeutig, bis auf einen *gemeinsamen* skalaren Faktor.

Die Punkte B_0, B_1, \dots, B_n haben die homogenen Koordinaten $[1:0:\dots:0]$, $[0:1:0:\dots:0]$, \dots , $[0:\dots:0:1]$, und der Punkt B_{n+1} hat die homogenen Koordinaten $[1:1:\dots:1]$. Deshalb wird B_{n+1} auch *Einheitspunkt* genannt.

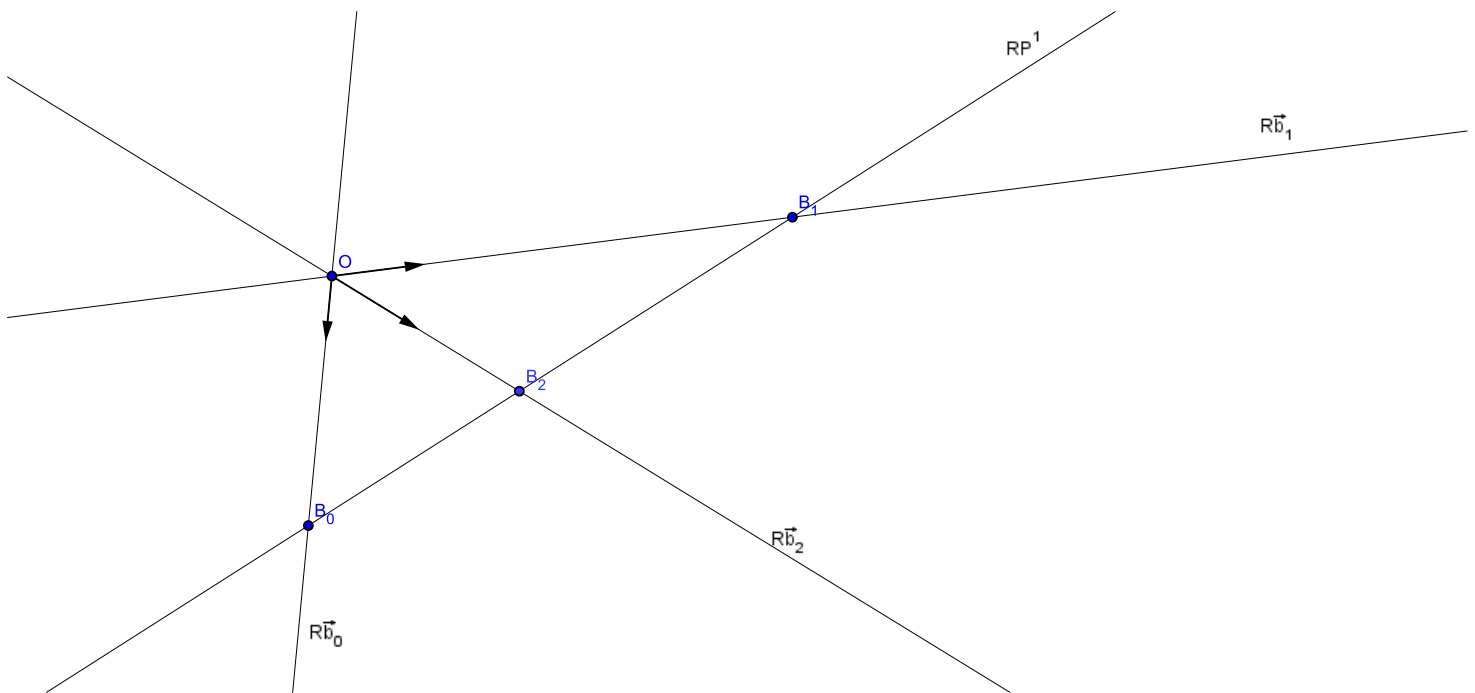


Abbildung 6.1: Eine projektive Gerade mit $\text{coord}(B_0) = [1:0]$, $\text{coord}(B_1) = [0:1]$ und $\text{coord}(B_2) = [1:1]$.

Bemerkung 6.8. Wir rechnen schnell nach, daß die homogenen Koordinaten von P nur von der Punktbasis abhängen, aber nicht von der Wahl der Isomorphie $\mathbb{R}P^n \simeq (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$: denn sei $C \in \mathbb{R}^{(1+n) \times (1+n)}$ eine reguläre Matrix, und seien $\tilde{b}_j := C\vec{b}_j$ für $j = 0, \dots, n$ neue Basisvektoren für die Räume B_0, \dots, B_n . Dann ist für den Vektor $\tilde{b}_{n+1} := C\vec{b}_{n+1}$ tatsächlich $\tilde{b}_{n+1} = \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j$, und wir finden dann, daß $C\vec{p} = \sum_{j=0}^n p_j \tilde{b}_j$, also hat $C\vec{p}$ dieselben homogenen Koordinaten wie \vec{p} .

6.3 Projektive Doppelverhältnisse

Definition 6.9 (Doppelverhältnis). Seien P, B_0, B_1, B_2 verschiedene Punkte auf einer projektiven Geraden g , und die homogenen Koordinaten von P bezüglich der Punktbasis (B_0, B_1, B_2) seien $[p_0 : p_1]$. Dann definieren wir das (projektive) Doppelverhältnis als

$$DV(P, B_2; B_0, B_1) = \frac{p_1}{p_0}.$$

Satz 6.10. Wenn P, B_0, B_1, B_2 affine Punkte auf der Geraden g sind, dann ist das projektive Doppelverhältnis gleich dem Doppelverhältnis gemäß Definition 2.15 und (4.3).

Beweis. Der Beweis geschieht durch Rechnen.

Mit dem Ursprung O (außerhalb von g) haben wir

$$\overrightarrow{OB_0} = t_0 \vec{b}_0, \quad \overrightarrow{OB_1} = t_1 \vec{b}_1, \quad \overrightarrow{OB_2} = t_2 \vec{b}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{b}_0 + \vec{b}_1, \quad \overrightarrow{OP} = t_p(p_0 \vec{b}_0 + p_1 \vec{b}_1).$$

Es liegt B_2 auf der Geraden durch B_0 und B_1 , also

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB_2} &= \alpha \overrightarrow{OB_1} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OB_0} + \alpha \overrightarrow{B_0 B_1}, \\ t_2(\vec{b}_0 + \vec{b}_1) &= \alpha t_1 \vec{b}_1 + (1 - \alpha) t_0 \vec{b}_0, \end{aligned}$$

folglich $1 - \alpha = t_2/t_0$ und $\alpha = t_2/t_1$.

Weiterhin liegt P auf der Geraden durch B_0 und B_1 , also

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \beta \overrightarrow{OB_1} + (1 - \beta) \overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OB_0} + \beta \overrightarrow{B_0 B_1}, \\ t_p(p_0 \vec{b}_0 + p_1 \vec{b}_1) &= \beta t_1 \vec{b}_1 + (1 - \beta) t_0 \vec{b}_0, \end{aligned}$$

folglich $1 - \beta = t_p p_0/t_0$ und $\beta = t_p p_1/t_1$. Die Gerade $B_0 B_1$ stattdessen wir mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{B_0 B_1}$ aus. Dann ergibt sich für das Doppelverhältnis gemäß (4.3), daß

$$\begin{aligned} DV(P, B_2; B_0, B_1) &= \frac{[PB_0]}{[B_0 B_2]} : \frac{[PB_1]}{[B_1 B_2]} = \frac{[PB_0]}{[B_0 B_2]} \cdot \frac{[B_1 B_0] + [B_0 B_2]}{[PB_0] + [B_0 B_1]} = \frac{-\beta}{\alpha} \cdot \frac{-1 + \alpha}{-\beta + 1} \\ &= \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{t_p p_1/t_1}{t_p p_0/t_0} \cdot \frac{t_2/t_0}{t_2/t_1} = \frac{p_1}{p_0}. \end{aligned}$$

Das wollten wir zeigen. □

Wir beobachten, daß die Lage von O für den Wert des Doppelverhältnisses keine Rolle spielt. Das ist die geometrische Interpretation von Bemerkung 6.8.

Wir haben jetzt Doppelverhältnisse für vier verschiedene Punkte aus einer Punktreihe definiert. Als nächstes bereiten wir die Definition des Doppelverhältnisses für vier verschiedene Geraden aus einem Geradenbüschel vor.

Satz 6.11. Sei M ein projektiver Punkt der Ebene ε , und sei $g(M)$ das Geradenbüschel mit Trägerpunkt M . Seien weiterhin a, b, c, d vier verschiedene Geraden aus diesem Geradenbüschel. Weiterhin seien g_1 und g_2 zwei verschiedene Geraden, die nicht mit M inzidieren. Wir definieren A_j als Schnittpunkt von a und g_j , B_j als Schnittpunkt von b und g_j , C_j als Schnitt von c und g_j ; und schließlich D_j als Schnittpunkt von d und g_j .

Dann ist $DV(A_1, B_1; C_1, D_1) = DV(A_2, B_2; C_2, D_2)$.

Bemerkung 6.12. Die „Zentralprojektion mit Zentrum M “, die die Gerade g_1 auf g_2 dergestalt abbildet, daß A_1 auf A_2 abgebildet wird usw. (vgl. Abbildung 6.2), ist ein Beispiel für eine projektive Abbildung gemäß Definition 6.5. Diese Abbildung ist zusammengesetzt aus zwei elementarprojektiven Abbildungen.

Beweisskizze zu Satz 6.11. Man könnte den Beweis mit den Methoden der analytischen Geometrie führen, aber zur Abwechslung gehen wir zurück zur Elementargeometrie.

Fall 1: M ist ein Fernpunkt: Dann sind a, b, c, d parallele Geraden. Und weil g_1 und g_2 nicht mit M inzidieren, sind g_1 und g_2 affine Geraden, die zu den anderen nicht parallel sind. Dann ergibt sich die Behauptung aus dem Strahlensatz.

Fall 2: M ist ein affiner Punkt, und die A_j, \dots, D_j sind affine Punkte: Dann ist keine der Geraden g_1, g_2 die Ferngerade, und keine von beiden ist parallel zu den Geraden a, b, c, d . Siehe Abbildung 6.2.

