Ungleichungen

Michael Dreher

JuMa–Seminar Juni 2016

1 Bekannte Techniken

Im JuMa–Training der Klassen 9/10 gab es bereits Arbeitsmaterial zu Ungleichungen, auf dem wir jetzt aufbauen wollen. Trotzdem wollen wir uns in diesem ersten Kapitel die damals erarbeiteten Ergebnisse nochmal auflisten, bevor wir uns dann fortgeschrittene Techniken anschauen.

Beim Lesen wird Dir auffallen, daß einige Ungleichungen mit verschiedenen Methoden behandelt werden sollen; das ist didaktische Absicht.

1.1 Die Mutter aller Ungleichungen: $T^2 \geq 0$

Diese Ungleichung kennen wir alle: wenn T ein reellwertiger Term ist, dann ist $T^2 \geq 0$, und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $T = 0$ ist.

Typische Erscheinungsformen dieser Ungleichung sind:

$$\begin{aligned}
&|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \\
&1 + a^2 \geq 2a, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}, \\
&x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad \forall\, x > 0.
\end{aligned}$$

Und damit kann man schon einiges anstellen:

Aufgabe 1.1. [1] *Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist zu zeigen, daß $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.*

Lösung:

Jeden Summanden der rechten Seite können wir nach oben abschätzen nach dem Schema $ab \leq (a^2 + b^2)/2$. Addition der entstehenden drei Ungleichungen liefert die Behauptung.

An dieser Stelle haben wir eine weitere Technik verwendet, die sehr leistungsstark sein kann: wir haben uns nicht die gesamte rechte Seite als Ganzes angeschaut, sondern erst mal nur einen Summanden davon, nämlich ab. Der Vorteil ist, daß dieser nur aus zwei Variablen besteht (a und b, aber nicht c), was übersichtlicher und einfacher zu handhaben ist. Die anderen Summanden auf der rechten Seite behandelt man sinngemäß genauso, und am Schluß addiert man auf. Diese Methode kommt so häufig vor, daß sie einen eigenen Namen verdient: ***divide et impera***, oder auf deutsch **teile und herrsche**[2]. Wir fassen die eben genutzte Strategie zusammen:

- suche den kompliziertesten Term der Ungleichung (gemischte Produkte sind komplizierter als reine Quadrate), also ab oder bc oder ca;
- versuche daraus die einfacheren Terme zu erreichen, also $ab \leq (a^2 + b^2)/2$;
- ggf. behandle man die entsprechend anderen Terme genauso.

Mit diesen drei Techniken kann man auch folgende Aufgaben behandeln:

[1] Siehe auch Aufgabe 1.17 für eine Folgerung hieraus.

[2] man unterteile seine zahlreiche Gegnerschaft in viele kleine Gruppen, isoliere diese voneinander und beherrsche sie einzeln

Aufgabe 1.2. *Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab, \qquad \forall a, b, c > 0,$$

und untersuche, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.3. *Man zeige*

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{abc}, \qquad \forall a, b, c > 0$$

und ermittle, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.4. *Für alle $x, y, z > 0$ ist zu zeigen, daß*

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z},$$

und zu untersuchen, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.5. *Für alle $x, y, z > 0$ ist zu zeigen, daß*

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z,$$

und zu untersuchen, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.6. *Für $a, b, c > 0$ mit $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$ zeige man $abc \leq 1$. Wann gilt das Gleichheitszeichen ?*

Aufgabe 1.7.

Es ist zu beweisen, daß für die Seiten a, b, c eines Dreiecks gilt:

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Wann tritt Gleichheit ein ?

Aufgabe 1.8. *Für positive reelle Zahlen a, b, c, d ist zu zeigen, daß*

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}},$$
$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}},$$

und es ist zu untersuchen, wann Gleichheit eintritt.

Wir beschließen die einführenden Betrachtungen zur Ungleichung $T^2 \geq 0$ mit einer kleinen Spielerei, deren Ergebnis gelegentlich nützlich ist. Außerdem üben wir den Umgang mit Doppelsummen.

Seien x_1, x_2, $\ldots$, x_n beliebige reelle Zahlen. Dann haben wir offenkundig

$$0 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2,$$

und jetzt wollen wir damit arbeiten. Die Summe wird zu

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}\left(x_j^2+x_i^2-2x_jx_i\right) &= (n-1)\sum_{k=1}^n x_k^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} x_jx_i \\
&= n\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{\substack{1\le i,j\le n,\\ i\ne j}} x_ix_j \\
&= n\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{\substack{1\le i,j\le n,\\ i=j}} x_ix_j - \sum_{\substack{1\le i,j\le n,\\ i\ne j}} x_ix_j \\
&= n\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1\le i,j\le n} x_ix_j = n\sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right).
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt das arithmetische Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ als A bezeichnen und das quadratische Mittel als Q, dann folgt

$$Q^2 - A^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2.$$

Die Kenntnis dieses Zusammenhangs zwischen Q und A wäre bei der **MEMO 2010** nützlich gewesen:

Aufgabe 1.9. *Für jede ganze Zahl $n \ge 2$ bestimme man die größte reelle Konstante C_n, sodaß für alle positiven rellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:*

$$\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n} \ge \left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2 + C_n\cdot(a_1-a_n)^2.$$

Nach diesen ersten Aufgaben schauen wir uns einige bedeutsame Folgerungen aus $T^2 \ge 0$ an:

1.2 Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Satz 1.1 (**Ungleichung von Cauchy–Schwarz**). *Für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ parallel bzw. antiparallel sind.

Beweis. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$0 \le \sum_{j=1}^n (a_j-\lambda b_j)^2.$$

Die rechte Seite schreibt man in der Form $P(\lambda) = \gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2$, wobei

$$\gamma_0 := \sum_{j=1}^n a_j^2, \qquad \gamma_1 := -2\sum_{j=1}^n a_jb_j, \qquad \gamma_2 := \sum_{j=1}^n b_j^2.$$

Wir halten die a_j und b_j fest, und wir lassen λ durch ganz $\mathbb{R}$ laufen. Wir dürfen $\gamma_2 > 0$ annehmen, weil ansonsten alle $b_j = 0$ werden und dann die zu beweisende Ungleichung zu $0 \leq 0$ zusammenschrumpft. Wir beobachten, daß dieses quadratische Polynom P niemals negative Werte hat. Also hat P höchstens eine reelle Nullstelle. Die relevante Diskriminantenbedingung zu

$$\frac{P(\lambda)}{\gamma_2} = \lambda^2 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\lambda + \frac{\gamma_0}{\gamma_2}$$

ist aber

$$D = \left(\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right)^2 - \frac{\gamma_0}{\gamma_2} \overset{!}{\leq} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\gamma_1}{2}\right)^2 \overset{!}{\leq} \gamma_0\gamma_2,$$

was äquivalent zur Ungleichung von Cauchy–Schwarz ist. □

Eine allererste Anwendung der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ist diese:

Aufgabe 1.10. *Für positive $a_1, \ldots, a_n$ zeige man*

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_j^{-1}\right) \geq n^2.$$

Wann gilt Gleichheit ?

In den Anwendungen hat man gelegentlich die folgende Variante der Cauchy–Schwarz–Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2}{\sum_{j=1}^n b_j^2}, \qquad (b_1, \ldots, b_n) \neq (0, \ldots, 0).$$

Umgangssprachlich heißt dieser Trick manchmal *Cauchy–Schwarz nach unten*, denn häufig besteht die Aufgabe darin, eine Summe nach unten abzuschätzen, von der jeder Summand ≥ 0 ist. Dann ergeben sich die a_j als Wurzeln aus diesen Summanden. Die b_j kann man frei wählen (hierbei braucht man evtl. Phantasie, wie in den folgenden Aufgabe zu ersehen).

Aufgabe 1.11. *Für positive reelle Zahlen x, y, z ist zu zeigen, daß*

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq \frac{36}{x+y+z}.$$

Lösung:

Wir setzen $a_1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a_2 = \frac{2}{\sqrt{y}}$, $a_3 = \frac{3}{\sqrt{z}}$, sowie $b_1 = \sqrt{x}$, $b_2 = \sqrt{y}$, $b_3 = \sqrt{z}$, woraus sich dann mittels der Cauchy–Schwarz–Ungleichung ergibt, daß

$$\sum_j a_j^2 \geq \frac{\left(\sum_j a_j b_j\right)^2}{\sum_j b_j^2},$$

was für unsere Wahl der a_j und b_j bedeutet, daß

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq \frac{(1+2+3)^2}{x+y+z}.$$

Aufgabe 1.12. *Für positive reelle Zahlen x, y, z ist zu zeigen, daß*

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Aufgabe 1.13. *Für positive x, y, z soll gezeigt werden, daß*

$$zx^3 + xy^3 + yz^3 \geq xyz(x+y+z).$$

Aufgabe 1.14. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man zeige*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Hinweis: evtl. braucht man zusätzlich noch Mittelungleichungen für den Lösungsweg.

