

ABSCHLUSSBERICHT

ÜBER DAS DFG-PROJEKT

MODERNE FUNKTIONALANALYTISCHE UND NUMERISCHE METHODEN FÜR SUPRALEITER

PROJEKTLEITER: PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D.

1. ALLGEMEINE ANGABEN

1.1. Thema.

Moderne funktionalanalytische und numerische Methoden für Supraleiter: Dynamische Eigenschaften und asymptotisches Langzeitverhalten von Ginzburg-Landau-Modellen für Supraleiter.

1.2. **Keyword.** Ginzburg-Landau-Modelle für Supraleiter

1.3. Fachgebiet und Arbeitsrichtung.

Angewandte Mathematik (partielle Differentialgleichungen und dynamische Systeme)

1.4. Weitere Projektteilnehmer – Doktoranden.

Herr Dipl.-math. **Martin Petzoldt:** 3 Monate; vom 01.04.1997 bis 30.06.1997
(als Doktorand)

Herr Dipl.-math. **Fouzi Zaouch:** 21 Monate; vom 01.05.1999 bis 31.01.2001
(als Doktorand)

1.5. Gastprofessoren – Vorträge an der Universität Rostock.

Frau Prof. Dr. Jacqueline Fleckinger-Pellé: 2 Wochen; 1997
(Université de Toulouse, Frankreich)

Herr Prof. Dr. Edriss S. Titi: 1 Woche; 1997
(University of California at Irvine, U.S.A.)

Herr Dr. Hans G. Kaper (Senior Scientist): 2 Wochen; 1998
(Argonne National Laboratory, Chicago, U.S.A.)

1.6. Zusammenfassung.

Dieses Forschungsprojekt beschäftigt sich mit der Entwicklung und den Anwendungen von Methoden der *modernen Funktionalanalysis* auf verschiedene Probleme, die in den allgemein anerkannten mathematischen Modellen für Supraleiter von GINZBURG und LANDAU vorkommen: (a) Dynamische Eigenschaften der Supraleiter, die durch das zeitabhängige Ginzburg-Landau-Modell beschrieben werden (globale Existenz, Eindeutigkeit und komplexanalytische Erweiterung von schwachen Lösungen für die entsprechenden Systeme nichtlinearer Ginzburg-Landau-Gleichungen und das asymptotische Langzeitverhalten solcher Lösungen), und (b) Dynamische Instabilitätstheorie für Supraleiter, deren Zustand sich in der Nähe eines Gleichgewichtes befindet, wobei der Gleichgewichtszustand durch das stationäre (zeitunabhängige) Ginzburg-Landau-Modell beschrieben wird (Untersuchung der Lösungsmenge der stationären Ginzburg-Landau-Gleichungen, stabile und nichtstabile Zentralmannigfaltigkeiten und Verbindungsbahnen zwischen zwei Gleichgewichtspunkten). Asymptotisches Langzeitverhalten der Lösungen von einem Modell ermittelt den *Endzustand der Verhältnisse* in der modellierten Struktur, wie z.B. ihre Stabilitätseigenschaften. Existenz und stetige Abhängigkeit des Attraktors von physikalischen Parametern liefert eine Beschreibung des qualitativen Verhaltens von Supraleitermodellen.

2. WISSENSCHAFTLICHE ERGEBNISSE DER FORSCHUNG

2.1. Funktionalanalysis für das zeitabhängige Ginzburg-Landau-Modell.

Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangsdaten wurden analytisch für das zeitabhängige, nichtautonome Ginzburg-Landau-Modell für Supraleiter bewiesen. Die Existenz des Attraktors wurde auch für das nichtautonome Ginzburg-Landau-Modell mit einem beschränkten, zeitabhängigen Magnetfeld gezeigt. Dabei handelt es sich um einen dynamischen Prozeß, der ein schwieriges analytisches Problem darstellt. Ist das zeitabhängige Magnetfeld asymptotisch autonom, d.h. es konvergiert gegen ein stationäres Magnetfeld, wenn die Zeit $t \rightarrow \infty$, so wurde gezeigt, daß dieselbe Aussage auch für jede (zeitabhängige) Lösung gilt; sie konvergiert gegen eine stationäre Lösung für $t \rightarrow \infty$. Dieses Phänomen heißt *Stabilisierung der Lösung*. Für ein zeitperiodisches Magnetfeld mit der Zeitperiode τ wurde die Existenz einer stabilen periodischen Lösung des Ginzburg-Landau-Modells mit der Zeitperiode τ bewiesen. Ein zeitperiodisches angewandtes Magnetfeld entsteht, wenn z.B. beim Experiment Wechselstrom benutzt wird.