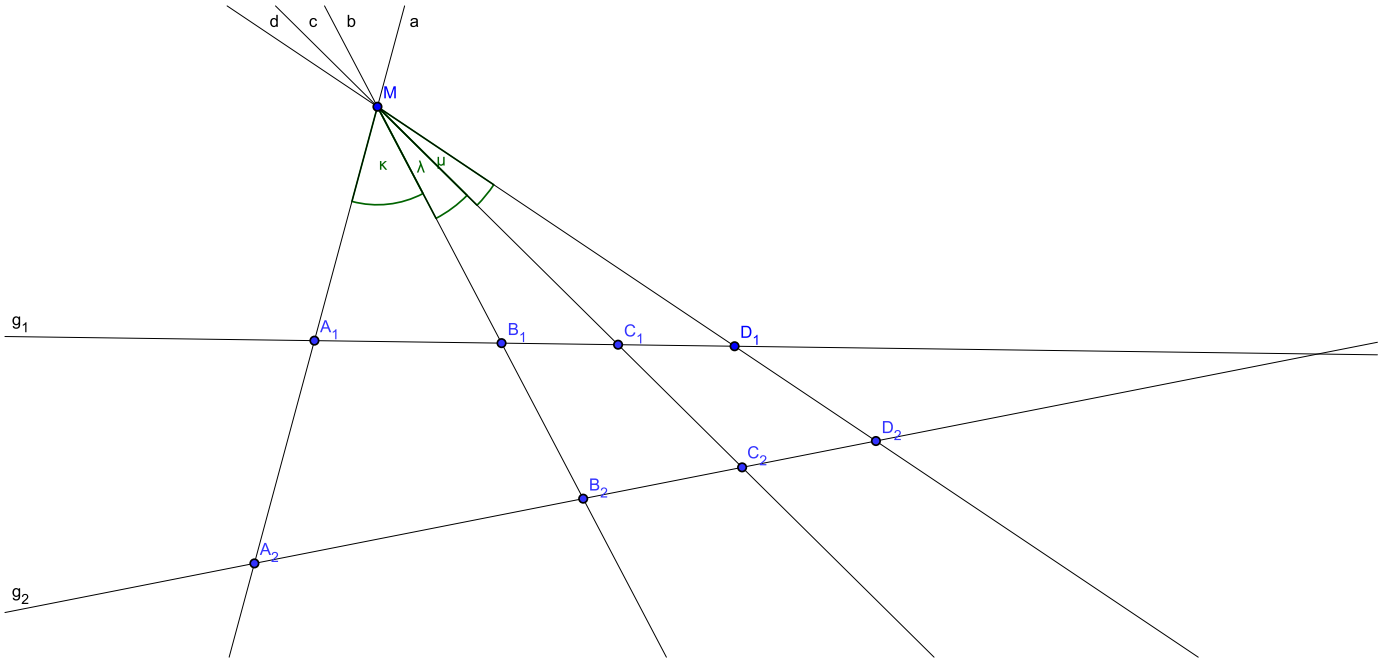


Abbildung 6.2: Eine Zentralprojektion mit Zentrum M

Wir nehmen an, daß die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 in dieser Reihenfolge auf der Geraden g_1 liegen, und wir bezeichnen die Winkel am Punkt M wie in der Zeichnung. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{DV}(A_1, B_1; C_1, D_1) &= \frac{|A_1 C_1|}{|C_1 B_1|} : \frac{|A_1 D_1|}{|D_1 B_1|} = \frac{|A_1 C_1|}{-|C_1 B_1|} : \frac{|A_1 D_1|}{-|D_1 B_1|} \\ &= \frac{\frac{1}{2}|A_1 C_1| \text{dist}(M, g_1)}{\frac{1}{2}|C_1 B_1| \text{dist}(M, g_1)} : \frac{\frac{1}{2}|A_1 D_1| \text{dist}(M, g_1)}{\frac{1}{2}|D_1 B_1| \text{dist}(M, g_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}|MA_1| \cdot |MC_1| \cdot \sin(\kappa + \lambda)}{\frac{1}{2}|MC_1| \cdot |MB_1| \cdot \sin(\lambda)} : \frac{\frac{1}{2}|MA_1| \cdot |MD_1| \cdot \sin(\kappa + \lambda + \mu)}{\frac{1}{2}|MD_1| \cdot |MB_1| \cdot \sin(\lambda + \mu)} \\ &= \frac{\sin(\kappa + \lambda)}{\sin(\lambda)} : \frac{\sin(\kappa + \lambda + \mu)}{\sin(\lambda + \mu)}, \end{aligned}$$

und wenn wir das Doppelverhältnis der zweiten Punktgaritur ausgerechnet hätten, wären wir auf genau das Gleiche gekommen.

Falls A_1, \dots, D_1 in einer anderen Reihenfolge auf g_1 liegen, oder falls M zwischen den Geraden g_1 und g_2 liegen sollte (in dem Sinne, daß M zwischen A_1 und A_2 liegt, oder zwischen B_1 und B_2 , oder ...), rechnet man analog.

Fall 3: M ist ein affiner Punkt, und einer der Punkte A_j, \dots, D_j ist ein Fernpunkt: Das bedeutet, daß eine der Geraden g_1, g_2 die Ferngerade ist, oder eine dieser Geraden ist parallel zu a oder b oder c oder d . Diesen Fall überlassen wir den Leserinnen und Lesern.

Damit soll die Beweisskizze hier beendet sein. □

Durch Nachmessen in Abbildung 6.2 macht man sich plausibel, daß die Zentralprojektion bei M das Teilverhältnis $\text{TV}(\cdot, \cdot; \cdot)$ nicht erhält. Zum Beispiel ist $|A_1 B_1| < |B_1 D_1|$, aber $|A_2 B_2| > |B_2 D_2|$.

Damit können wir jetzt festlegen:

Definition 6.13 (Doppelverhältnis für Geradenbüschel). Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Geraden aus einem Geradenbüschel ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte der genannten Geraden mit einer beliebigen weiteren Geraden, die nicht zum Geradenbüschel gehört.

Also bewahren die elementarprojektiven Abbildungen das Doppelverhältnis, und folglich bewahren auch die projektiven Abbildungen (definiert in Definition 6.5) das Doppelverhältnis.

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf die projektive Ebene; und damit soll die folgende Definition motiviert sein.

Definition 6.14 (Projektivität). Eine Abbildung vom $\mathbb{R}P^n$ in sich heißt Projektivität, wenn sie bijektiv ist, geradentreu und doppelverhältnistreue.

Das bedeutet: je drei verschiedene Punkte auf einer Geraden werden auf drei verschiedene Punkte abgebildet, die wieder auf einer Geraden liegen; und für je vier verschiedene Punkte auf einer Geraden ist das Doppelverhältnis der Bildpunkte gleich dem Doppelverhältnis der Originalpunkte.

Ohne Beweis (da nicht weiter verwendet) geben wir an:

Satz 6.15. Sei \mathfrak{A} eine Projektivität im $\mathbb{R}P^n$, und sei $(B_0, B_1, \dots, B_{n+1})$ eine Punktbasis in diesem Raum, bezüglich der wir alle Punkte mit homogenen Koordinaten beschreiben. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{(1+n) \times (1+n)}$, sodaß folgendes gilt: wenn $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$ die homogenen Koordinaten von $X \in \mathbb{R}P^n$ sind und $[y_0 : y_1 : \dots : y_n]$ die homogenen Koordinaten von $Y := \mathfrak{A}(X)$, dann ist

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gilt: jede invertierbare Matrix A erzeugt auf diesem Wege eine Projektivität \mathfrak{A} .

6.4 Quadratische Kurven

Wir erinnern an die Lineare Algebra: Jede quadratische Kurve ist definiert als Lösungsmenge zu einer Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^2 b_j x_j + c_0 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

und typische Beispiele für quadratische Kurven sind Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln und weitere Sonderfälle (die gesamte Ebene, Geradenpaare, Einzelpunkte, die leere Menge).

Um solche quadratischen Kurven im Lichte der projektiven Geometrie zu betrachten, gehen wir zurück zu Definition 6.6, verwenden $x_0 = 1$, woraus dann

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^2 b_j x_0 x_j + c_0 x_0^2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_0 = 1$$

wird.

Definition 6.16 (projektive quadratische Kurve). Eine (projektive) quadratische Kurve im $\mathbb{R}P^2$ besteht aus allen Punkten X mit homogenen Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$, für die

$$\sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_i x_j = 0$$

gilt. Hierbei sind die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ fest, mit $a_{ij} = a_{ji}$. Wir schreiben diese Gleichung auch als $x^\top A x = 0$, $x = (x_0, x_1, x_2)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$.

Ein Vorteil ist jetzt, daß wir keine Terme von niedriger Ordnung mehr zu verwalten haben.

Die homogenen Koordinaten eines Punktes sind sowieso nur bis auf Vielfache eindeutig; und $[0:0:0]$ kann nie auftreten. Also können wir noch künstlich die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

hinzunehmen. Um (wenig interessante) Sonderfälle auszuschließen, wollen wir annehmen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ Q: x &\mapsto (x^\top \mathcal{A}x, x^\top x - 1)^\top \end{aligned}$$

überall eine Jacobi-Matrix mit vollem Rang hat. Dann definiert $Q(x) \stackrel{!}{=} 0$ eine Kurve im \mathbb{R}^3 , wegen des Satzes über implizite Funktionen. Wir stellen uns nun vor, daß ein Teilchen diese Kurve entlang fliegt und zur Zeit t am Ort $x(t)$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} Q(x(t)) &= 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \frac{d}{dt}Q(x(t)) &= 0, & t \in \mathbb{R}, \\ \implies 2x^\top(t)\mathcal{A}x'(t) &= 0, & 2x^\top(t)x'(t) = 0. \end{aligned}$$

Damit sollte motiviert sein:

Definition 6.17 (Tangente). Sei eine quadratische Kurve Ω durch die Gleichung $x^\top \mathcal{A}x = 0$ gegeben, und sei $x_*^\top \mathcal{A}x_* = 0$ für ein $x_* \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Dann bilden alle Punkte $X \in \mathbb{R}P^2$ mit homogenen Koordinaten $[x_0 : x_1 : x_2]$ und

$$x_*^\top \mathcal{A}x = 0$$

die Tangente an Ω im Punkt X_* .

Um sprachliche Schwerfälligkeiten zu umgehen, vereinbaren wir: ab jetzt bezeichnen wir Punkte im $\mathbb{R}P^2$ mit Großbuchstaben, und ihre homogenen Koordinaten mit den zugehörigen Kleinbuchstaben. Die quadratische Kurve heißt immer Ω , und sie wird immer mit der symmetrischen Matrix \mathcal{A} beschrieben.

Sei Ω eine quadratische Kurve und $Y \in \mathbb{R}P^2$. Ein Punkt X auf Ω heißt *Tangentenberührungspunkt bezüglich Y* , wenn Y auf der Tangenten an Ω im Punkt X liegt.

Seien Y und Ω gegeben. Wir suchen jetzt alle Tangentenberührungspunkte bezüglich Y . Sei $X_* \in \Omega$ ein solcher. Dann ist $x_*^\top \mathcal{A}x_* = 0$ und $x_*^\top \mathcal{A}y = 0$, also auch $y^\top \mathcal{A}x_* = 0$, bzw. $(Ay)^\top x_* = 0$.

Definition 6.18 (Polare). Sei $Y \in \mathbb{R}P^2$ mit $Ay \neq 0$. Dann heißt die Menge

$$\{X \in \mathbb{R}P^2 : (Ay)^\top x = 0\}$$

die Polare zu Y bezüglich Ω .

Gemäß Lemma 6.7 ist die Polare eine Gerade im $\mathbb{R}P^2$. Wir haben somit gezeigt: wenn es überhaupt Tangentenberührungspunkte bezüglich Y gibt, dann liegen sie auf der Polaren zu Y bezüglich Ω .

Umgekehrt legen wir fest:

Definition 6.19 (Pol). Sei eine Gerade g im $\mathbb{R}P^2$ gegeben durch die Gleichung $n^\top x = 0$, mit $n = (n_0, n_1, n_2)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$. Wenn es ein $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gibt mit $Ay = n$, dann heißt Y der Pol von g bezüglich Ω .

In den für uns interessantesten Fällen (Ellipse, Parabel, Hyperbel) ist \mathcal{A} immer invertierbar, also hat dann jede Gerade genau einen Pol.

Satz 6.20. Wenn eine Gerade eine quadratische Kurve in drei verschiedenen Punkten schneidet, dann ist die gesamte Gerade in der quadratischen Kurve enthalten.

Beweis. Die drei Punkte seien P, Q, R . Dann ist (wegen Lemma 6.7)

$$p^\top \mathcal{A}p = 0, \quad q^\top \mathcal{A}q = 0, \quad r^\top \mathcal{A}r = 0, \quad r = \alpha p + \beta q, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Wegen $R \neq P$ und $R \neq Q$ ist sogar $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$. Somit folgt $q^\top \mathcal{A}p = p^\top \mathcal{A}q = 0$, also auch $(\gamma p + \delta q)^\top \mathcal{A}(\gamma p + \delta q) = 0$ für jegliche $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$. \square

Genauso zeigt man: niemals kann eine Tangente eine quadratische Kurve in genau zwei Punkten berühren (auch wenn es so scheint, daß dies bei der Hyperbel doch möglich wäre — es klappt wirklich nicht!).