Eine schöne Folgerung ist der folgende Satz, der nichts anderes besagt, als daß im $\mathbb{R}^n$ die Dreiecksungleichung gilt:

Satz 1.2 (Minkowski–Ungleichung). *Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2 + \cdots + (a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(a_1, \dots, a_n)$ und $(b_1, \dots, b_n)$ parallel sind.

Beweisidee. Die beiden Ungleichungsseiten sind nichtnegativ, also ist Quadrieren eine äquivalente Umformung. Die sich dann ergebende Ungleichung beweist man schnell mit der Ungleichung von Cauchy–Schwarz. □

1.3 Weitere Verfeinerungen der Cauchy–Schwarz–Ungleichung

Wir stellen uns vor, daß wir damit beschäftigt sind, eine komplizerte Ungleichung zu zeigen, wo viele Summanden auftreten, und insbesondere auf der kleineren Seite ein ab, das wir behutsam nach oben abschätzen wollen. Da könnten wir zum Beispiel die Formel $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ verwenden, und dann würden wir diese erhaltene größere Ungleichungsseite wiederum (und die sonstigen Terme, die wir jetzt nicht hingeschrieben haben) weiter nach oben abschätzen, wobei wir aber die endgültige größere Seite nicht überschreiten dürfen. Auf alle Fälle haben wir uns nun ein $a^2/2$ und ein $b^2/2$ eingehandelt, mit denen wir fertig werden müssen.

Nun kann es aber sein, daß ein a^2 „teurer“ ist als ein b^2, und daß wir also Terme mit a^2 nur sparsam erzeugen dürfen. In einer solchen Situation kann man vielleicht hantieren wie folgt:

$$ab = \left(\frac{1}{4}a\right) \cdot (4b) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{1}{2}(4b)^2 = \frac{a^2}{32} + 8b^2,$$

und schon hat man weniger a^2 erzeugt, muß dafür aber mit mehr Anteilen b^2 bezahlen. Anstelle der Vier kann man natürlich auch etwas anderes nehmen.

Etwas tieferliegend ist folgendes Ergebnis:

Satz 1.3 (**Young'sche Ungleichung**). *Seien* $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *sowie* $1 < p, q < \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Dann ist*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Für $p = q = 2$ erhalten wir gerade $ab \leq (a^2 + b^2)/2$. Zum Beweis für allgemeine p, q könnte man das Minimum der Funktion $a \mapsto \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}(P/a)^q$ mit Methoden der Differentialrechnung suchen, wenn a variiert. Hierbei steht P für das Produkt von a und b, und P soll unbeweglich bleiben. Für rationale p und q kann man auch mit AGM argumentieren.

Noch allgemeiner haben wir für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$:

$$|a_1 \cdot \ldots \cdot a_n| \leq \frac{1}{p_1}|a_1|^{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n}|a_n|^{p_n}, \quad 1 < p_1, \ldots, p_n < \infty, \quad \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Der Beweis folgt aus der Young–Ungleichung mit 2 Faktoren durch (trickreiche) Induktion über n.

Diese Arbeitstechnik sollte man einige Male selbst verwendet haben:

Aufgabe 1.15. *Man zeige, daß*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \qquad \forall a, b, c > 0,$$

und untersuche, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.16. *Für positive* x, y, z *ist zu zeigen, daß*

$$x^2yz \leq \frac{2}{7}xy^3 + \frac{1}{7}yz^3 + \frac{4}{7}zx^3.$$

Die Young–Ungleichung kann man sich merken als „p-q–Version" von $ab \leq (a^2 + b^2)/2$. Und genauso kann man sich die folgende Hölder–Ungleichung als eine „p-q–Version" der Cauchy–Schwarz–Ungleichung vorstellen:

Satz 1.4 (**Hölder–Ungleichung**). *Für nichtnegative reelle Zahlen* $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ *sowie* $1 < p, q < \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{1/q},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn die Vektoren $(a_1^p, \ldots, a_n^p)$ *und* $(b_1^q, \ldots, b_n^q)$ *parallel sind.*

1.4 Mittelungleichungen

Wie schon aus dem Studienbrief zu Ungleichungen aus dem JuMa-Jahrgang 9/10 bekannt, können wir für positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ die folgenden Mittel definieren:

$$H := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \qquad \text{das harmonische Mittel,}$$

$$G := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \qquad \text{das geometrische Mittel,}$$

$$A := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad \text{das arithmetische Mittel,}$$

$$Q := \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \qquad \text{das quadratische Mittel,}$$

und es gilt $H \leq G \leq A \leq Q$, mit Gleichheit genau für den Fall $x_1 = \ldots = x_n$.

Allgemeiner setzen wir

$$M(r) := \left(\frac{x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r}{n} \right)^{1/r}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad r \neq 0,$$

und dann ist $H = M(-1)$, $G = \lim_{r \to 0} M(r)$ (was wir leider nicht beweisen können mit unseren Methoden), $A = M(1)$ sowie $Q = M(2)$. Weiterhin ist $\max(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{r \to +\infty} M(r)$ und $\min(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{r \to -\infty} M(r)$. Die obige Ungleichung $H \leq G \leq A \leq Q$ zwischen den vier Mitteln läßt sich dann vielleicht am besten merken in der Form

$$M(r) \leq M(s), \qquad s, r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad r < s,$$

mit Gleichheit genau für den Fall, daß $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Übrigens ist die Ungleichung $G \leq A$ für den Fall $n = 2$ direkt äquivalent zur Mutter aller Ungleichungen.

Die folgenden Aufgaben kann man knacken mit den genannten Mittelungleichungen, vorwiegend zwischen H, G, A und Q.

Aufgabe 1.17. *Seien x, y, z positive Zahlen mit $x + y + z = 1$. Man zeige die Ungleichung*

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 1$$

und untersuche, wann Gleichheit auftritt.

Aufgabe 1.18. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen. Man beweise, daß dann*

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0$$

gilt. Wann tritt der Gleichheitsfall ein ?

Aufgabe 1.19. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung*

$$\left(a + \frac{1}{b} \right) \left(b + \frac{1}{c} \right) \left(c + \frac{1}{a} \right) \geq 8$$

und untersuche auf Gleichheit.

Das Ausmultiplizieren der Klammern ist nicht zu empfehlen (genausowenig wie bei der nächsten Aufgabe das Hochmultiplizieren aller Nenner).

Aufgabe 1.20. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Zeige die Ungleichung*

$$\frac{ab}{a + b + 2c} + \frac{bc}{b + c + 2a} + \frac{ca}{c + a + 2b} \leq \frac{a + b + c}{4}.$$

Aufgabe 1.21. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$. Man zeige dann*

$$xy + yz + zx \geq 9xyz.$$

Aufgabe 1.22. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. *Dann beweise man*

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 1.23. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Zeige die Ungleichung*

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 3\sqrt{2}.$$

Aufgabe 1.24. *Seien x, y, z positive rationale Zahlen mit* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. *Beweise die Ungleichung*

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8.$$

Aufgabe 1.25. *Seien x, y, z positive Zahlen mit* $x + y + z = 1$. *Beweise die Ungleichung*

$$\frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2.$$

Aufgabe 1.26. *Seien x, y, z positive reelle Zahlen mit* $xyz = 1$. *Man zeige die Ungleichung*

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \geq 2.$$

Aufgabe 1.27. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man zeige*

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)} \leq \frac{1}{81}.$$

Aufgabe 1.28. *Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen mit* $a + b + c + d = 4$. *Man beweise dann*

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2.$$

Und bei den folgenden Aufgaben können auch allgemeinere Mittel $M(r)$ eine Rolle spielen.

Aufgabe 1.29. *Für positive* $a_1, \ldots, a_n$ *zeige man*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^{-1}\right) \geq n^2.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Aufgabe 1.30. *Man zeige, daß*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a, \qquad \forall a, b, c > 0,$$

und untersuche, wann Gleichheit gilt.