Diese Ergebnisse wurden (oder werden) in den folgenden Arbeiten veröffentlicht:

- (1) H. G. Kaper und P. Takáč, *An Equivalence Relation for the Ginzburg-Landau Equations of Superconductivity*. Z. angew. Math. Phys. **48** (1997), 1–11.
- (2) P. Takáč, *Bifurcations to Invariant 2-Tori for the Complex Ginzburg-Landau equation*. Applied Mathematics and Computation **89**(1–3) (1998), 241–258.

- (3) J. Fleckinger-Pellé, H. G. Kaper und P. Takáč, *Dynamics of the Ginzburg-Landau equations of superconductivity*. Nonlinear Analysis **32**(5) (1998), 647–665.
- (4) H. G. Kaper und P. Takáč, *Ginzburg-Landau dynamics with a time-dependent magnetic field*. Nonlinearity **11**(2) (1998), 291–305.
- (5) S.-Z. Huang und P. Takáč, *Global smooth solutions of the complex Ginzburg-Landau equation and their dynamical properties*. Discrete and Continuous Dynamical Systems **5**(4) (1999), 825–848.
- (6) H. G. Kaper und P. Takáč, *Bifurcating vortex solutions of the complex Ginzburg-Landau equation*. Discrete and Continuous Dynamical Systems **5**(4) (1999), 871–880.
- (7) S.-Z. Huang und P. Takáč, *Convergence in gradient-like systems which are asymptotically autonomous and analytic*. Nonlinear Analysis (2001), angenommen zur Veröffentlichung.
- (8) P. Takáč, *Bifurcations and vortex formation in the Ginzburg-Landau equations*. Z. angew. Math. Mech. (2001), angenommen zur Veröffentlichung.
- (9) E. Feireisl und P. Takáč, *Long-time stabilization of solutions to the Ginzburg-Landau equations of superconductivity*. Monatshefte für Mathematik (2001), vorgelegt zur Veröffentlichung.
- (10) B. Alziary, J. Fleckinger und P. Takáč, *A Hardy inequality for the Schrödinger operator with an Aharonov-Bohm magnetic field in \mathbf{R}^2* . SIAM J. Math. Anal. (2001), vorgelegt zur Veröffentlichung.
- (11) F. Zaouch, *Global existence and boundedness of solutions to the Ginzburg-Landau equations with time-dependent magnetic field*. J. Evolution Equations (2001), vorgelegt zur Veröffentlichung.
- (12) F. Zaouch, *Existence and stability of solutions to the Ginzburg-Landau equations with time-periodic magnetic field*. Arbeit im Vorbereitungsprozeß.

2.2. Numerische Verfahren für das zeitabhängige Modell.

Numerisch nichtsteife explizite Euler- und Runge-Kutta-Verfahren wurden für eine effiziente Untersuchung des Langzeitverhaltens der Lösungen von zeitabhängigen Ginzburg-Landau-Gleichungen entwickelt. Konkret bedeutet dies, daß die zwei Parameter, die die Feinheit der Raum- und Zeitdiskretisierung messen, voneinander *unabhängig* sind. Diese Eigenschaft ermöglicht schnelle numerische Simulationen, ohne daß diese zwei Parameter aufeinander abgestimmt werden müßten. Die Nichtsteifheit des Verfahrens wurde mittels einer ziemlich schwierigen analytischen Fehlerabschätzung gezeigt, allerdings nur in einer Raumdimension. Dieses Ergebniss wurde in der folgenden Arbeit veröffentlicht:

- (1) P. Takáč und A. Jüngel, *A Nonstiff Euler Discretization of the Complex Ginzburg-Landau Equation in One Space Dimension*. SIAM J. Numer. Anal. **38**(1) (2000), 292–328.

3. ZUSAMMENARBEIT MIT ANDEREN WISSENSCHAFTLERN

Mit folgenden wissenschaftlichen Einrichtungen wurde Zusammenarbeit aufgebaut; über Modellierung, Wohlgestelltheit und Existenz von Attraktoren von Supraleiter- bzw. Schrödinger-Gleichungen:

1. Université de Toulouse I, Frankreich: Prof. Dr. Jacqueline Fleckinger-Pellé
2. Université Paul Sabatier, Toulouse, Frankreich: Prof. Dr. François de Thélin
3. Universidad Complutense de Madrid, Spanien: Prof. Dr. Jesús Idefonso Díaz
4. Argonne National Laboratory, Chicago, U.S.A.: Dr. Hans G. Kaper, Senior Scientist

PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D., FACHBEREICH MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ROSTOCK,
UNIVERSITÄTSPLATZ 1, 18055 ROSTOCK

E-mail address: `peter.takac@mathematik.uni-rostock.de`