Satz 6.21. *Wenn \mathcal{A} invertierbar ist und $Y \notin \Omega$, dann gibt es von Y höchstens zwei Tangenten an Ω .*

Beweis. Sonst hätten wir drei verschiedene Tangentenberührungspunkte P, Q, R :

$$\begin{array}{lll} p^\top \mathcal{A}p = 0, & q^\top \mathcal{A}q = 0, & r^\top \mathcal{A}r = 0, \\ p^\top \mathcal{A}y = 0, & q^\top \mathcal{A}y = 0, & r^\top \mathcal{A}y = 0. \end{array}$$

Es liegt R auf der Geraden zwischen P und Q , und es folgt wie im vorigen Beweis, daß $p^\top \mathcal{A}q = 0$, und die Geraden von P nach Q ist in Ω enthalten. Aber $Y \notin \Omega$, also ist Y nicht auf der Geraden von P nach Q , also sind p, q, y linear unabhängig. Dann haben wir

$$(\mathcal{A}p)^\top p = 0, \quad (\mathcal{A}p)^\top q = 0, \quad (\mathcal{A}p)^\top y = 0,$$

also $\mathcal{A}p = 0$. Weil \mathcal{A} invertierbar ist, wäre dann auch $p = 0$, was aber unzulässig ist. Widerspruch. \square

Theorem 6.22 (Dualitätsprinzip für Polaren). *Seien P und Q aus $\mathbb{R}P^2$. Dann liegt P auf der Polaren zu Q genau dann, wenn Q auf der Polaren zu P liegt.*

Beweis. Weil die Matrix \mathcal{A} symmetrisch ist, sind die Gleichungen $q^\top \mathcal{A}p = 0$ und $p^\top \mathcal{A}q = 0$ zueinander äquivalent. \square

Dies ist nichts anderes als Satz 4.72 im Gewande der projektiven Geometrie, jetzt aber mit einem Beweis hart an der Grenze zur Banalität. Es fällt auf, daß die damalige Voraussetzung, daß P und Q nicht im Kreismittelpunkt liegen mögen, jetzt verschwunden ist (die Polare zum Kreismittelpunkt ist einfach die Ferngerade, das ist alles). Und wir haben die Beweise für die Fälle von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln gleich mit erledigt.

Es folgen zwei weitere Höhepunkte der projektiven Geometrie.

Theorem 6.23 (Pascal, allgemeinste Version). *Sei Ω eine quadratische Kurve mit regulärer Matrix \mathcal{A} . Es seien sechs verschiedene projektive Punkte A, B, C, D, E, F gegeben, die mit Ω inzidieren. Die Verbindungsgerade von A und B möge g_{AB} heißen, usw. Wir definieren die Schnittpunkte*

$$\{U\} := g_{CD} \cap g_{FA}, \quad \{V\} := g_{AB} \cap g_{EF}, \quad \{W\} := g_{BC} \cap g_{DE}. \quad (6.1)$$

Dann inzidieren die Punkte U, V, W mit einer gemeinsamen projektiven Geraden.

Ein möglicher Beweis dazu besteht in ausgiebigem Rechnen.

Interessant ist, daß man durch konsequentes Austauschen der Begriffe

$$\text{Punkt} \longleftrightarrow \text{Gerade}, \quad \text{Schnittpunkt} \longleftrightarrow \text{Verbindungsgerade}$$

ein weiteres großes Theorem bekommen kann. Dieses Dualitätsprinzip hatten wir schon in den Definitionen 6.2, 6.4, 6.13 anklingen lassen.

Theorem 6.24 (Brianchon). *Sei Ω eine quadratische Kurve mit regulärer Matrix \mathcal{A} . Es seien sechs verschiedene projektive Geraden a, b, c, d, e, f gegeben, die Ω tangieren. Der Schnittpunkt von a und b möge P_{ab} heißen, usw. Wir definieren die Verbindungsgeraden*

$$u := g_{P_{cd}P_{fa}}, \quad v := g_{P_{ab}P_{ef}}, \quad w := g_{P_{bc}P_{de}}.$$

Dann inzidieren die Geraden u, v, w mit einem gemeinsamen projektiven Punkt.

Kleinbuchstaben bezeichnen hier keine homogenen Koordinaten, sondern Geraden. Deshalb die andere Schriftart.

Ein Beweis könnte in ausgiebigem Rechnen bestehen. Interessanter ist es aber, die Dualität von Pol und Polare konsequent auszunutzen.

Beweis. Die Pole zu a, b, c, d, e, f mögen A, B, C, D, E, F heißen. Dies sind genau die Berührungspunkte dieser Tangenten an Ω . Mit naheliegenden Operatoren \mathfrak{Pol} und \mathfrak{Polare} haben wir dann

$$\begin{aligned} P_{ab} \in a = \mathfrak{Polare}(A) &\implies A \in \mathfrak{Polare}(P_{ab}), \\ P_{ab} \in b = \mathfrak{Polare}(B) &\implies B \in \mathfrak{Polare}(P_{ab}), \end{aligned}$$

also ist $g_{AB} = \mathfrak{Polare}(P_{ab})$. Analog für die anderen fünf Punkte (P_{bc} usw.). Das Tangentensechseck wird durch die Polaritätsabbildung also auf ein Sehnensechseck abgebildet.

Wir definieren Punkte U, V, W wie in (6.1). Dann ist

$$\begin{aligned} U \in g_{CD} = \mathfrak{Polare}(P_{cd}) &\implies P_{cd} \in \mathfrak{Polare}(U), \\ U \in g_{FA} = \mathfrak{Polare}(P_{fa}) &\implies P_{fa} \in \mathfrak{Polare}(U), \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{Polare}(U) = g_{P_{cd}P_{fa}} = u$. Analog folgt $\mathfrak{Polare}(V) = v$ und $\mathfrak{Polare}(W) = w$.

Wegen des Theorems von Pascal liegen U, V, W auf einer gemeinsamen Geraden, die wir h nennen. Wir setzen dann

$$H := \mathfrak{Pol}(h).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} U \in h = \mathfrak{Polare}(H) &\implies H \in \mathfrak{Polare}(U) = u, \\ V \in h = \mathfrak{Polare}(H) &\implies H \in \mathfrak{Polare}(V) = v, \\ W \in h = \mathfrak{Polare}(H) &\implies H \in \mathfrak{Polare}(W) = w. \end{aligned}$$

Also gehen die Geraden u, v, w alle durch denselben Punkt H . Das wollten wir zeigen. \square

6.5 Weiterführende Aspekte ✨

Auf einem Kegelschnitt seien fünf verschiedene Punkte gegeben. Ein weiterer Punkt der Ebene kann nur dann zu diesem Kegelschnitt gehören, wenn die im Theorem von Pascal genannten Seitenschnittpunkte auf einer Geraden liegen. Dies führt dann dazu, daß jeder Kegelschnitt durch fünf vorgegebene Punkte schon eindeutig bestimmt ist. Ein synthetischer Beweis dazu kann in [12] nachgelesen werden.

Weiterhin gilt: seien A, B, C, D vier verschiedene feste Punkte auf einem Kegelschnitt, und sei P ein beweglicher Punkt auf diesem Kegelschnitt. Dann hat das Doppelverhältnis der Geraden PA, PB, PC, PD immer denselben Wert.

Kapitel 7

Fragmente eines Modells der hyperbolischen Geometrie

7.1 Definitionen

Wir präsentieren das KLEINSche Modell der hyperbolischen Geometrie, wobei unsere Darstellung teilweise [3] folgt. Als entscheidend wird sich herausstellen, daß das Parallelenaxiom nicht gilt, und die überraschenden Konsequenzen daraus werden wir uns anschauen. Die Grundbegriffe und abgeleiteten Begriffe sind:

h-Punkt: Ein Punkt der euklidischen Ebene heißt *h-Punkt* genau dann, wenn er im Inneren des Einheitskreises liegt (also auch nicht auf der Einheitskreislinie).

h-Ebene: Das ist die Menge aller h-Punkte.

Randpunkt: Ein euklidischer Punkt heißt Randpunkt, wenn er auf dem Einheitskreise liegt. Ein Randpunkt kann niemals h-Punkt sein.

h-Gerade: Das ist eine Sehne im Einheitskreis, ohne ihre beiden Randpunkte. Jede h-Gerade zerlegt die h-Ebene in zwei *h-Halbebenen*.

Verknüpfung (Inzidenz): Ein h-Punkt liegt auf einer h-Geraden, wenn er es auch im euklidischen Sinne tut.

Zwischenrelation: Ein h-Punkt auf einer h-Geraden liegt zwischen zwei anderen Punkten auf dieser h-Geraden, wenn dies auch euklidisch so ist.

h-Strecke: Wie im Euklidischen

h-Dreieck: Drei h-Punkte, die nicht auf einer h-Geraden liegen, bilden die Eckpunkte eines h-Dreiecks, und die drei Kanten des Dreiecks sind die drei h-Strecken zwischen den drei Eckpunkten.

h-Halbstrahl: Ein h-Punkt auf einer h-Geraden zerlegt diese auf natürliche Weise in zwei h-Halbstrahlen.

h-Winkel: Dieser abgeleitete Begriff wird wie im Axiomensystem von Hilbert definiert.

h-Kongruenz: Zwei Teilmengen der h-Ebene heißen *h-kongruent*, wenn die eine durch eine endliche Komposition von *Polarenspiegelungen* auf die andere abgebildet werden kann. Die leere Komposition ist erlaubt.

h-rechte Winkel: Ein Winkel ist ein *h-rechter Winkel*, wenn der eine Schenkel mit seinem Bild bei Polarenspiegelung am anderen Schenkel eine h-Gerade ergibt.

Die hierbei verwendete Polarenspiegelung ist folgendermaßen definiert:

Definition 7.1 (Polarenspiegelung). Sei Ω der Einheitskreis mit Mittelpunkt O . Sei g eine Gerade, die Ω in zwei Punkten schneidet, und sei $G := \mathfrak{Pol}(g)$.

Falls $A \neq G$ ein (projektiver) Punkt der Ebene ist, so definieren wir den Bildpunkt $A' := \text{PS}_g(A)$ von A bei der Polarenspiegelung an g wie folgt:

falls $A \in g$: dann sei $A' := A$.

falls $A \notin g$: dann sei $\{A_g\} := g \cap AG$, und wir definieren A' durch die Forderung $DV(A, A'; G, A_g) = -1$.

Übungsaufgabe: Wo liegt G , wenn g durch den Ursprung verläuft?

Wo liegt A' in folgenden Situationen:

- A ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{GA_g}$.
- A_g liegt zwischen A und G .
- G liegt zwischen A und A_g .
- AG ist parallel zu g .
- g verläuft durch O .

Wir erkennen:

Lemma 7.2. Die Polarenspiegelung an g ist eine bijektive Abbildung der projektiven Ebene, aus der man vorher den Punkt G entfernt hat. Die einzigen Fixpunkte von PS_g sind die Punkte auf g . Die inverse Abbildung zu PS_g ist wieder gleich PS_g (es ist also PS_g eine Involution).

Etwas tiefliegender ist schon:

Lemma 7.3. Die Polarenspiegelung an g bildet die Einheitskreislinie auf sich ab, und die beiden von der h -Geraden g erzeugten beiden h -Halbebenen werden jeweils auf die andere abgebildet.

Beweisskizze. Die erste Behauptung ist genau die Aussage von Satz 4.76. Die zweite Behauptung ergibt sich dann aus Stetigkeitsbetrachtungen. \square

Entscheidend für alle weiteren Betrachtungen sind nun die folgenden beiden Sätze, die nicht nur in der h -Ebene gelten, sondern in der gesamten euklidischen Ebene:

Satz 7.4. Jede Polarenspiegelung ist geradentreu.

Beweis. Der Fall, daß die Polare g durch O verläuft, sei den Leserinnen und Lesern überlassen.

Sei ab jetzt g eine Polare nicht durch O , und sei h eine weitere (euklidische) Gerade der Ebene. Wir wollen zeigen, daß $\text{PS}_g(h)$ wieder eine Gerade ist. Falls $h \parallel g$, dann ergibt sich dies aus dem Strahlensatz.

Also sei ab jetzt h nichtparallel zu g . Wir setzen $\{C\} := g \cap h$, und wir wählen einen beliebigen festen Punkt $A \neq C$ auf h . Für einen beweglichen Punkt $B \in AC$ ist dann zu zeigen, daß $B' := \text{PS}_g(B)$ jedesmal wieder auf $A'C'$ liegt, mit $A' := \text{PS}_g(A)$ und $C' := \text{PS}_g(C)$. Weil C auf der Polaren g liegt, ist $C' = C$.

Nach Definition von A' ist $DV(A, A'; G, A_g) = -1$. Wir definieren $\{B_g\} := g \cap BG$, und $\{\tilde{B}\} := CA' \cap BG$.