Aufgabe 1.31. *Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab, \qquad \forall a, b, c > 0.$$

Aufgabe 1.32. *Für positive x, y, z ist zu zeigen, daß*

$$x^2yz \le \frac{2}{7}xy^3 + \frac{1}{7}yz^3 + \frac{4}{7}zx^3.$$

Aufgabe 1.33. *Für $a, b, c > 0$ mit $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ zeige man $abc \le 1$.*

Aufgabe 1.34. *Für positive reelle Zahlen a, b, c, d ist zu zeigen, daß*

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \ge \sqrt[3]{abc},$$
$$\sqrt[3]{\frac{bcd+acd+abd+abc}{4}} \ge \sqrt[4]{abcd}.$$

Aufgabe 1.35. *Für positive Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ zeige man*

$$\frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{z^2}{1-z} \ge \frac{1}{2}.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Nach all diesen Aufgaben wollen wir noch im Sinne eines mathematischen Zeitvertreibs mit der Hölder–Ungleichung und den Mittelungleichungen herumspielen: seien $0 < r < s < t$, die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ seien positiv, und $M(r) = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^r)^{1/r}$ sei das allgemein bekannte mathematische Potenzmittel. Die Zahl s liegt zwischen r und t, also ist der Gedanke an **baryzentrische Koordinaten** naheliegend, und man bekommt:

$$s = \frac{s-r}{t-r} \cdot t + \frac{t-s}{t-r} \cdot r.$$

Die Faktoren vor t und vor r addieren sich genau zu eins; genauso, wie man es von baryzentrischen Koordinaten gewohnt ist. Wir setzen nun

$$p := \frac{t-r}{s-r}, \qquad q := \frac{t-r}{t-s}.$$

Dann ist tatsächlich $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $s = \frac{t}{p} + \frac{r}{q}$. Aus der Hölder–Ungleichung erhalten wir dann

$$\begin{aligned}(M(s))^s &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^s = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left(x_j^{\frac{t}{p}} \cdot x_j^{\frac{r}{q}}\right) \\ &\le \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n x_j^t\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j^r\right)^{1/q} = \left((M(t))^t\right)^{\frac{s-r}{t-r}} \cdot \left((M(r))^r\right)^{\frac{t-s}{t-r}}.\end{aligned}$$

Wir beobachten, daß die Exponenten sich genau zu eins addieren. Man sagt auch, daß die Potenzmittelfunktion $s \mapsto (M(s))^s$ *logarithmisch konvex* ist, und damit meint man, daß die Funktion $s \mapsto \ln(M(s))^s$ konvex ist (zur Erinnerung: eine stetige Funktion heißt konvex, wenn ihr Graph überall unter der eigenen Sehne verläuft).

1.5 Umordnung und die Ungleichung von Tschebyscheff

Im JuMa–Brief zu Ungleichungen der Klasse 9/10 hatten wir uns schon mal mit dem Umordnungssatz beschäftigt:

Satz 1.5 (**Umordnung, Re-Arrangement**). *Seien reelle Zahlen* $a_1, \dots, a_n$ *sowie* $b_1, \dots, b_n$ *gegeben mit* $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$ *sowie* $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$*. Sei weiterhin* $\beta_1, \dots, \beta_n$ *eine Permutation der* $b_1, \dots, b_n$*. Dann ist*

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \ge a_1 \beta_1 + \dots + a_n \beta_n.$$

Beweisidee. Induktion über n. Stelle die Permutation als Abfolge von Zweiervertauschungen dar. □

Interpretation: Mit a_j benennen wir den Wert von Geldscheinen der Sorte j, z.B. $a_1 = 5$ Euro, $a_2 = 10$ Euro (usw.), und sei β_j die Anzahl der genommenen Geldscheine der Sorte j.

Oder wir betrachten einen Arm einer Wippe, der mehrere Sitze hat. Mit $a_j \ge 0$ bezeichnen wir den Abstand eines Sitzes von der Drehachse, und mit $\beta_j \ge 0$ die Masse der Person j. Dann erhält man einleuchtenderweise das größte Drehmoment, wenn die schwerste Person am weitesten hinten sitzt usw.

Übungsaufgabe: wie muß man permutieren, damit die Summe $a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n$ kleinstmöglich wird ?

Satz 1.6 (**Ungleichung von Tschebyscheff**). *Seien* $a_1, \dots, a_n$ *und* $b_1, \dots, b_n$ *gleichgeordnete Familien von reellen Zahlen. Dann ist*

$$\frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n} \ge \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$

Beweisidee. Man wende immer wieder das Umordnungsprinzip an. □

Wir verallgemeinern das Umordnungsprinzip auf 3 Folgen $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$ und $(c_1, \dots, c_n)$. Als entscheidenden Unterschied haben wir jetzt allerdings, daß keines der a_j, b_j, c_j negativ sein darf.

Satz 1.7 (**Umordnung für** 3 **Folgen**). *Seien nichtnegative reelle Zahlen* $a_1, \dots, a_n$ *sowie* $b_1, \dots, b_n$ *sowie* $c_1, \dots, c_n$ *gegeben mit*

$$\begin{aligned} 0 &\le a_1 \le \ldots \le a_n, \\ 0 &\le b_1 \le \ldots \le b_n, \\ 0 &\le c_1 \le \ldots \le c_n. \end{aligned}$$

Sei weiterhin $\beta_1, \dots, \beta_n$ *eine Permutation der* $b_1, \dots, b_n$*, und sei* $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ *eine Permutation der* $c_1, \dots, c_n$*. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j c_j \ge \sum_{j=1}^n a_j \beta_j \gamma_j.$$

Beweis. Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, die b_j zu permutieren, und es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, die c_j zu permutieren. Ein Paar (mindestens) von diesen Permutationen führt auf den maximal möglichen Wert für die Summe $\sum_j a_j \beta_j \gamma_j$. Diese Permutationen seien bezeichnet mit $(\beta_1^*, \dots, \beta_n^*)$ und

$(\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*)$. Nach Satz 1.5 sind dann die Folgen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $((\beta_1^*\gamma_1^*), \ldots, (\beta_n^*\gamma_n^*))$ gleichgeordnet:

$$\beta_j^*\gamma_j^* \leq \beta_{j+1}^*\gamma_{j+1}^*, \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Weil alle anwesenden Zahlen nichtnegativ sind, kann es nicht sein, daß (für ein festes j) $\beta_j^* > \beta_{j+1}^*$ und $\gamma_j^* > \gamma_{j+1}^*$ gilt. Sei also oBdA $\beta_j^* \leq \beta_{j+1}^*$. Dann ist die zweigliedrige Folge $((a_j\beta_j^*), (a_{j+1}\beta_{j+1}^*))$ aufsteigend geordnet, also muß die zweigliedrige Folge $(\gamma_j^*, \gamma_{j+1}^*)$ genauso geordnet sein, sonst könnte man durch Vertauschen von γ_j^* und γ_{j+1}^* einen größeren Wert für die Summe $\sum_j a_j\beta_j\gamma_j$ verwirklichen. Also gilt $\beta_j^* \leq \beta_{j+1}^*$ und $\gamma_j^* \leq \gamma_{j+1}^*$, und zwar für jedes $j = 1, \ldots, n-1$. $\square$

Aufgabe 1.36. *Seien a, b, c und α, β, γ die Seiten und Winkel eines Dreiecks. Es ist zu zeigen, daß*

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Aufgabe 1.37 (vgl. Aufgabe 1.3). *Für positive a, b, c ist zu zeigen, daß*

$$\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{a^2c} + \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{b^2a} + \frac{1}{c^2a} + \frac{1}{c^2b} \geq \frac{6}{abc}.$$

Aufgabe 1.38. *Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:*

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab, \qquad \forall a, b, c > 0.$$

Aufgabe 1.39. *Für alle positiven a, b, c, d zeige man*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} + \frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} + \frac{c^3+d^3+a^3}{c+d+a} + \frac{d^3+a^3+b^3}{d+a+b} \geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Aufgabe 1.40. *Für alle x, y, $z > 0$ ist zu zeigen, daß*

$$x + y + z \leq \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}.$$

Die folgende Aufgabe ist ein Beispiel dafür, daß man gelegentlich die einzelnen Summanden der Summe $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ erst mal finden muß:

Aufgabe 1.41. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man zeige*

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit ?

2 Fortgeschrittene Methoden

2.1 Heuristiken

Wir stellen uns vor, eine Ungleichung $T(a_1, \ldots, a_n) \geq 0$ sei zu zeigen, wobei T irgendein Term sei. Im Folgenden wollen wir einige Strategien vorstellen, die hilfreich sein könnten.

Produktstruktur herstellen: Vielleicht folgt die Ungleichung $T \geq 0$ ja aus einer Ungleichung $T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_k \geq 0$. Dann braucht man nur noch die Vorzeichen der Terme T_j untersuchen. Natürlich sollten die Terme T_j „einfacher“ sein als T, sonst hat man nicht viel gekonnt.