Jetzt projizieren wir die Gerade AG per Zentralprojektion am Zentrum C auf die Gerade BG . Dabei wird abgebildet wie folgt:

$$A \mapsto B, \quad A' \mapsto \tilde{B}, \quad G \mapsto G, \quad A_g \mapsto B_g.$$

Wegen des Satzes 6.11 ist dann $DV(A, A'; G, A_g) = DV(B, \tilde{B}; G, B_g)$. Also muß \tilde{B} gleich dem gesuchten Bildpunkt B' sein (denn auf der Geraden BG gibt es genau einen Punkt B' , der das gewünschte Doppelverhältnis verwirklicht). \square

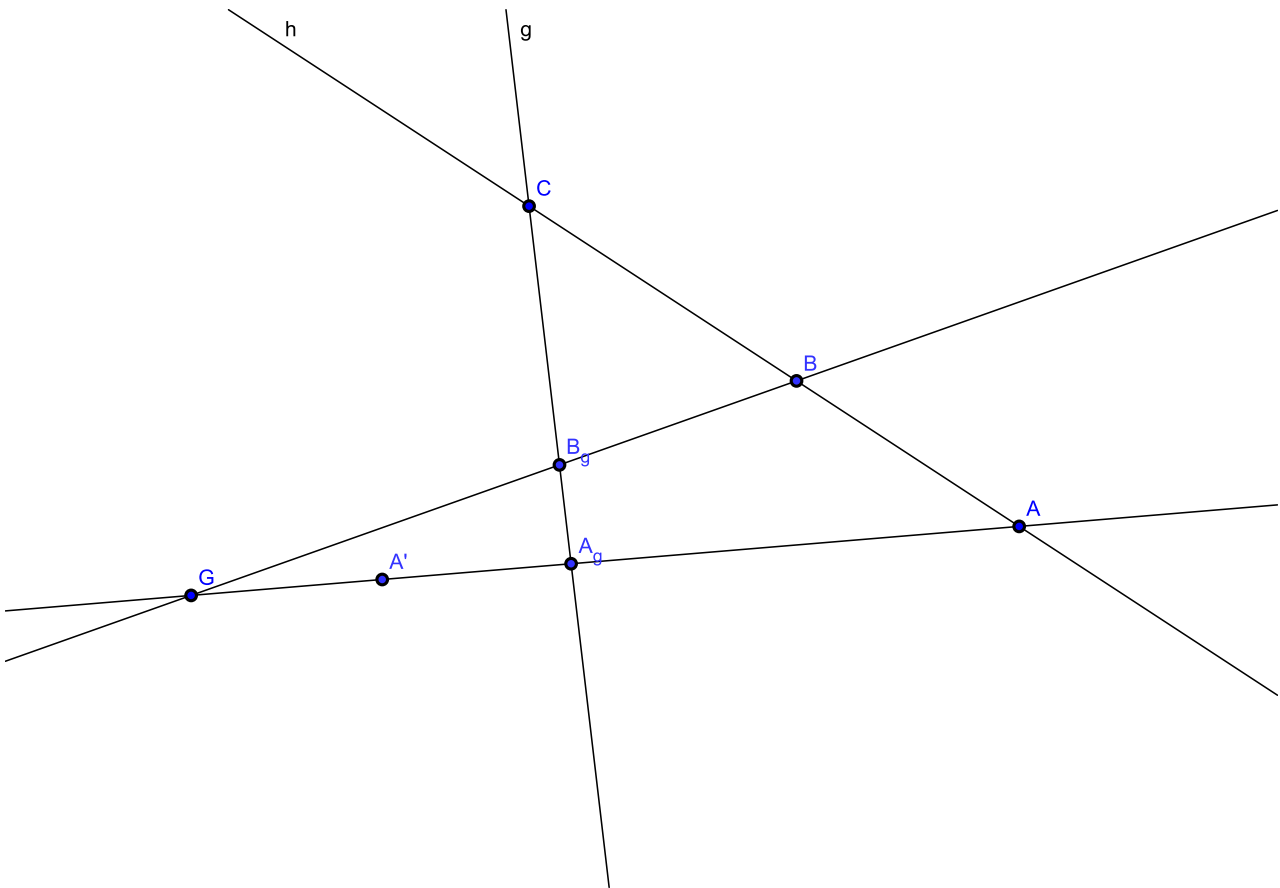


Abbildung 7.1: Polarenspiegelungen sind geradentreu.

Satz 7.5. *Jede Polarenspiegelung ist doppelverhältnistreue.*

Beweis. Seien auf einer Geraden h vier verschiedene Punkte A, B, C, D gegeben. Bei Polarenspiegelung an einer Polaren g werden diese Punkte auf A', B', C', D' abgebildet, die gemäß des vorigen Satzes auf einer Geraden h' liegen.

Andererseits ergeben sich A', B', C', D' , indem man die Gerade h zentral auf die Gerade h' projiziert, mit Zentrum G . Wegen des Satzes 6.11 haben wir dann $DV(A, B; C, D) = DV(A', B'; C', D')$. \square

Wir benötigen noch eine Invarianzaussage:

Satz 7.6. *Jede Polarenspiegelung ist in der h -Ebene der Zwischenrelation treu. Das heißt: seien A, B, C verschiedene h -Punkte auf einer h -Geraden, wobei B zwischen A und C liegen möge. Dann liegt auch B' zwischen A' und C' .*

Beweis. Die h -Gerade durch A, B, C möge h heißen, und ihre Randpunkte (die keine h -Punkte sind) seien U und V . Wir wählen die Bezeichnungen so, daß U, A, B, C, V in dieser Reihenfolge auf derjenigen euklidischen Geraden liegen, welche die h -Gerade h „auf sich trägt“.

Dann hat werden die Randpunkte U und V durch PS_g auf die Randpunkte von h' abgebildet. Diese Randpunkte nennen wir U' und V' .

Es ist $DV(U, B; A, V)$ negativ, denn A liegt auf der euklidischen Strecke \overline{UB} , aber V liegt außerhalb dieser euklidischen Strecke. Wegen der Doppelverhältnistreue ist dann auch $DV(U', B'; A', V') < 0$, also liegt einer der beiden Punkte A', V' auf der euklidischen Strecke $\overline{U'B'}$, der andere nicht. Dieser auswärtige Punkt muß aber V' sein, denn V' ist zwangsläufig ein Randpunkt. Also liegen die Punkte U', A', B', V' in genau dieser Reihenfolge auf derjenigen euklidischen Geraden, welche die h -Gerade h' auf sich trägt. Also liegt A' zwischen U' und B' .

Analog zeigt man, daß C' zwischen B' und V' liegt. Dann muß B' zwischen A' und C' gelegen sein. \square

Die Polarenspiegelung kann mit Zirkel und Lineal folgendermaßen bewerkstelligt werden:

- gegeben: der Einheitskreis Ω , eine euklidische Gerade g , welche Ω in genau zwei Punkten schneidet, ein h-Punkt A
- gesucht: $A' := \text{PS}_g(A)$
- Sei U ein beliebiger der beiden Schnittpunkte von g mit Ω .
- Sei V der andere Schnittpunkt der euklidischen Geraden UA mit Ω .
- Sei $V' := \text{PS}_g(V)$ der andere Schnittpunkt der Geraden VG mit Ω , wobei $G := \mathfrak{Pol}(g)$. Die Gerade VG ist eindeutig bestimmt, weil G außerhalb von Ω liegt.
- Dann ist $\{A'\} = UV' \cap AG$.

Denn es liegt A auf der euklidischen Geraden durch U und V , also liegt (wegen der Geradentreue) A' auf der euklidischen Geraden durch $\text{PS}_g(U)$ und $\text{PS}_g(V)$. Es ist aber $\text{PS}_g(U) = U$ wegen $U \in g$, und $\text{PS}_g(V) = V'$, nach Definition von V' . Also liegt A' auf der euklidischen Geraden durch U und V' . Es liegt A' (definitionsgemäß) aber auch auf der euklidischen Geraden durch A und G . Man überlegt sich, daß UV' und AG tatsächlich zwei verschiedene Geraden sind: denn sonst liegen U, V, V', A, G alle auf derselben Geraden. Diese schneidet den Kreis in drei Punkten U, V, V' , von denen also (mindestens) zwei derselbe Punkt sein müssen. Es ist aber $V \neq U$, denn UA ist eine Sekante von Ω , keine Tangente. Die Gerade GU ist jedoch eine Tangente an Ω (denn die Polare g ist definiert als die Verbindungsgerade der beiden Tangentenberührungspunkte von G an Ω). Also wäre $U = V = V'$ der einzige gemeinsame Punkt der Geraden GA mit Ω . Widerspruch.

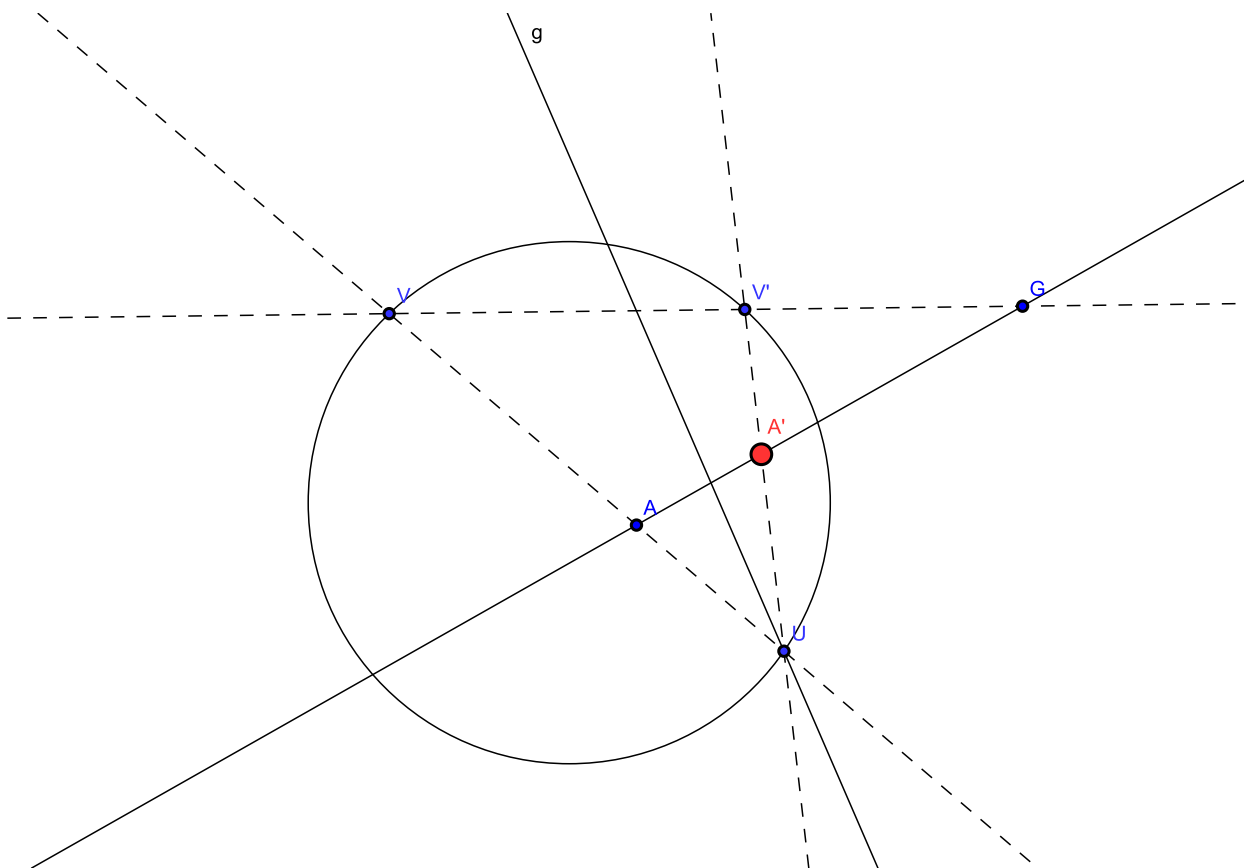


Abbildung 7.2: Eine Konstruktion der Polarenspiegelung mit Zirkel und Lineal

7.2 Grundkonstruktionen

Gesucht ist jeweils eine einzige Polarenspiegelung, welche die verlangte Abbildung bewerkstelligt. Das bedeutet, daß wir die Polare g finden wollen:

eine h-Gerade h auf eine h-Gerade k abzubilden: seien h und k verschiedene h-Geraden. Die Randpunkte von h seien U, V ; und die Randpunkte von k seien U', V' . Angenommen, die euklidischen Geraden UV und $U'V'$ schneiden einander in einem Punkte außerhalb von Ω . Wir können die Taufe der Randpunkte so vornehmen, daß $UVV'U'$ ein konvexes (insbesondere: nicht-überschlagenes) Sehnenviereck ist. Dessen Diagonalen UV' und $U'V$ schneiden einander im Innern des Sehnenvierecks, also auch im Innern des Kreises. Wir definieren dann $\{G\} := UU' \cap VV'$ und $g := \mathfrak{Polare}(G)$. Das ist die gesuchte Polare. Um zu zeigen, daß g den Kreis Ω tatsächlich in zwei Punkten schneidet, verweisen wir auf Satz 4.73, aus dem sich ergibt, daß $\mathfrak{Polare}(G)$ durch den Diagonalschnittpunkt verlaufen muß. Dieser liegt aber im Kreisinnern.

Angenommen, die euklidischen Geraden UV und $U'V'$ schneiden einander in einem Punkte innerhalb von Ω . Dann wählen wir die Bezeichnung der Randpunkte dergestalt, daß jetzt $UU'VV'$ ein konvexes Sehnenviereck ist, und setzen erneut $\{G\} := UU' \cap VV'$.

Angenommen, die euklidischen Geraden UV und $U'V'$ schneiden einander auf dem Einheitskreise. (Dieser Fall sei eine Übungsaufgabe.)

einen h-Punkt A auf einen h-Punkt B abzubilden: die euklidische Gerade AB nennen wir h , und dann setzen wir $H := \mathfrak{Pol}(h)$. Dieser Punkt liegt außerhalb von Ω , denn h schneidet Ω in zwei Punkten. Den Pol der gesuchten Geraden g nennen wir G . Wegen $G \in AB = h = \mathfrak{Polare}(H)$ ist dann auch $H \in \mathfrak{Polare}(G) = g$. Die gesuchte Gerade g verläuft also durch H . Die euklidische Gerade durch A und H schneidet Ω in zwei Punkten. Einen von diesen nennen wir C , und wir können erreichen, daß A zwischen C und H liegt. Analog: die euklidische Gerade durch B und H schneidet Ω in zwei Punkten, und wir nennen denjenigen von ihnen D , für den B zwischen H und D liegt.

Die gesuchte Polarenspiegelung (wenn es sie denn gibt) bildet die Gerade HA auf die Gerade HB ab. Es ist H zwar kein h-Punkt, aber man kann sich überlegen (Übungsaufgabe), daß die Zwischentreue auch jetzt gelten muß. Also wird C auf D abgebildet, und G muß auf der Geraden CD liegen.

Also definieren wir $\{K\} := AB \cap CD$, und K ist der Kandidat für den gesuchten Punkt G . Wegen $K \in AB = h = \mathfrak{Polare}(H)$ ergibt sich dann $H \in \mathfrak{Polare}(K) =: k$.

Nach Satz 4.76 ist $DV(C, D; K, k \cap CD) = -1$. Wegen der Doppelverhältnistreue der Zentralprojektion mit Zentrum H ist dann auch $DV(A, B; K, k \cap AB) = -1$. Also erfüllt k die Bedingungen an das gesuchte g , und wir können $g := k$ setzen.

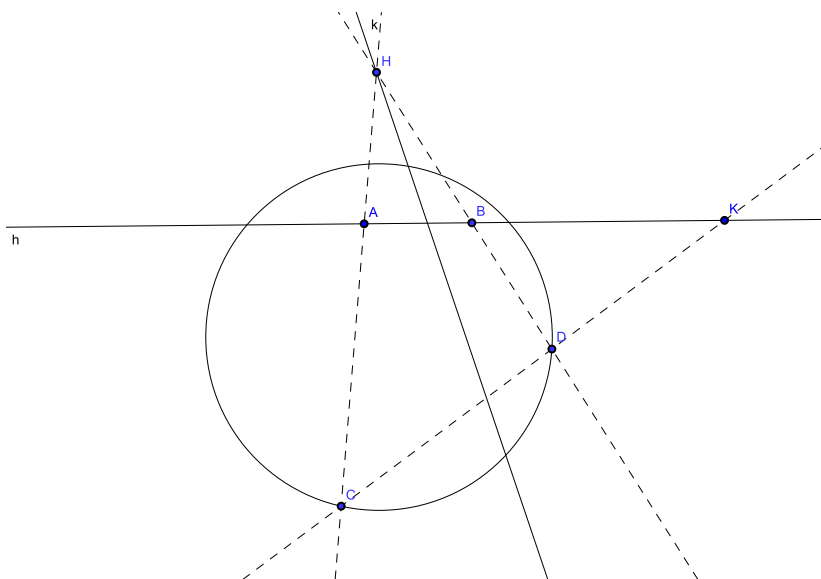


Abbildung 7.3: Einen h-Punkt A auf einen h-Punkt B abzubilden

eine h–Strecke \overline{AB} auf eine h–Gerade h durch A zu drehen: das soll bedeuten: Gegeben ist eine h–Strecke \overline{AB} und eine h–Gerade durch A . Gesucht ist ein Punkt C auf h , sodaß $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, und insbesondere suchen wir eine Polare g , sodaß PS_g diese Abbildung bewirkt.

Aus der ersten Grundkonstruktion wissen wir, wie die h–Gerade AB auf die h–Gerade h abgebildet werden kann (dafür gibt es zwei Lösungen). Die dabei konstruierte Polare g verläuft durch den euklidischen Punkt A , wie man sich überlegt. Das ist die gesuchte Polare.

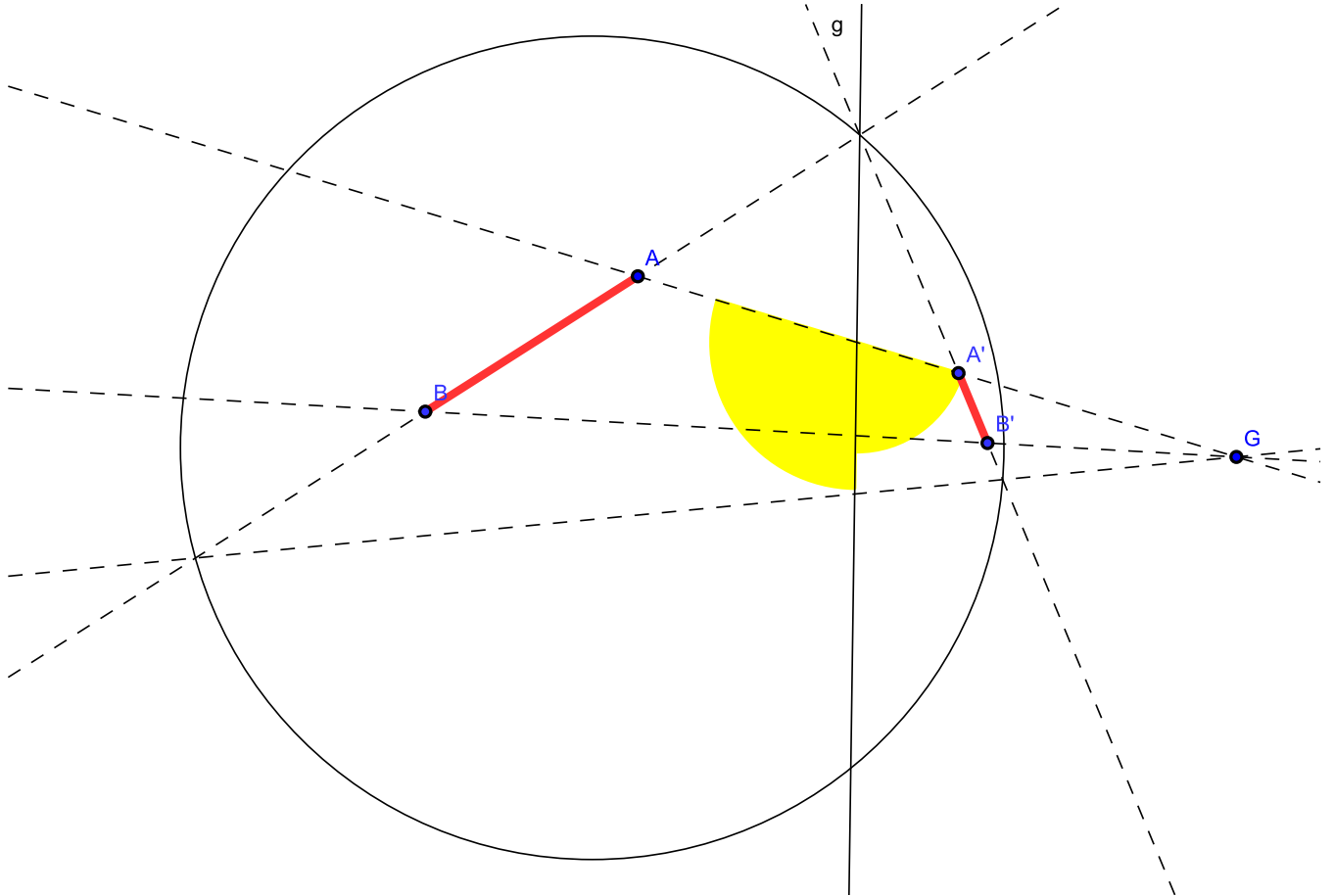


Abbildung 7.4: Zwei h–kongruente h–Strecken, und zwei h–rechte h–Winkel

Mit diesen Abbildungseigenschaften können wir jetzt typische Grundkonstruktionen verwirklichen:

eine h–Senkrechte zu errichten: gegeben sei eine h–Gerade h und ein h–Punkt A (der auf h liegen kann oder auch nicht). Gesucht ist eine h–Gerade g , die mit h einen h–rechten Winkel einschließt, und die durch A verläuft.

Um g zu konstruieren, nehmen wir die euklidische Gerade durch A und $\mathfrak{Pol}(h)$. Deren Einschränkung auf das Kreisinnere ist dann g .

eine h–Strecke anzutragen: gegeben ist eine h–Strecke \overline{AB} , eine h–Gerade h , und ein h–Punkt C auf h . Gesucht ist $D \in h$ mit $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

Zur Lösung bilden wir A mittels einer Polarspiegelung auf C ab, wobei B zu B_1 gesendet wird. Anschließend drehen wir die h–Strecke $\overline{CB_1}$ auf die h–Gerade h .

einen h–Winkel anzutragen: sinngemäß wie beim Antragen von h–Strecken.

eine h–Strecke zu h–halbieren: vgl. Skizze.

Man beobachte, daß es möglich ist, eine h–Strecke immer wieder an sich selbst anzutragen, ohne jemals die h–Ebene zu verlassen.

Übungsaufgabe: Man beweise, daß die angedeuteten Konstruktionen wirklich das verlangte geometrische Objekt liefern. Man erörtere Durchführbarkeit, Existenz und Eindeutigkeit.