Als Beispiel zeige man $(1+a+a^2)^2 \leq 3(1+a^2+a^4)$ für alle reellen a. Der Term $(a-1)(a^3-1)$ könnte nützlich sein.

Oder man zeige für alle reellen $x \neq 0$, daß

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} > 0.$$

Interessante Faktoren findet man schnell, wenn man sich fragt, wo denn $T = 0$ wird. Sei zum Beispiel $3a^4 - 4a^3b + b^4 \geq 0$ zu zeigen. Scharfes Hinschauen sagt einem, daß die linke Seite Null wird für $a = b$. Also klammert man $(a-b)$ aus, und anschließend nochmal, sodaß man $3a^4 - 4a^3b + b^4 = (3a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2$ bekommt.

Symmetrie: Wenn der Term $T(a_1, \ldots, a_n)$ sich nicht ändert unter beliebigen Zweiervertauschungen der $(a_1, \ldots, a_n)$, dann kann man $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ annehmen.

Als Beispiel wollen wir die Ungleichung

$$(a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) \geq 0$$

zeigen, für $a, b, c \geq 0$.

Wir können $a \geq b \geq c \geq 0$ voraussetzen. Wir erahnen an einigen Stellen einen Faktor $(a-b)$, der aber ≥ 0 ist. Also sollten wir vielleicht wenigstens teilweise **Produktstruktur** herstellen:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) \overset{?}{\geq} 0,\\
\iff &(a-b)^2(a+b-c) - (b-c)^2(a-b-c) + (c-a)^2(a-b+c) \overset{?}{\geq} 0,\\
\iff &(a-b)^2(a+b-c) + (a-b)\left(-(b-c)^2 + (c-a)^2\right) + c\left((b-c)^2 + (c-a)^2\right) \overset{?}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Und schon sind auf der linken Seite alle Summanden ≥ 0.

Zyklische Symmetrie: Wenn T sich nicht ändert unter einer zyklischen Vertauschung $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_n \to a_1$, dann kann man annehmen, daß a_1 das größte (bzw. kleinste) Element der $a_1, \ldots, a_n$ ist.

Homogene Ungleichungen: Sei T ein Term, der (positiv) homogen vom Grad $r \in \mathbb{R}$ ist, das heißt: bei zentrischer Streckung der $(a_1, \ldots, a_n)$ um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ändert sich T genau um den Faktor λ^r:

$$T(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) = \lambda^r T(a_1, a_2, \ldots, a_n), \qquad \forall \lambda > 0.$$

Wenn dann $T \geq 0$ zu zeigen ist, kann man manchmal mit einem Faktor λ strecken, bis eine von uns wünschbare Zusatzbedingung erfüllt ist. Diese könnte z.B. lauten $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ oder $a_1 = 1$ oder $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Auf diesem Wege haben wir eine Voraussetzung mehr zur Verfügung (oder wir können eine Variable rauswerfen).

Sei z.B.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}}, \qquad \forall a, b > 0$$

zu zeigen. Wir stellen Homogenität der Ordnung 1 fest. Wegen $b > 0$ können wir mit $\lambda = \frac{1}{b} > 0$ skalieren, oder einfach gleich $b = 1$ annehmen. Wir schreiben weiterhin $a = x^2$, was wegen $a > 0$ möglich ist. Dann brauchen wir nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{x^2+1}{2} - x - \frac{(x-1)^2}{x+\frac{1}{x}} \geq 0, \qquad \forall x > 0$$

ist. Der Vorteil: es ist jetzt eine Variable weniger. Jetzt bringt man alles auf einen Nenner und erfreut sich an einer unerwarteten **Produktstruktur**.

Als ein weiteres Beispiel schauen wir uns die Ungleichung

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

an, die für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ gezeigt werden soll. Wir formulieren sie um zu

$$\frac{x^2}{(x+y+z)-x} + \frac{y^2}{(x+y+z)-y} + \frac{z^2}{(x+y+z)-z} \geq \frac{x+y+z}{2},$$

und stauchen diese Ungleichung mit dem positiven Faktor $1/(x+y+z)$:

$$\frac{\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^2}{1-\frac{x}{x+y+z}} + \frac{\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^2}{1-\frac{y}{x+y+z}} + \frac{\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2}{1-\frac{z}{x+y+z}} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}.$$

Jetzt setzen wir $a = x/(x+y+z)$, $b = y/(x+y+z)$, $c = z/(x+y+z)$ und erhalten

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2},$$

für positive a, b, c mit $a + b + c = 1$. Der Vorteil ist, daß jeder Bruch jetzt nur noch eine Variable enthält, und nicht mehr alle drei (wir kennen diese Ungleichung schon).

Nebenbedingungen einbauen:

Angenommen, es wäre zu zeigen, daß $T(a_1, \ldots a_n) \geq 3$ unter einer Nebenbedingung $N(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Dann könnte man versuchen, stattdessen $NT \geq 3$ zu zeigen, unter der Nebenbedingung $N(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Vielleicht ist der Term NT ja einfacher als T ? Oder vielleicht baut man die Nebenbedingung irgendwie anders ein ?

Als Beispiel soll gezeigt werden, daß $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2}-1$, für alle $a, b \geq 0$ mit der Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 4$ (Österreich 1989).

Wir stellen als erstes fest, daß der Nenner nicht homogen ist: die Terme a und b haben Homogenitätsordnung 1, aber die 2 hat Homogenitätsordnung 0. Aber $2 = \sqrt{4}$, sodaß wir vielleicht zeigen sollten, daß

$$\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} \geq \sqrt{2}-1, \qquad \text{wenn } a^2+b^2=4, \quad a, b > 0.$$

Immerhin ist der Nenner jetzt **homogen**. Und er schreit nach der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} &= \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{(a+b+\sqrt{a^2+b^2})(a+b-\sqrt{a^2+b^2})} \\ &= \frac{ab(a+b-\sqrt{a^2+b^2})}{(a+b)^2-(a^2+b^2)} = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a+b}{2} - 1.\end{aligned}$$

(Aufpassen: haben wir hier vielleicht mit Null erweitert ???) Wir müßten also nur zeigen, daß $a+b \leq 2\sqrt{2}$, unter der Nebenbedingung $a^2+b^2=4$ und $a,b>0$. Das sieht man entweder geometrisch, oder man quadriert (was hier erlaubt ist) und benutzt $G \leq A$. Oder man verwendet AQM.

divide et impera : Angenommen, daß wir zeigen wollen, daß $T(a,b,c) \geq 0$ gilt, wobei T symmetrisch ist. Mit Glück gelingt es uns vielleicht, das Problem zu reduzieren auf

$$T'(a,b) + T'(b,c) + T'(c,a) \overset{?}{\geq} 0,$$

wobei T' wieder ein symmetrischer Term ist (bzw. sein könnte). Dann braucht man bloß noch zu zeigen, daß $T'(p,q) \geq 0$ für alle relevanten p,q.

Vorteil: T' hat 2 Variablen, aber T hat 3. Im Allgemeinen ist T komplizierter als T'. Typische Beispiele dafür hatten wir im allerersten Abschnitt dieses Briefes.

Als weiteres Beispiel schauen wir uns die Ungleichung

$$x^2yz + y^2zx + z^2xy \leq xy^3 + yz^3 + zx^3$$

an, die für positive x,y,z gezeigt werden soll (wir kennen sie schon aus Aufgabe 1.13 unter dem Stichwort „Cauchy–Schwarz nach unten"). Ein scharfer Blick zeigt, daß es zu zeigen reicht, daß

$$\begin{aligned}x^2yz &\leq \frac{2}{7}xy^3 + \frac{1}{7}yz^3 + \frac{4}{7}zx^3, \\ y^2zx &\leq \frac{2}{7}yz^3 + \frac{1}{7}zx^3 + \frac{4}{7}xy^3, \\ z^2xy &\leq \frac{2}{7}zx^3 + \frac{1}{7}xy^3 + \frac{4}{7}yz^3,\end{aligned}$$

und das haben wir schon zweimal bewiesen (Aufgaben 1.16 und 1.32).

2.2 Ungleichung von Schur

Satz 2.1. *Seien $a,b,c,\lambda \in \mathbb{R}$ mit $a,b,c>0$. Dann ist*

$$a^\lambda(a-b)(a-c) + b^\lambda(b-c)(b-a) + c^\lambda(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Beweis. Die Ungleichung ist **symmetrisch**, also invariant unter Zweiervertauschungen, also dürfen wir eine Ordnung annehmen:

- wenn $\lambda \geq 0$, dann sei $a \geq b \geq c > 0$,

- wenn $\lambda < 0$, dann sei $c \geq b \geq a > 0$.