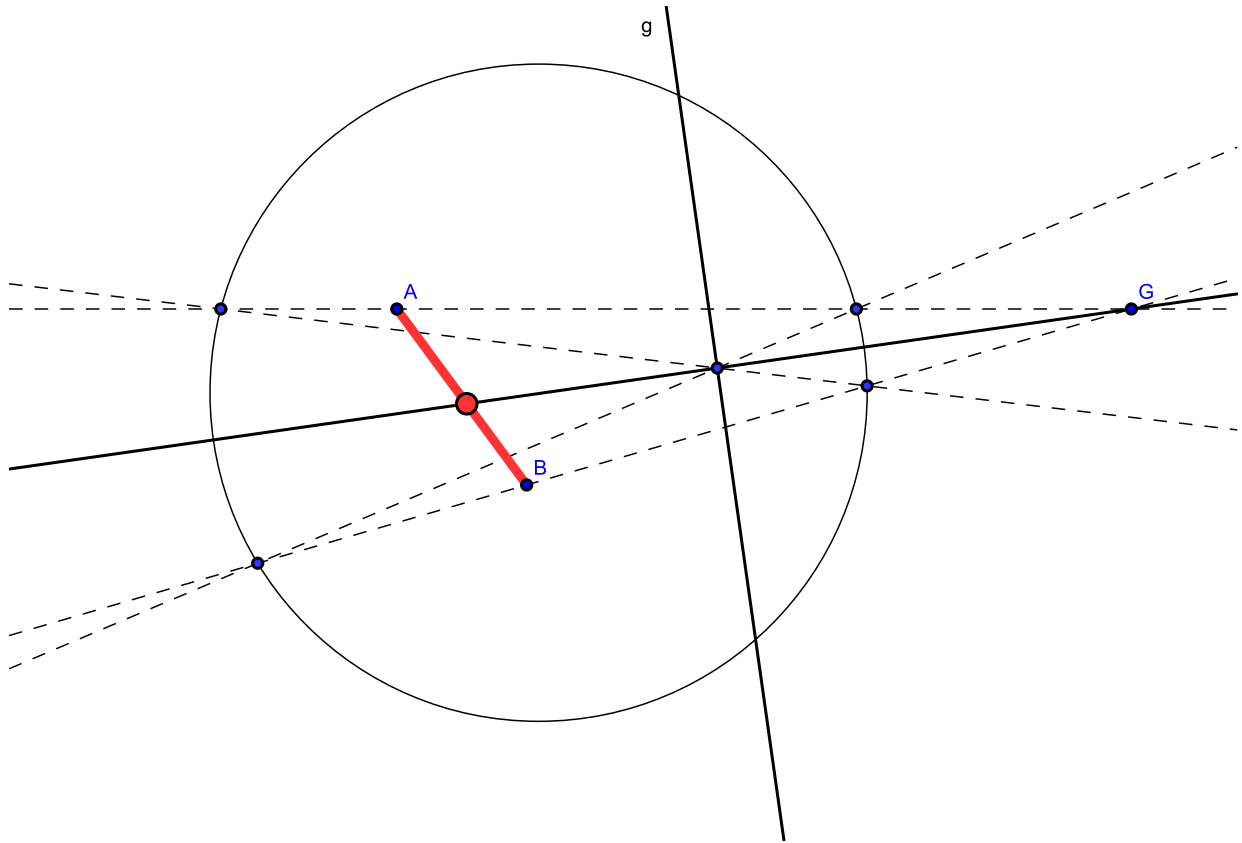


Abbildung 7.5: Eine h-Strecke zu h-halbieren

7.3 Das h-Modell und die Axiome der absoluten Geometrie

Wir skizzieren jetzt, warum das dargelegte h-Modell die Axiome der absoluten Geometrie erfüllt, vgl. Abschnitt 1.3. Für die Axiomgruppe I (Inzidenzaxiome) und die Axiomgruppe II ist dies praktisch offensichtlich, weil die Inzidenz und die Zwischen-Relation wie in der euklidischen Geometrie definiert werden.

Für die Axiomgruppe III ist mehr Aufwand nötig. Im Axiom III.1 wird die Existenz der Streckenantragung gefordert; dies haben wir als eine Grundkonstruktion verwirklicht. Die Eindeutigkeit der Streckenantragung wird im Axiom III.1 nicht verlangt, aber wir können sie schnell zeigen (und uns damit den Beweis von Axiom III.5 vereinfachen). Denn sonst gäbe es eine h-Gerade und Punkte A, B, C darauf, die paarweise verschieden sind, mit B zwischen A und C , sodaß $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Es gäbe also eine Abfolge von Polarenspiegelungen, die abbildet wie folgt:

$$A \mapsto A, \quad B \mapsto C.$$

(Wir dürfen nicht annehmen, daß eine einzelne Polarenspiegelung bereits so abbildet!). Wir nehmen noch die Randpunkte U und V der Geraden hinzu, und wir wählen die Benennungen so, daß die Punkte in der Reihenfolge $UABCV$ auf der euklidischen Trägergeraden liegen. Die genannte Abfolge von Polarenspiegelungen ist zwischentreu (denn jede einzelne Polarenspiegelung ist zwischentreu), also haben wir auch die Abbildungseigenschaften $U \mapsto U$ und $V \mapsto V$. Nun ist aber die Zusammensetzung der Polarenspiegelungen auch doppelverhältnistreue, also $DV(U, A; B, V) = DV(U, A; C, V)$, im Widerspruch zu $B \neq C$.

Die mittels Polarenspiegelungen definierte Kongruenzrelation ist eine Äquivalenzrelation, denn Polarenspiegelungen sind Involutionen. Das beweist das Axiom III.2. Die Kompatibilität des Streckenantragens mit der Kongruenz (Axiom III.3) ergibt sich aus der Doppelverhältnistreue. Die Eindeutigkeit des Winkelantragens (Axiom III.4) beweist man ähnlich wie die Eindeutigkeit des Streckenantragens über die Doppelverhältnistreue.

Im Axiom III.5 wird eine abgeschwächte Version des Kongruenzsatzes SWS gefordert. Vorausgesetzt sei $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Das heißt, es gibt eine Abfolge von Polarenspiegelungen, die \overline{AB} auf $\overline{A'B'}$ abbildet. Es gibt weiterhin eine (evtl. andere) Abfolge von Polarenspiegelungen,

die \overline{AC} auf $\overline{A'C'}$ abbildet, und es gibt eine (evtl. wieder andere) Abfolge von Polarenspiegelungen, die $\angle BAC$ auf $\angle B'A'C'$ abbildet. Wir wären fertig, wenn es gelänge, eine Abfolge von Polarenspiegelungen zusammenzubauen, die $\triangle ABC$ auf $\triangle A'B'C'$ abbildet. Dies ist tatsächlich möglich: mit Hilfe der Grundkonstruktionen spiegeln wir erst A auf A' (und erhalten ein Zwischendreieck $\triangle A'B_1C_1$), dann drehen wir $\overline{A'B_1}$ um A' auf die Gerade $A'B'$ (erhalten ein neues Zwischendreieck), usw. Beim Beweis benutzt man ausgiebig die Transitivität der Kongruenzrelation und die Eindeutigkeit jeglichen Antragens. Damit ist die Axiomengruppe III abgehandelt, und für die Axiomengruppe V (Stetigkeit) verweisen wir auf [3], wo eine (äquivalente) Variation der Axiome bewiesen wird.

Das euklidische Parallelenaxiom IV kann offensichtlich nicht gelten.

Übungsaufgabe 7.1. Wir definieren: eine h -Gerade g steht h -senkrecht auf einer h -Geraden k , wenn $PS_g(k) = k$. Zeigen Sie: diese Relation ist symmetrisch. Hinweis: Dualitätsprinzip

Die absolute Geometrie umfaßt alle Aussagen, die (ohne Rückgriff auf ein konkretes Modell) aus den Axiomgruppen I, II, III, V geschlußfolgert werden können. Diese Aussagen gelten also in der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie gleichermaßen. Beispiele dafür sind (vgl. [3]):

- Die Dreieckskongruenzsätze SWS, SWW, SSS, SSW.
- Wenn zwei verschiedene Geraden mit einer dritten Geraden kongruente Wechselwinkel bilden, dann schneiden sie einander nicht.
- In einem Dreieck kann höchstens ein Innenwinkel nichtspitz sein (wir definieren einen Winkel als spitz, wenn er in einem rechten Winkel echt enthalten ist).
- In einem spitzwinkligen Dreieck liegt jede Höhe innerhalb des Dreiecks; in einem nichtspitzwinkligen Dreieck die von der Ecke mit dem größten Innenwinkel ausgehende.
- Die drei Innenwinkelhalbierenden schneiden einander im Dreiecksinnern.
- In einem Dreieck liegt der größere Winkel der größeren Seite gegenüber; und umgekehrt.
- Die Dreiecksungleichung gilt.

Die schulbekannten Aussagen über Winkel an geschnittenen Parallelen, die Strahlenätze, der Satz über die Innenwinkel am Dreieck benötigen alle das euklidische Parallelenaxiom und sind deshalb in der absoluten Geometrie im Allgemeinen falsch. Das Konzept von ähnlichen Dreiecken kann ohne das euklidische Parallelenaxiom gar nicht eingeführt werden.

Übungsaufgabe 7.2. Man konstruiere ein h -gleichseitiges h -Dreieck, das nicht euklidisch gleichseitig ist.

7.4 Parallelität im h -Modell

Im h -Modell gilt folgende Abwandlung des Parallelenaxioms, wie man schnell erkennt:

IV_h Es sei a eine beliebige h -Gerade und P ein h -Punkt außerhalb von a . Dann gibt es mindestens zwei h -Geraden, die a nicht schneiden und durch P gehen.

Von einer Parallelitätsrelation wünschen wir uns, daß sie eine Äquivalenzrelation ist (reflexiv, symmetrisch, transitiv). In der euklidischen Geometrie wird dieser Wunsch uns erfüllt, und jetzt wollen wir uns anschauen, wie es damit im KLEINSchen Modell der hyperbolischen Geometrie aussieht.

Vorher beobachten wir, daß es in der euklidischen Geometrie mindestens drei Möglichkeiten gibt, die Parallelität zu definieren, und alle genannten Möglichkeiten sind zueinander logisch äquivalent:

- zwei euklidische Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie einander nicht in genau einem Punkte schneiden.
- zwei euklidische Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie beide auf einer dritten Geraden senkrecht stehen.

- zwei euklidische Geraden heißen parallel zueinander, wenn sie überall den gleichen Abstand voneinander haben. Das bedeutet: von jedem Punkt der einen Geraden können wir das Lot auf die andere Gerade fällen. Dann sind alle diese Lotstrecken zueinander kongruent.

Gilt diese Äquivalenz der drei • auch in der h-Geometrie ?

Definition 7.7. Wir sagen, daß zwei h-Geraden h-parallel zueinander sind, wenn sie einander nicht in genau einem Punkte schneiden. Die h-Parallelität wird unterteilt wie folgt:

Zwei h-Geraden heißen randparallel, wenn ihre euklidischen Trägergeraden einander in genau einem Punkte schneiden, der auf dem Einheitskreise liegt.

Zwei h-Geraden heißen überparallel, wenn ihre euklidischen Trägergeraden euklidisch-parallel sind, oder wenn ihre euklidischen Trägergeraden einander in einem Punkte außerhalb des Einheitskreises schneiden.

Wir beobachten, daß keine dieser Parallelitätsrelationen in der h-Geometrie transitiv ist.

Lemma 7.8. Wenn g und k überparallele h-Geraden sind, so gibt es genau eine dritte h-Gerade, auf der g und k h-senkrecht stehen.

Wenn g und k randparallele h-Geraden sind, so gibt es keine einzige dritte h-Gerade, auf der g und k h-senkrecht stünden.

Beweis. Seien g und k überparallel, und sei A der Schnittpunkt der euklidischen Trägergeraden von g und k . Dann ist A außerhalb des Kreises, und die Polare von A ist eine solche gewünschte Gerade.

Und $\text{Polare}(A)$ ist die einzige solche Gerade, denn: sei ℓ eine h-Gerade, auf der g und k h-senkrecht stehen. Dann ist $\text{PS}_g(\ell) = \ell$. Also verläuft ℓ durch $\text{Pol}(g)$. Weiterhin ist $\text{PS}_k(\ell) = \ell$, also muß ℓ auch durch $\text{Pol}(k)$ verlaufen. Es sind aber $\text{Pol}(g)$ und $\text{Pol}(k)$ verschiedene Punkte, denn $g \neq k$. Also ist ℓ durch diese beiden Punkte eindeutig bestimmt.

Seien jetzt g und k randparallel zueinander. Eine gemeinsame h-Senkrechte ℓ müßte dann durch $\text{Pol}(g) =: G$ und $\text{Pol}(k) =: G$ verlaufen. Sei U der gemeinsame Randpunkt von g und k . Dann ist $U \in \text{Polare}(G)$, also $G \in \text{Polare}(U)$. Und analog $K \in \text{Polare}(U)$. Die Polare von U ist aber gleich der Tangenten in U an den Kreis, also ist die gemeinsame h-Senkrechte ℓ von g und k gleich der Tangenten an U . Diese Tangente ist aber keine h-Gerade. \square

Analog zeigt man, daß es keine gemeinsame h-Senkrechte von g und k geben kann, wenn g und k einander in der h-Ebene schneiden.