Dann haben wir die wahren Ungleichungen

$$\begin{aligned} \big(a-b\big) \cdot \big(a^\lambda(a-c) - b^\lambda(b-c)\big) &\geq 0, \\ c^\lambda(c-a)(c-b) &\geq 0, \end{aligned}$$

denn die relevanten Faktoren haben immer gleiches Vorzeichen. Man beachte, daß die Funktion $f = f(x) = x^\lambda$ (mit $x > 0$) für $\lambda \geq 0$ monoton wächst, und für $\lambda < 0$ streng monoton fällt. $\square$

Wichtig ist der Fall $\lambda = 1$, der nach Ausmultiplizieren auf

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + c^2a$$

führt. Besonders schön ist hierbei der Produktterm abc auf der „größeren“ Seite (bei Ungleichungen wie Cauchy–Schwarz oder $G \leq A$ ist er immer auf der kleineren Seite).

Als Beispiel schauen wir uns die Ungleichung $5(a^2+b^2+c^2)+18abc \geq \frac{7}{3}$ an, die angeblich für $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ mit der Nebenbedingung $a+b+c = 1$ gelten soll.

Wir machen als erstes die Ungleichung **homogen**, indem wir die **Nebenbedingung einbauen**:

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a + b + c) + 18abc \overset{?}{\geq} \frac{7}{3}(a + b + c)^3.$$

Ausmultiplizieren und Multiplikation mit 3 liefert

$$8(a^3 + b^3 + c^3) + 12abc \overset{?}{\geq} 6(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2).$$

Wir wären fertig, wenn wir zeigen könnten, daß

$$4(a^3 + b^3 + c^3) \overset{?}{\geq} 2(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2).$$

Hier kann man **umordnen:**

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c &\geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot c + c^2 \cdot a, \\ a^2 \cdot a + b^2 \cdot b + c^2 \cdot c &\geq a^2 \cdot c + b^2 \cdot a + c^2 \cdot b; \end{aligned}$$

oder man folgt dem Prinzip **divide et impera**:

$$\begin{aligned} 2a^3 + b^3 &\geq 3a^2b, \quad 2b^3 + a^3 \geq 3b^2a, \\ 2b^3 + c^3 &\geq 3b^2c, \quad 2c^3 + b^3 \geq 3c^2b, \\ 2c^3 + a^3 &\geq 3c^2a, \quad 2a^3 + c^3 \geq 3a^2c, \end{aligned}$$

wobei jede Ungleichung wiederum aus $G \leq A$ folgt.

Aufgabe 2.1. *Für $x, y, z \geq 0$ zeige man*

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

Wann gilt Gleichheit ?

2.3 Stützgeraden und Jensens Ungleichung

Sei J ein Intervall mit positiver Länge in $\mathbb{R}$. Es ist egal, ob J offen ist oder abgeschlossen oder halboffen oder unbeschränkt. Wir betrachten eine Funktion $f\colon J \to \mathbb{R}$ und wollen über deren Konvexität nachdenken. Typische Beispiele für konvexe Funktionen sind

$$x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto -2x + 7, \qquad x \mapsto e^x, \qquad x \mapsto |x|,$$

jeweils mit $J = \mathbb{R}$, aber auch $x \mapsto \tan x$ mit $J = [0, \pi/2)$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $J = (0, \infty)$.

Jede dieser Funktionen hat die Eigenschaft, daß ihr Graph „unterhalb von jeder Sehne“ verläuft. Das bedeutet: seien x_1, $x_2 \in J$ beliebige Punkte mit $x_1 < x_2$. Dann wollen wir unter der zugehörigen Sehne diejenige Strecke verstehen, die (im üblichen Diagramm der Funktion) die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verbindet. Sie wird beschrieben durch eine Funktion $s\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ gemäß

$$s(x) := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2),$$

und die Konvexität bedeutet dann $f(x) \le s(x)$ für alle $x \in [x_1, x_2]$. Für die Konvexitätsdefinition ist diese Betrachtung dann noch für *jede* Sehne zu wiederholen. In den Lehrbüchern findet man typischerweise folgende (äquivalente) Definition:

Eine Funktion $f\colon J \to \mathbb{R}$ heißt *konvex auf* J, wenn für beliebige x_1, $x_2 \in J$ und beliebige Zahlen $\lambda \in [0, 1]$ gilt, daß

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Wenn zusätzlich diese Ungleichung strikt wird im Falle von $x_1 \ne x_2$ und $\lambda \notin \{0, 1\}$, dann heißt f *streng konvex auf* J.

Man kann beweisen:

Konvexität impliziert innere Stetigkeit: wenn $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ konvex ist, dann ist f auf (a, b) stetig.

Summen bzw. Differenzen konvexer Funktionen: die Summe zweier konvexer Funktionen ist wieder konvex (die Differenz nicht unbedingt).

Jensens Ungleichung: wenn $f\colon J \to \mathbb{R}$ auf J konxex ist, und wenn $x_1, \ldots, x_n \in J$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, dann ist

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Bei *streng konvexem* f gilt Gleichheit genau, falls alle x_j gleich sind, oder falls ein $\lambda_j = 1$ ist.

Erstes Kriterium für Konvexität: wenn $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig ist und auf (a, b) differenzierbar, und wenn dann f' auf (a, b) eine monoton wachsende Funktion ist, dann ist f auf $[a, b]$ konvex.

Zweites Kriterium für Konvexität: wenn $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig ist und auf (a, b) zweimal differenzierbar, und wenn dann f'' auf (a, b) überall einen nichtnegativen Wert annimmt, dann ist f auf $[a, b]$ konvex. Wenn überall f'' echt positiv ist, dann ist f auf $[a, b]$ streng konvex.

Drittes Kriterium für Konvexität: eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann auf $[a,b]$ konvex, wenn es zu jedem $\widehat{x} \in (a,b)$ eine lineare Funktion $x \mapsto \widehat{\tau}(x) = px + q$ gibt mit $\widehat{\tau}(\widehat{x}) = f(\widehat{x})$ und $\widehat{\tau}(x) \leq f(x)$ für jedes $x \in [a,b]$.

Wir schauen uns das dritte Kriterium etwas genauer an: wenn die Funktion f im Punkt $\widehat{x}$ differenzierbar sein sollte (und das ist bei Olympiade–Aufgaben praktisch immer der Fall), dann gibt es genau eine lineare Funktion $\widehat{\tau}$, die das Gewünschte leistet: nämlich diejenige Funktion, deren Graph gerade die Tangente ist. Dann haben wir

$$\widehat{\tau}(x) = f'(\widehat{x}) \cdot (x - \widehat{x}) + f(\widehat{x}), \qquad \text{also} \quad p = f'(\widehat{x}), \quad q = f(\widehat{x}) - f'(\widehat{x}) \cdot \widehat{x}.$$

Im Diagramm sieht das dann so aus, daß der Graph von f „immer oberhalb jeder Tangente“ verläuft. Man sagt dann auch, daß „jede Tangente eine Stützgerade“ ist. Salopp gesprochen, stützt die Tangente den Graphen von unten und sorgt dafür, daß der Graph nicht runterfällt.

Das dritte Kriterium besagt also: eine Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall genau dann konvex, wenn es zu jedem Punkt aus dem Inneren des Intervalls mindestens eine Stützgerade gibt. Übrigens hat die Betragsfunktion im Ursprung unendlich viele Stützgeraden.

Es hat sich herausgestellt, daß Jensens Ungleichung von traditionell hoher Bedeutung bei Olympiade–Aufgaben ist. Die typische Arbeitsweise ist wie folgt:

- bestimme die relevante Funktion f und das passende Intervall J,
- überprüfe, ob $f''(x) > 0$ ist für jedes x aus dem Inneren von J,
- wende die Ungleichung an. Hierbei ergeben sich die x_j meist von selbst, und oft nimmt man $\lambda_j = \frac{1}{n}$.

Typische Beispiele sind:

$G \leq A$**:** nimm $f(x) = -\ln(x)$ mit $J = (0, \infty)$,

$A \leq Q$**:** nimm $f(x) = x^2$ mit $J = \mathbb{R}$,

$A \leq M(n)$**, wobei** $n \in \mathbb{N}_+$**:** nimm $f(x) = x^n$ mit $J = [0, \infty)$,

Im $\triangle$ **ist** $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sqrt{3}/2$**:** nimm $f(x) = -\sin(x)$ und $J = [0, \pi]$.

Allerdings ist hinzuzufügen, daß es heutzutage nur noch selten Aufgaben auf Olympiade–Niveau gibt, die sich durch Abarbeiten eines Schemas bewältigen lassen. Zum Beispiel kann es passieren, daß auf dem relevanten Intervall J die betreffende Funktion f eben nicht überall konvex ist. Dann kann es hilfreich sein, über Stützgeraden nachzudenken. Denn Konvexität bedeutet, daß es für jedes $\widehat{x} \in J$ eine Stützgerade gibt. Insgesamt hat dann eine konvexe Funktion unendlich viele Stützgeraden, was aber „Verschwendung“ ist, denn meist braucht man nur eine einzige Stütztangente. Diese setzt man dort an, wo $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ gilt. Davon handelt die nächste Aufgabe:

Aufgabe 2.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$, und seien Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gegeben mit $x_j \geq 0$ für alle j und $x_1 + \ldots + x_n = n$. Beweise, daß dann folgende Ungleichung gilt:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{1 + x_j^2} \geq n.$$

Lösung:
Wir definieren eine Funktion

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

auf dem Intervall $J := [0, \infty)$. Weiterhin definieren eine Funktion $\widehat{\tau}\colon J \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\widehat{\tau}(x) := -\frac{x}{2} + 1.$$

Auf J ist $f(x) \geq \widehat{\tau}(x)$, denn

$$f(x) - \widehat{\tau}(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2} - 1 = \frac{x(1-x)^2}{2(1+x^2)}.$$

Damit folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2}{1+x_j^2} = 2\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \geq 2\sum_{j=1}^{n} \widehat{\tau}(x_j) = 2\sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{x_j}{2} + 1\right) = 2\left(-\frac{n}{2} + n\right) = n.$$

Das ist der gewünschte Beweis.

Wir erläutern den **Gedankengang** hinter der Lösung. Es ist

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f'(1) = -\frac{1}{2},$$

und der Graph von $\widehat{\tau}$ ist genau die Tangente von f am Punkt $\widehat{x} := 1$. Aus einer Skizze sieht man, daß f konkav ist für x nahe Null, und f ist konvex für große positive x. Es bringt nicht viel, den Wendepunkt exakt auszurechnen. Stattdessen bestimmt man $f(x) - \widehat{\tau}(x)$ und hofft, daß hier immer das richtige Vorzeichen rauskommt. Diese Differenz hat zwingend eine Doppelnullstelle bei $x = \widehat{x} = 1$, was bei der Faktorzerlegung eine hilfreiche Information ist.

3 Aufgaben

Die hier gelisteten Aufgaben kann man ein Stück weit mit den vorgestellten Methoden behandeln, aber wie bei der IMO üblich, braucht man zusätzlich noch einige weitere Ideen.

Aufgabe 3.1. *Seien x, y, z nichtnegative reelle Zahlen mit $x + y + z = 1$. Es ist zu zeigen, daß dann*

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Aufgabe 3.2. *Man zeige: Für die Seiten a, b, c eines Dreiecks gilt*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Aufgabe 3.3. *Man bestimme den maximal möglichen Wert der Summe*

$$\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$$

über der Menge aller n–Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i \geq 0$ $(\forall i)$ und $\sum_{j=1}^n x_j = 1$.

Aufgabe 3.4. *Für $x, y, z > 1$ mit $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ist zu zeigen, daß*

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Aufgabe 3.5. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Man zeige*

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \cdot \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit ?

Aufgabe 3.6. *Man zeige, daß für positive a_j, b_j, c_j gilt:*

$$\left(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j b_j}{a_j + b_j}\right) \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n b_j\right),$$

$$\left(\sum_{j=1}^n (a_j + b_j + c_j)\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{b_j c_j + c_j a_j + a_j b_j}{a_j + b_j + c_j}\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j b_j c_j}{b_j c_j + c_j a_j + a_j b_j}\right)$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) \left(\sum_{j=1}^n c_j\right).$$

4 Einiges über Nullstellen von Polynomen

Dies ist ein „Bonuskapitel“, in dem wir uns Polynome und Ungleichungen zwischen deren Koeffizienten anschauen wollen[3].

Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen, und sei P ein Polynom mit Nullstellen $-a_1, \ldots, -a_n$:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + a_1) \cdot \ldots \cdot (x + a_n) \\ &= x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n \\ &= x^n + \binom{n}{1} p_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} p_2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} p_{n-1} x + p_n. \end{aligned}$$

Nach Vieta ist $c_1 = a_1 + \cdots + a_n$, c_2 ist gleich der Summe aller gemischter Produkte aus je zwei a_j, und $c_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Weil c_j aus $\binom{n}{j}$ Summanden besteht, ist die Definition der p_j naheliegend. Wir setzen weiterhin $c_0 := 1$ und $p_0 := 1$. Dann haben wir zwei berühmte Sätze:

[3] Dabei folgt unsere Darstellung dem sehr lesenswerten Buch *Inequalities* von G. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya von 1934. Da es auch Nachdrucke bis 1999 gibt, sollte es gut zugänglich sein.

Satz 4.1 (Theorem von Newton). *Für $1 \le r < n$ gilt*

$$p_{r-1}p_{r+1} \le p_r^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Satz 4.2 (Theorem von Maclaurin). *Es gilt*

$$p_1 \ge p_2^{1/2} \ge p_3^{1/3} \ge \ldots \ge p_n^{1/n},$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Im Theorem von Newton dürfen die a_j übrigens auch negativ sein.

Im folgenden wollen wir zwei Beweise angeben. Das Theorem von Maclaurin ist dabei eine Folgerung des Theorems von Newton, denn wir haben zum Beispiel

$$\begin{array}{rcc} (p_0p_2)(p_1p_3)^2 \le p_1^2p_2^4 & \Longrightarrow & p_3^2 \le p_2^3, \\ (p_0p_2)(p_1p_3)^2(p_2p_4)^3 \le p_1^2p_2^4p_3^6 & \Longrightarrow & p_4^3 \le p_3^4 \end{array}$$

und so weiter.

Erster Beweis des Theorems von Newton.

In diesem Beweis seien alle a_j als positiv vorausgesetzt.

Wir führen den Beweis mittels Induktion über n. Der Anfang ist $n = 2$ und sei den Leserinnen und Lesern überlassen.

Sei die Behauptung gezeigt für $n-1 \ge 2$ positive Zahlen $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Seien c'_j und p'_j die obengenannten Größen, die sich aus diesen Zahlen $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ergeben. Sei eine weitere positive Zahl a_n gegeben, und seien c_j, p_j die sich aus dem n–Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ ergebenden Werte.

Dann ist (mit $1 \le r \le n$ und $c'_n := 0$, $p'_n := 0$):

$$c_r = c'_r + a_n c'_{r-1}, \qquad p_r = \frac{n-r}{n}p'_r + \frac{r}{n}a_n p'_{r-1}.$$

Wir merken an, daß die letzte Identität auch gilt, wenn wir $r = 0$ zulassen und p'_{-1} irgendwie wählen. Wir entscheiden uns für $p'_{-1} := 0$.

Angenommen, die $a_1, \ldots, a_{n-1}$ seien nicht alle gleich. Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung

$$p'_{r-1}p'_{r+1} < (p'_r)^2, \qquad r = 1, \ldots, n-2.$$

Wegen unserer Wahl von p'_{-1} und p'_n gilt diese Ungleichung auch für $r = 0$ und $r = n-1$.

Um das Vorzeichen von $p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2$ zu bestimmen, schreiben wir

$$n^2\left(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2\right) = A + Ba_n + Ca_n^2$$

mit $1 \le r \le n-1$ und

$$\begin{aligned} A &= \left((n-r)^2 - 1\right)p'_{r-1}p'_{r+1} - (n-r)^2(p'_r)^2, \\ B &= (n-r+1)(r+1)p'_{r-1}p'_r + (n-r-1)(r-1)p'_{r-2}p'_{r+1} - 2r(n-r)p'_{r-1}p'_r \\ &= (r^2 + n - rn + 1)p'_{r-1}p'_r + (n-r-1)(r-1)p'_{r-2}p'_{r+1}, \\ C &= (r^2-1)p'_{r-2}p'_r - r^2(p'_{r-1})^2. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung $p'_{r-1}p'_{r+1} < (p'_r)^2$ bekommen wir dann

$$A < -(p'_r)^2.$$

Weiterhin ist $p'_{r-2}p'_r < (p'_{r-1})^2$, also auch

$$C < -(p'_{r-1})^2.$$

Und schließlich haben wir (immer noch für $1 \le r \le n-1$)

$$p'_{r-2}p'_{r+1} < \frac{(p'_{r-1})^2}{p'_r} p'_{r+1} = \frac{p'_{r-1}}{p'_r} \cdot p'_{r-1}p'_{r+1} < \frac{p'_{r-1}}{p'_r} \cdot (p'_r)^2 = p'_{r-1}p'_r,$$

woraus

$$B \le \Big((r^2 + n - rn + 1) + (n-r-1)(r-1)\Big)p'_{r-1}p'_r = 2p'_{r-1}p'_r$$

folgt. Insgesamt haben wir dann

$$n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) < -\Big((p'_r)^2 - 2a_n p'_{r-1}p'_r + (p'_{r-1})^2 a_n^2\Big) = -\left(p'_r - p'_{r-1}a_n\right)^2 \le 0.$$

Dann folgt die Behauptung, falls die $a_1, \ldots, a_{n-1}$ nicht alle gleich sind.