Wir halten schnell fest:

Korollar 7.9. Es gibt keine h-Rechtecke (wenn man diese definiert als Vierecke mit vier rechten Innenwinkeln).

Und wir haben auch gezeigt:

Lemma 7.10. Wenn zwei verschiedene h-Geraden g und k eine dritte h-Gerade zur gemeinsamen h-Senkrechten haben, dann sind g und k überparallel, und umgekehrt.

Zum dritten • zitieren wir aus [3]: bekanntlich gilt in der euklidischen Geometrie folgendes. Sei eine Gerade g gegeben. Die Menge aller Punkte, die von g einen festen vorgegebenen Abstand hat, ist ein Geradenpaar. Im h-Modell gilt stattdessen: sei eine h-Gerade g gegeben, und ein h-Punkt P außerhalb von g . Dann ist die Menge aller h-Punkte, deren h-Lote auf g h-kongruent zum h-Lot von P auf g sind, eine euklidische Ellipse, die durch die beiden Randpunkte verläuft.

Für das h-Modell finden wir in [3] auch eine biologische Interpretation. Wir stellen uns die Einheitskreisscheibe als Bierdeckel vor, und darauf gibt es eine Population von Wanzen, deren Geometrieverständnis sich durch das Konzept der h-Kongruenz ausdrückt. Wir haben gesehen, daß das wiederholte h-Antragen einer Strecke an sich selbst unbegrenzt möglich ist, und insbesondere wird der Einheitskreis dabei nie erreicht. In diesem Sinne ist der Bierdeckelrand für die Wanzen das Ende des Universums (also unendlich weit entfernt), und das Äußere des Einheitskreises ist dann „überunendlich“ weit entfernt.

Wir überlegen uns jetzt, wie für die Bierdeckelwanzenkinder ein schulischer Geometrieunterricht aussähe.

Eine einzelne Polarenspiegelung kann als eine **h-Spiegelung** angesehen werden. Die einzigen Fixpunkte einer h-Spiegelung sind die Punkte auf der Polaren. Die einzigen Fixgeraden sind die h-Geraden h-senkrecht auf der Polaren, und natürlich die Polare selbst.

Die Komposition von zwei h-Spiegelungen, deren Achsen einander in einem h-Punkt schneiden, kann als eine **h-Drehung** (um den Schnittpunkt) bezeichnet werden. Der einzige Fixpunkt ist das Drehzentrum. Wenn man zwei verschiedene h-Punkte A und B wählt, und sämtliche Bildpunkte ermittelt, die durch h-Drehung von B um A erhalten werden können, dann entsteht ein h-Kreis um den Mittelpunkt A durch den Punkt B . Dieser ist allerdings gleich einer euklidischen Ellipse, wobei A nicht der euklidische Schnittpunkt der Ellipsenachsen ist. Diese h-Kreise sind die einzigen Fixgebilde der h-Drehung.

Eine h-Drehung, bei der die Achsen der beiden zugrundeliegenden h-Spiegelungen h-orthogonal zueinander sind, heißt **h-Punktspiegelung**. In der euklidischen Geometrie ergibt die Komposition von drei Punktspiegelungen wieder eine Punktspiegelung. Dies ist in der h-Geometrie falsch.

Die Komposition von zwei h-Spiegelungen, deren Achsen überparallel sind, wollen wir als eine **h-Verschiebung** bezeichnen. Eine solche Abbildung hat keinen Fixpunkt. Die einzige Fixgerade ist die gemeinsame h-Senkrechte der beiden Polaren, und wir vereinbaren die Sprechweise, daß die h-Verschiebung *entlang* der gemeinsamen Senkrechten erfolgt. Weitere Fixgebilde bestehen aus den „Punkten gleichen Abstands“ zur gemeinsamen Senkrechten (wir hatten oben schon ausgeführt, daß dies euklidische Ellipsen sind). Die Komposition zweier h-Verschiebungen ist nicht unbedingt wieder eine h-Verschiebung (es könnte auch eine h-Drehung herauskommen oder eine Grenzdrehung). Im Unterschied zur euklidischen Geometrie ist die Menge aller h-Verschiebungen also keine Gruppe! Allerdings ergibt die Menge aller h-Verschiebungen *entlang derselben h-Geraden* eine abelsche Gruppe.

Die Komposition von zwei h-Spiegelungen, deren Achsen randparallel sind, bezeichnen wir als eine **Grenzdrehung**. Zu diesem Abbildungstyp gibt es keine Entsprechung in der euklidischen Geometrie. Wenn man die Achsen der beteiligten h-Spiegelungen minimal stört, dann wandert der Achsenschnittpunkt in den Einheitskreis oder heraus, und in diesem Sinne kann die Grenzdrehung als eine Zwischenform von h-Drehung und h-Verschiebung angesehen werden. Das Fixgebilde einer solchen Grenzdrehung ist ein **Horozyklus**, das ist eine Ellipse mit kurzer Achse gleich der euklidischen Strecke zwischen dem Kreismittelpunkt und dem gemeinsamen Randpunkt der beiden Spiegelungsachsen, und die lange Achse wird durch die Forderung bestimmt, daß der Krümmungskreis der Ellipse am Randpunkt gleich dem Einheitskreis ist. Alle Grenzdrehungen mit selbem Randpunkt haben denselben Horozyklus.

Schließlich kann eine **h-Schubspiegelung** als eine Komposition von drei h-Spiegelungen erzeugt werden. Dies sind dann alle Kongruenzabbildungen der h-Geometrie: h-Spiegelung, h-Verschiebung, h-Drehung, h-Schubspiegelung (vgl. Satz 2.10).

In der euklidischen Geometrie kann man eine Gerade als einen Kreis ansehen, dessen Mittelpunkt unendlich weit entfernt ist, und der unendlich großen Radius hat. Eine solcher unendlich groß gewordener Kreis ist in der h-Geometrie aber keine h-Gerade, sondern ein Horozyklus. Es gibt noch einen weiteren Unterschied zur euklidischen Geometrie: die „beiden unendlich fernen Punkte“ einer euklidischen Geraden kann man (von einem Standpunkt neben der Geraden aus) anpeilen, und der Winkel zwischen den beiden Peilstrahlen ist gleich zwei rechten Winkeln. Im Gegensatz dazu ist in der h-Geometrie der Winkel zwischen den beiden Peilstrahlen zu den beiden Randpunkten echt kleiner als zwei rechte Winkel. Die beiden Peilstrahlen kann man als Asymptoten der h-Geraden ansehen, genauso wie ein Hyperbelbogen zwei Asymptoten hat. Deshalb wird die h-Geometrie auch als **hyperbolische Geometrie** bezeichnet.

Wenn die Geometriezeichenblätter geradlinig berandete Vierecke sind, dann können die vier Innenwinkel keine Rechtecke sein. Wir definieren einige spezielle h-Vierecke: ein h-Viereck, dessen Diagonalen einander h-halbieren, heißt **h-Parallelogramm**. Wenn man eine h-Strecke an einem Punkt außerhalb dieser h-Strecke h-punktspiegelt, dann erhält man ein h-Parallelogramm. Ein h-Parallelogramm, dessen Diagonalen h-kongruent sind, heißt **h-Rechteck**. Wenn die Diagonalen eines h-Parallelogramms h-senkrecht sind, dann reden wir von einem **h-Rhombus**. Ein h-Rechteck, das gleichzeitig h-Rhombus ist, heißt **h-Quadrat**.

Wir erhalten für h-Rechtecke: die Verbindungsgeraden von h-Mittelpunkten gegenüberliegender h-Rechteckskanten sind die eindeutig bestimmten gemeinsamen h-Senkrechten dieser Kanten, und bei Polarenspiegelung an diesen Verbindungsgeraden wird das Rechteck auf sich abgebildet. Gegenüberliegende Kanten sind also h-kongruent. Jede solche Verbindungsgerade zerlegt das h-Rechteck in zwei h-Vierecke, von denen jedes ein „gleichschenkelig-rechtwinkliges h-Trapez“ ist. Die vier Innenwinkel eines h-Rechtecks sind zueinander h-kongruent, aber keine rechten Winkel.

Wir erhalten für h-Rhomben: bei Polarenspiegelung an jeder der beiden Diagonalen wird das h-Rhombus auf sich abgebildet. Die Diagonalen h-halbieren also die Innenwinkel. Alle vier Kanten sind zueinander h-kongruent.

Es ist eine Längenfestlegung für h-Strecken möglich. Sei eine h-Strecke \overline{AB} gegeben, und seien U, V die Randpunkte der Geraden AB . Dann kann die Länge von \overline{AB} durch $|\ln DV(A, B; U, V)|$ definiert werden, mit \ln als natürlichem Logarithmus. Diese Begriffsbildung verhält sich auf natürliche Weise: es gilt nämlich sowohl die Invarianz bei Kongruenz als auch die Kompatibilität beim Streckenantragen. Diese beiden Forderungen bestimmen das Längenfunktional eindeutig (bis auf Skalierungsfaktoren).

In der h-Geometrie gilt auch der Kongruenzsatz WWW. Es kann also keine zueinander h-ähnlichen, aber h-nicht-kongruenten Dreiecke geben. Dreiecke mit gleicher Innenwinkelsumme sind zerlegungsgleich (man kann also eines der Dreiecke in Einzelteile zerlegen, diese neu h-kongruent zusammenfügen und bekommt das andere Dreieck). Diese Konzept der Zerlegungsäquivalenz gestattet die Einführung eines Flächeninhaltsfunktionals. Hierbei haben h-kongruente h-Polygone den gleichen h-Flächeninhalt, und bei Zerlegung eines h-Polygons in kleinere h-Polygone ist die Summe der h-Flächeninhalte der kleineren h-Polygone gleich dem h-Flächeninhalt des Ausgangspolygons.

Eine h-Winkelmessung kann ebenfalls definiert werden. In jedem h-Dreieck ist die Summe der Innenwinkelgrößen echt weniger als 180° , und die Differenz zu 180° ist proportional zum h-Flächeninhalt des h-Dreiecks. Damit wird die Flächeninhaltsermittlung für allgemeine h-Polygone mit n Ecken sehr einfach: der h-Flächeninhalt eines solchen h-Polygons ist gleich der Differenz der Innenwinkelsumme zu $(n-2) \cdot 180^\circ$ (bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der das Flächeninhaltsfunktional eindeutig bestimmt).

Es gilt auch ein h-Thalesatz: der h-Winkel im h-Halbkreis ist stets kleiner als ein h-rechter Winkel.

Anhang A

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe A.1. Gegeben sei folgendes Modell einer Geometrie: Punkte sind die 4 Wörter *AMT*, *DOM*, *ORT*, *RAD*. Geraden sind die 6 Buchstaben *A*, *D*, *M*, *O*, *R*, *T*. Ein Punkt ist mit einer Geraden verknüpft, wenn der entsprechende Geradenbuchstabe im Punktwort enthalten ist.

1. Man zeige, daß die Axiome der Gruppe I erfüllt sind.
2. Man finde einen Schnittbegriff für Geraden, sodaß auch das Parallelenaxiom IV erfüllt ist.

Übungsaufgabe A.2. Ergänzen Sie eine der Skizzen zu einem Beweis des Satzes von Pythagoras (und beweisen Sie gleich dessen Umkehrung).

Entscheidend hierbei ist: Ihr Beweis soll mathematisch korrekt sein (also logisch wasserdicht), aber trotzdem schülertauglich präsentiert.