Und wenn nun $a_1 = \ldots = a_{n-1} \ne a_n$ ist, dann werden in der obigen Rechnung alle $<$ zu $\le$, und es gilt

$$n^2(p_{r-1}p_{r+1} - p_r^2) \le -\left(p'_r - p'_{r-1}a_n\right)^2,$$

und hier ist die rechte Seite negativ, denn es ist $\frac{p'_r}{p'_{r-1}} = a_1 \ne a_n$.

Der noch fehlende Fall $a_1 = \ldots = a_n$ ist eine schöne Übungsaufgabe. $\square$

Wir bringen noch einen zweiten Beweis des Theorems von Newton. Dieser hat den Vorteil, daß wir jetzt negative a_j zulassen können (und wir lernen noch einige überraschende Eigenschaften von Polynomen kennen), aber auch den Nachteil, daß wir jetzt differenzieren und integrieren.

Wir verabreden, daß wir mehrfache Nullstellen eines Polynoms entsprechend oft zählen. Zum Beispiel hat das Polynom $(x-7)^2(x-8)$ genau drei Nullstellen, nämlich 7, 7 und 8.

Wir teilen mit:

Satz von Rolle**:** sei $g = g(t)$ auf $[a, b]$ stetig (wobei $a \ne b$) und auf (a, b) differenzierbar mit $g(a) = g(b) = 0$. Dann existiert eine Nullstelle von g' zwischen a und b.

Mehrfache Nullstellen und Ableitungen: sei τ^* eine k–fache Nullstelle von g, also $g(t) = (t - \tau^*)^k h(t)$, und h sei differenzierbar. Dann ist τ^* eine $(k-1)$–fache Nullstelle von g'.

Sei nun g ein Polynom vom Grade n mit m reellen Nullstellen. Im Sinne der oben verabredeten Zählweise können wir die Nullstellen schreiben als

$$t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_m.$$

Dann hat g' mindestens $m-1$ Nullstellen $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$, die wie folgt liegen:

$$t_1 \le \tau_1 \le t_2 \le \tau_2 \le \ldots \le t_{m-1} \le \tau_{m-1} \le t_m.$$

Wenn t_j echt kleiner ist als t_{j+1}, dann liegt τ_j echt zwischen t_j und t_{j+1}.

Nun interessieren wir uns für den Fall $m = n \geq 1$, also hat g keine nicht-reellen Nullstellen. Weil g' ein Polynom vom Grad $n - 1 = m - 1$ ist, kann links von t_1 keine Nullstelle von g' liegen, und rechts von t_m kann auch keine Nullstelle von g' liegen. Sonst hätte g' mehr Nullstellen als der Grad von g' angibt, was nicht sein kann.

Lemma 4.3. *Sei g ein Polynom vom Grad n mit n reellen Nullstellen (nicht notwendig verschieden). Wenn τ^* eine k–fache Nullstelle von g' ist mit $k \geq 2$, dann ist τ^* auch eine $(k+1)$–fache Nullstelle von g.*

Beweis. Wir haben immer die Darstellung

$$g(t) = g(\tau^*) + \int_{s=\tau^*}^{s=t} g'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Nun sind zwei Fälle denkbar.

Fall 1: $g(\tau^*) = 0$.

Dann ist τ^* eine Nullstelle der Vielfachheit $k+1$ von g, denn der Integrand g' hat bereits die Nullstelle τ^* mit Vielfachheit k, und der Integrationsvorgang erhöht die Vielfachheit um 1.

Fall 2: $g(\tau^*) \neq 0$.

Zunächst hat g genau n Nullstellen, und nach obiger Überlegung zur Lage der t_j und τ_j ergibt sich, daß es Nullstellen t_k und t_{k+1} von g gibt mit $t_k < \tau^* < t_{k+1}$, sodaß im offenen Intervall (t_k, t_{k+1}) keine weitere Nullstelle von g liegt. Dann hat g außerhalb des Intervalls (t_k, t_{k+1}) noch $n - 2$ weitere Nullstellen, nach Satz von Rolle gibt es also auch noch $n - 2$ Nullstellen von g' außerhalb des Intervalls (t_k, t_{k+1}). Aber τ^* ist eine mindestens zweifache Nullstelle von g'. Also hat g' mindestens $(n-2)+2$ Nullstellen, was nicht sein kann.

Damit ist Fall 2 unmöglich, und es gilt immer Fall 1. □

Als direkte Folgerung haben wir dann:

Lemma 4.4. *Sei $g = g(t)$ ein Polynom mit Grad n und n reellen Nullstellen. Wenn τ^* eine (mindestens) zweifache Nullstelle einer j–ten Ableitung $\frac{\partial^j}{\partial t^j} g$ ist (mit $j \leq n$), dann ist τ^* eine (mindestens zweifache) Nullstelle von g.*

Nun betrachten wir ein Polynom $g = g(t)$ der Form

$$g(t) = c_0 t^n + c_1 t^{n-1} + \ldots + c_{n-1} t + c_n$$

mit reellen Koeffizienten und folgenden Eigenschaften:

- $c_0 \neq 0$ und $c_n \neq 0$,
- g hat n reelle Nullstellen.

Dann kann es nicht sein, daß zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten c_k und c_{k+1} gleich Null sind[4]. Denn sonst kann man durch (passend oft durchgeführtes Ableiten) von g ein Polynom erhalten, das durch t^2 teilbar ist. Dieses hätte $\tau^* = 0$ als mindestens zweifache Nullstelle, also hätte auch g den Punkt $\tau^* = 0$ als Nullstelle, was wegen $c_n \neq 0$ aber nicht möglich ist.

Mit diesen Werten für $c_0, \ldots, c_n$ betrachten wir nun eine Funktion

$$h = h(x,y) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + \ldots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lemma 4.5. *Die Nullstellenmenge von h besteht aus n Geraden durch $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, von denen keine auf der x–Achse oder y–Achse liegt.*

Beweis. Wenn $(x,0)$ eine Nullstelle von h sein sollte, dann muß $x = 0$ sein, wegen $c_0 \neq 0$. Wir können also ab jetzt $y \neq 0$ annehmen und haben

$$h(x,y) = y^n g\left(\frac{x}{y}\right),$$

und die Nullstellenmenge von g besteht genau aus n reellen Zahlen (nicht notwendig verschieden). □

Wir könnten auch ein x^n ausklammern und haben dann $h(x,y) = x^n \tilde{g}(y/x)$, wobei $\tilde{g}$ ein Polynom ist, dessen Koeffizienten dieselben sind wie von g, bloß in entgegengesetzter Reihenfolge. Die Nullstellen von $\tilde{g}$ sind genau die Reziproken der Nullstellen von g, und $\tilde{g}$ erfüllt dieselben Voraussetzungen wie g.

Die Nullstellenmenge von h sind n (nicht unbedingt verschiedene) Geraden im $\mathbb{R}^2$. Weil der Satz von Rolle gilt, folgt, daß die Nullstellenmenge von

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k h(x,y), \qquad l + k \leq n - 1,$$

aus $n - l - k$ Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ besteht. Diese Geraden sind nicht notwendig verschieden, und eine Gerade kann auch auf einer Achse liegen, aber nicht doppelt.

Jede Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ „vernichtet einen Summanden am rechten Ende“ der Darstellung von $h = h(x,y)$, und jede Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}$ „vernichtet einen Summanden am linken Ende“ der Darstellung von h. Für $l + k \leq n - 1$ bleibt mindestens ein Summand $\neq 0$ übrig, denn zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten können nicht beide gleichzeitig gleich Null sein.

Zweiter Beweis des Theorems von Newton:.