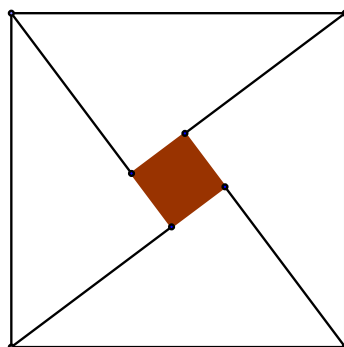
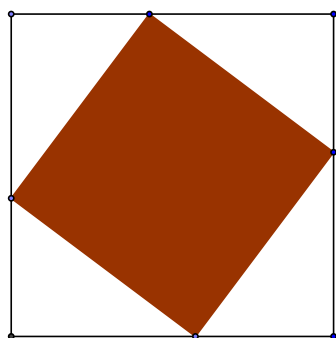


Abbildung A.1: Der Satz des Pythagoras

Übungsaufgabe A.3. Wir definieren im kartesischen \mathbb{R}^2 : eine Bewegung ist eine Abbildung der Form $x \mapsto Ax + b$, mit A als orthogonaler Matrix und $b \in \mathbb{R}^2$. Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn es eine Bewegung gibt, die das eine auf das andere abbildet.

Beweisen Sie (mit den üblichen Anforderungen), daß die Kongruenz eine Äquivalenzrelation ist, und den Kongruenzsatz WSW.

Übungsaufgabe A.4. Seien ABC und $A'B'C'$ Dreiecke in der Ebene, sodaß die Geraden AA' , BB' und CC' einander in einem Punkt der Ebene schneiden. Sei P der Schnittpunkt von AB und $A'B'$. Sei Q der Schnittpunkt von AC und $A'C'$. Sei R der Schnittpunkt von BC und $B'C'$.

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme der Vektorrechnung (mit den üblichen Anforderungen), daß P , Q , R auf einer Geraden liegen.

Bei dieser Aufgabe sei vorausgesetzt, daß alle erwähnten Schnittpunkte auch eindeutig existieren.

Übungsaufgabe A.5. Gegeben sei ein kreisförmiges Tablett, auf dem 6 kongruente zylindrische Biergläser stehen, ohne über den Rand des Tablett hinauszuragen.

Beweisen Sie, daß dann noch ein siebentes Bierglas (zu den bisherigen Gläsern kongruent) Platz auf dem Tablett hat, ohne daß auch nur ein Glas über den Rand des Tablett hinausragt.

Das Ziel ist hierbei ein mathematisch wasserdichter Beweis (also keine Formulierungen der Art „irgendwie so geht es“), der kurz, sehr gut verständlich und offensichtlich korrekt ist.

Übungsaufgabe A.6. Ein Viereck $ABCD$ heißt Tangentenviereck, wenn es einen Inkreis besitzt, also einen Kreis im Innern des Vierecks, der die Gerade AB zwischen A und B berührt, und die Gerade BC zwischen B und C , und entsprechend für die Gerade CD und die Gerade DA .

Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck.

Zeigen Sie: dieses Viereck ist ein Tangentenviereck **genau dann, wenn** für die Kantenlängen gilt: $|AB| + |CD| = |BC| + |DA|$.

Übungsaufgabe A.7. Gegeben seien zwei Kreise ω_1 und ω_2 (mit positiven Radien) in der Ebene. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal alle Geraden, die Tangenten an ω_1 und ω_2 sind. Zeigen Sie, daß alle möglichen Lagebeziehungen berücksichtigt wurden.

Übungsaufgabe A.8. Sei ABC ein Dreieck. Der Inkreis berühre die Kante \overline{BC} im Punkte P , und der an der Kante \overline{BC} anliegende Ankreis des Dreiecks berühre die Kante \overline{BC} in Q .

Zeigen Sie, daß dann $|BP| = |QC|$.

Übungsaufgabe A.9. (10. Mathematik-Olympiade 1970/71, Klassenstufe 8, Bezirksrunde)

Zeigen Sie für jedes spitzwinklige Dreieck: die Höhen sind die Winkelhalbierenden des Höhenfußpunktdreiecks.

Als Folgerung schieben wir gleich hinterher:

Übungsaufgabe A.10. (35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klassenstufe 10, Landesrunde)

Beweisen Sie, daß in jedem spitzwinkligen Dreieck ABC der Höhenschnittpunkt H von allen drei Seiten des Dreiecks DEF gleich große Abstände hat, wobei D , E , F die Fußpunkte der Höhen sind.

Der Versuch, die folgende Extremalaufgabe mit den Methoden der Differentialrechnung zu lösen, führt höchstwahrscheinlich nirgendwohin.

Übungsaufgabe A.11. (Problem von Fagnano (1682–1766))

Schreibe einem spitzwinkligen Dreieck ABC ein Dreieck UVW mit möglichst kleinem Umfang ein (hierbei sollen U , V , W auf jeweils einer Dreiecksseite liegen).

Übungsaufgabe A.12. Zeigen Sie: in jedem Dreieck schneiden die Mittelsenkrechten die Winkelhalbierenden der ihnen gegenüberliegenden Winkel auf dem Umkreis.

Übungsaufgabe A.13. Zeigen Sie: spiegelt man den Höhenschnittpunkt an einer Dreiecksseite, so erhält man einen Punkt auf dem Umkreis.

Übungsaufgabe A.14. Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis ein Höhenfußpunkt die Kante teilt, auf der er liegt.

Übungsaufgabe A.15. Zeigen Sie für jedes Dreieck: wenn man die Verbindungsgerade zwischen Umkreismittelpunkt und einer Ecke an der durch diese Ecke verlaufenden Winkelhalbierenden spiegelt, dann erhält man eine Höhe des Dreiecks.

Übungsaufgabe A.16. Es sei H der Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$. Durch Spiegelung an einem Kreis mit Mittelpunkt H mögen die Punkte A, B, C abgebildet werden auf A', B', C' .

Zeige, daß H der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ ist.

Übungsaufgabe A.17. Gegeben seien zwei Punkte und eine Gerade. Konstruieren Sie (ohne die Spiegelung am Kreis zu bemühen) einen Kreis, der durch jeden der beiden Punkte verläuft und der die Gerade berührt.

Übungsaufgabe A.18. Gegeben seien zwei Geraden und ein Punkt. Konstruieren Sie (ohne die Spiegelung am Kreis zu bemühen) einen Kreis, der jede der beiden Geraden berührt und der durch den Punkt verläuft.

Übungsaufgabe A.19. Für ein konvexes Polyeder wollen wir unter dem Defektwinkel einer Ecke X denjenigen Winkel verstehen, der sich ergibt, wenn man die Summe aller Flächeninnenwinkel mit Scheitelpunkt X von 360° abzieht (bei einem Quader hat jede Ecke also einen Defektwinkel von 90°).

Zeigen Sie, daß dann die Summe der Defektwinkel aller Ecken stets 720° beträgt.

Übungsaufgabe A.20. Zeigen Sie auf exakte Weise (z.B. mittels analytischer Geometrie), daß die angedeuteten Konstruktionen von Ikosaeder und Dodekaeder tatsächlich durchführbar sind.

Übungsaufgabe A.21. Wenn wir die Flächenmittelpunkte eines platonischen Körpers als Ecken eines neuen Polyeders wählen, erhalten wir einen dualen platonischen Körper. Ermitteln Sie, wer zu wem dual ist, und beweisen Sie, daß diese Konstruktion tatsächlich funktioniert.

Übungsaufgabe A.22. Zeigen Sie für konvexe Polyeder:

Wenn das Polyeder keine Vierecksflächen und keine Fünfecksflächen besitzt, dann hat es mindestens vier Dreiecksflächen.

Wenn das Polyeder keine vierwertigen Ecken und keine fünfwertigen Ecken besitzt, dann hat es mindestens vier dreiwertige Ecken.

Wenn das Polyeder keine Dreiecksflächen und keine Fünfecksflächen besitzt, dann hat es mindestens sechs Vierecksflächen.

Wenn das Polyeder keine dreiwertigen Ecken und keine fünfwertigen Ecken besitzt, dann hat es mindestens sechs vierwertige Ecken.

Wenn das Polyeder keine Dreiecksflächen und keine Vierecksflächen besitzt, dann hat es mindestens zwölf Fünfecksflächen.

Wenn das Polyeder keine dreiwertigen Ecken und keine vierwertigen Ecken besitzt, dann hat es mindestens zwölf fünfwertige Ecken.

Übungsaufgabe A.23. Die Seitenflächen eines konvexen Polyeders seien Quadrate oder regelmäßige Sechsecke. Wieviele Quadrate muß es haben? Wieviele Sechsecke kann es höchstens geben?

Übungsaufgabe A.24. Für welche natürlichen Zahlen K gibt es ein konvexes Polyeder mit genau K Kanten?

Übungsaufgabe A.25. Wir definieren: eine h -Gerade g steht h -senkrecht auf einer h -Geraden k wenn $PS_g(k) = k$. Zeigen Sie: diese Relation ist symmetrisch. Hinweis: Dualitätsprinzip

Übungsaufgabe A.26. Man konstruiere ein h -gleichseitiges h -Dreieck, das nicht euklidisch gleichseitig ist.

Quellennachweis der Abbildungen

Abbildung 4: Frontispiz von [6]

Abbildung 3.1: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSections_ajl.svg abgerufen am 13.11.2010. Autor: Egm6322.s09.lapetina (public domain)

Abbildung 3.3: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSection_ellipse.PNG abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Abbildung 3.5: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSection_foci.png abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Abbildung 3.6: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSection_hyperbola.PNG abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Abbildung 3.8: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSection_foci2.png abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Abbildung 3.9: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConicSection_parabola.PNG abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Abbildung 3.11: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Focus_and_Directrix2.png abgerufen am 13.11.2010. Autor: ja.wiki user Tsukapee (public domain)

Alle anderen sind entweder handgemalt oder mit geogebra und gimp erstellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Richard Bamler and Christian Reiher. *Ein-Blick in die Mathematik*. Aulis Verlag Deubner, 2005.
- [2] Albrecht Beutelspacher and Ute Rosenbaum. *Projektive Geometrie. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen*. Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik. Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2. edition, 2004.
- [3] Günter Buchmann. *Nichteuklidische Elementargeometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1975. Einführung in ein Modell, Mathematik für die Lehrerausbildung.
- [4] Emil Donath. *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*. Number 44 in Mathematische Schülerbücherei. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976.
- [5] Heinrich Dörrie. *100 great problems of elementary mathematics*. Dover Publications Inc., New York, 1982. Their history and solution, Reprint of the 1965 edition, Translated from the fifth edition of the German original by David Antin.
- [6] Euklid. *Eukleidou ta sozomena. Euclidis Quae Supersunt Omnia*. Oxford, Sheldonian Theatre, 1703. griechisch und lateinisch. rezensiert von David Gregory.
- [7] Euklid. *Die Elemente. Teil I*, volume 235 of *Ostwalds Klassiker der Exakten Wissenschaften*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1984. Buch I–III. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer, Reprint nach der 1. Auflage 1933.
- [8] Heinrich W. Guggenheimer. *Plane geometry and its groups*. Holden-Day Inc., San Francisco, Calif., 1967.
- [9] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1972. Mit Supplementen von Paul Bernays, Elfte Auflage, Teubner Studienbücher: Mathematik.
- [10] Jan P. Hogendijk. al-Mu'taman ibn Hūd, 11th century king of Saragossa and brilliant mathematician. *Historia Math.*, 22(1):1–18, 1995.
- [11] B. Klotzek and E. Quaisser. *Nichteuklidische Geometrie*, volume 17 of *Mathematik für Lehrer*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978. Eine Einführung, Studienbücherei.
- [12] Derrick Norman Lehmer. *An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry*. Boston, New York: Ginn and Company, 1917. Online verfügbar als Gutenberg eText unter <http://www.gutenberg.org/ebooks/17001>.
- [13] George Polya. *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke Verlag, 1980.
- [14] August Rode (Übersetzer). *Des Marcus Vitruvius Pollio Baukunst*. Leipzig, 1796.
- [15] Tiberiu Roman. *Reguläre und halbrekuläre Polyeder*. Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik, Band 21. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [16] Harald Scheid and Wolfgang Schwarz. *Elemente der Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 4. edition, 2009.
- [17] Eckard Specht and Robert Strich. *geometria — scientiae atlantis 1*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2009.

- [18] Jan van Yzeren. A simple proof of Pascal's hexagon theorem. *Amer. Math. Monthly*, 100(10):930–931, 1993.
- [19] Heinrich Winter. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61:37–46, 1996.