Seien die a_j reelle Zahlen (positiv oder negativ), jede ungleich Null. Wir setzen

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= (x + a_1 y) \cdot (x + a_2 y) \cdot \ldots \cdot (x + a_n y) \\ &=: p_0 x^n + \binom{n}{1} p_1 x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n-1} p_{n-1} x y^{n-1} + p_n y^n. \end{aligned}$$

[4] Das wäre eine nette Olympiade-Aufgabe: sei ein Polynom gegeben mit Absolutglied $\neq 0$ und zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten gleich Null. Man zeige, daß mindestens eine Nullstelle nicht-reell sein muß !

Es ist $p_0 = 1$ und $p_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$. Die Nullstellenmenge von f besteht aus n Geraden durch den Ursprung, die gegeben werden durch die Gleichungen $x + a_j y \stackrel{!}{=} 0$.

Für $1 \leq r \leq n-1$ wollen wir zeigen, daß $p_{r-1}p_{r+1} \leq p_r^2$. Dies gilt trivialerweise, wenn $p_{r-1} = 0$ oder $p_{r+1} = 0$ wäre. Sei also $p_{r-1} \neq 0$ und $p_{r+1} \neq 0$.

Wir bilden jetzt eine passend gewählte $(n-2)$–fache Ableitung von f. Diese ist dann ein quadratisches Polynom, das nach obigen Überlegungen zwei reelle Geraden als Nullstellenmenge hat.

Das machen wir wie folgt: es ist

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(x,y) &= \sum_{j=0}^{n} p_j \binom{n}{j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} x^{n-j} y^j = \sum_{j=0}^{n} p_j \binom{n}{j} y^j \frac{\partial^k}{\partial x^k} x^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} p_j \frac{n!}{j!(n-j)!} y^j (n-j)\cdot(n-j-1)\cdot\ldots\cdot(n-j-k+1) x^{n-j-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} p_j \frac{n!}{j!(n-j-k)!} y^j x^{n-j-k} \\
&= n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \sum_{j=0}^{n-k} p_j \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} y^j,
\end{aligned}
$$

und also auch

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(x,y) &= n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \sum_{j=0}^{n-k} p_j \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \frac{\partial^l}{\partial y^l} y^j \\
&= n\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \sum_{j=l}^{n-k} p_j \binom{n-k}{j} x^{n-k-j} \cdot j\cdot(j-1)\cdot\ldots\cdot(j-l+1) y^{j-l} \\
&= n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-l+1) \sum_{j=l}^{n-k} p_j \binom{n-k-l}{j-l} x^{n-k-j} y^{j-l}.
\end{aligned}
$$

Nun wählen wir k und l geschickt:

$$l = r-1, \qquad n-k = r+1,$$

also $k + l = (n-r-1) + (r-1) = n-2$, und wir finden

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k f(x,y) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot \left(p_{r-1}\binom{2}{0}x^2 + p_r\binom{2}{1}xy + p_{r+1}\binom{2}{2}y^2\right).$$

Die Nullstellenmenge davon sind genau zwei Geraden durch $(0,0)$, also hat das Polynom

$$p_{r-1}t^2 + 2p_r t + p_{r+1}$$

zwei reelle Nullstellen (nicht notwendig verschieden), also ist die schulbekannte Diskriminantenbedingung erfüllt, und das heißt $p_{r-1}p_{r+1} \leq p_r^2$. $\square$

Durch Stetigkeitsbetrachtungen kann man auch den Fall behandeln, daß einige a_j gleich Null sind. (Man stört die a_j ein wenig, sodaß keines von ihnen gleich Null ist. Dann gelten alle Ungleichungen $p_{r-1}p_{r+1} \leq p_r^2$. Aber alle p_j hängen stetig von den a_j ab.)

Aufgabe 4.1. *Für positive reelle Zahlen a, b, c, d ist zu zeigen, daß*

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{bcd+acd+abd+abc}{4}}.$$

Lösung:

Diese Ungleichung war die Aufgabe 091246 bei der DDR-Olympiade. Gestellt wurde sie von Prof. U. Pirl und Lösungsbeiträge mit positiven Punktzahlen gab es nur von zwei Olympioniken, weshalb diese Aufgabe unter der Bezeichung „Pirlscher Hammer“ bekannt wurde.

Man könnte z.B. ein Polynom P mit den positiven Nullstellen a, b, c, d betrachten. Dann ist $P(s) = s^4 - \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 - \alpha_3 s^1 + \alpha_4$, mit $\alpha_1 = a+b+c+d$, $\alpha_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\alpha_3 = abc+bcd+cda+dab$ und $\alpha_4 = abcd$. Die fragliche Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$\sqrt{\frac{\alpha_2}{6}} \geq \sqrt[3]{\frac{\alpha_3}{4}},$$

für jedes Polynom mit 4 positiven reellen Nullstellen.

Es gibt aber einen elementareren Rechenweg. Wir verweisen darauf, daß man jedes symmetrische Polynom in den 4 Variablen a, b, c, d schreiben kann als Summe von passenden Produkten der α_1, α_2, α_3, α_4, was man bei der IMO verwenden kann. Wir denken uns also symmetrische Polynome aus, die niemals negativ werden, und die den Wert Null annehmen für $a = b = c = d$. Diese drücken wir dann mit den α_j aus und bekommen so Ungleichungen zwischen den α_j. Das wiederholen wir solange, bis es „genug“ Ungleichungen sind.

Wir beginnen mit

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 = c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2. \quad (1)$$

Die c_1, c_2 sind noch unbekannt. Weitere Summanden kann es rechts nicht geben. Wir setzen $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$ und finden $c_1 = 3$. Dann setzen wir $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$ und finden $c_2 = -8$. (Wer an diese Methode nicht glaubt, rechne (1) mit diesen c_j zu Fuß nach !) Dann haben wir

$$0 \leq 3\alpha_1^2 - 8\alpha_2$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c = d$. Das kennen wir schon als

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

Nun nehmen wir noch ein Polynom:

$$(a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2 = c_1\alpha_1^4 + c_2\alpha_1^2\alpha_2 + c_3\alpha_1\alpha_3 + c_4\alpha_2^2 + c_5\alpha_4.$$

Man überlegt sich, daß auf der rechten Seite nichts fehlt.

Wir setzen $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 1)$ und bekommen $c_1 = 0$.

Wir setzen $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, -1)$ und erhalten $c_4 = 2$.

Wir setzen $(a, b, c, d) = (0, 0, 1, 1)$, und es folgt $c_2 = 0$.

Dann setzen wir $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 0)$, und es ergibt sich $c_3 = -6$.

Schließlich nehmen wir $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$, woraus $c_5 = 24$ folgt.

Daraus haben wir dann

$$0 \leq -6\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2 + 24\alpha_4.$$

Den Term mit α_4 wollen wir loswerden, deshalb betrachten wir

$$\begin{aligned} &cd(a-b)^2 + bd(a-c)^2 + bc(a-d)^2 + ad(b-c)^2 + ac(b-d)^2 + ab(c-d)^2 \\ &\quad = c_1\alpha_1^4 + c_2\alpha_1^2\alpha_2 + c_3\alpha_1\alpha_3 + c_4\alpha_2^2 + c_5\alpha_4. \end{aligned}$$

Und wir zuvor setzen wir $(a,b,c,d) = (0,0,0,1)$ mit dem Ergebnis $c_1 = 0$. Dann nehmen wir $(a,b,c,d) = (0,0,1,-1)$, woraus $c_4 = 0$ folgt. Dann $(a,b,c,d) = (0,0,1,1)$, und es ergibt sich $c_2 = 0$. Dann $(a,b,c,d) = (1,1,1,0)$, also $c_3 = 1$. Und schließlich $(a,b,c,d) = (1,1,1,1)$, also $c_5 = -16$. Insgesamt ist gezeigt:

$$\begin{aligned} &0 \leq 3\alpha_1^2 - 8\alpha_2, \\ &0 \leq -6\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2 + 24\alpha_4, \\ &0 \leq \alpha_1\alpha_3 - 16\alpha_4. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite Ungleichung mit 2, die dritte mit 3 und addieren:

$$0 \leq -9\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2^2.$$

Nun ist $\alpha_3 \leq 4\alpha_2^2/(9\alpha_1)$, also auch

$$27\alpha_3^2 \leq 27 \cdot \frac{16\alpha_2^4}{81\alpha_1^2} = \frac{16\alpha_2^4}{3\alpha_1^2} \leq \frac{16\alpha_2^4}{8\alpha_2} = 2\alpha_2^3.$$

Das wollten wir zeigen.