

# ABSCHLUSSBERICHT

ÜBER DAS DFG-PROJEKT

## SINGULARITÄTEN UND MUSTERBILDUNG IM GINZBURG-LANDAU-MODELL FÜR SUPRALEITER

PROJEKTLEITER: PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D.

### 1. ALLGEMEINE ANGABEN

#### 1.1. Projektleiter (verantwortlich für die Durchführung).

Takáč, Peter, Prof. Dr. Ph.D.; Professor (C4) – *Lehrstuhl für Angewandte Analysis*

Institution: Universität Rostock, Institut für Mathematik

Dienstadresse: Institut für Mathematik  
Universität Rostock  
Universitätsplatz 1  
18055 Rostock

#### 1.2. Thema.

***Singularitäten und Musterbildung im Ginzburg-Landau-Modell für Supraleiter:***

Vor allem analytische aber auch numerische Methoden für die Untersuchung von Singularitäten und der Musterbildung im Ginzburg-Landau-Modell für Supraleiter. Physikalische Regelungsparameter (“Control Parameters”) sind das (von außen) angewandte Magnetfeld and die absolute Temperatur.

#### 1.3. **Kennwort. Ginzburg-Landau-Modell**

#### 1.4. **Fachgebiet und Arbeitsrichtung.**

Angewandte Mathematik (partielle Differentialgleichungen, dynamische Systeme und Variationsrechnung)

#### 1.5. **Weitere *indirekte* Projektteilnehmer – Doktoranden.**

Frau Dipl.-math. **Janine Erdmann:** 6 Monate; vom 01.10.2004 bis 31.03.2005  
(als Doktorandin)

Herr Dipl.-math. **Jochen Merker:** 6 Monate; vom 01.10.2004 bis 31.03.2005  
(als Doktorand)

## 2. ARBEITS- UND ERGEBNISBERICHT ÜBER DIE FORSCHUNG

### 2.1. Anfangsfragen und Zielsetzung des Projektes.

Dieses Forschungsprojekt beschäftigt sich mit der Entwicklung und den Anwendungen von Methoden der *modernen Funktionalanalysis* auf verschiedene Probleme, die in den allgemein anerkannten mathematischen Modellen für Supraleiter von GINZBURG und LANDAU vorkommen: (a) dynamische Eigenschaften der Supraleiter, die durch das zeitabhängige Ginzburg-Landau-Modell beschrieben werden (globale Existenz, Eindeutigkeit und komplex-analytische Erweiterung schwacher Lösungen für die entsprechenden Systeme nichtlinearer Ginzburg-Landau-Gleichungen und das asymptotische Langzeitverhalten solcher Lösungen), und (b) dynamische Instabilitätstheorie für Supraleiter, deren Zustand sich in der Nähe eines Gleichgewichtes befindet, wobei der Gleichgewichtszustand durch das stationäre (zeitunabhängige) Ginzburg-Landau-Modell beschrieben wird (Untersuchung der Lösungsmenge der stationären Ginzburg-Landau-Gleichungen, stabile und nichtstabile Zentralmannigfaltigkeiten und Verbindungsbahnen zwischen zwei Gleichgewichtspunkten). Asymptotisches Langzeitverhalten der Lösungen von einem Modell ermittelt den *Endzustand der Verhältnisse* in der modellierten Struktur, wie z.B. ihre Stabilitätseigenschaften. Existenz und stetige Abhängigkeit des Attraktors von physikalischen Parametern liefert eine Beschreibung des qualitativen Verhaltens von Supraleitermodellen.

Die oben erwähnten Probleme und Methoden konzentrieren sich zur Zeit auf die Untersuchung von Singularitäten und der Musterbildung in einem supraleitenden Material. In Raumdimension zwei ( $\mathbb{R}^2$ ) wurden in den letzten zehn Jahren zahlreiche wertvolle Ergebnisse erzielt, vor allem für die Beschreibung der so genannten *Ginzburg-Landau-Vortices* (isolierte punktweise Singularitäten), die das *Ginzburg-Landau-Gitter* bilden. Relativ dünne Supraleiterplatten ("thin superconductors") fallen in diese Kategorie.

Die wichtigste Aufgabe dieses Forschungsprojektes ist eine rigorose mathematisch-analytische und numerische Untersuchung der *Vortexlinien* im drei-dimensionalen Ginzburg-Landau-Modell. Dazu gehören auch numerisch nichtsteife explizite Euler- und Runge-Kutta-Verfahren für eine effiziente Untersuchung des Langzeitverhaltens der Lösungen von zeitabhängigen Ginzburg-Landau-Gleichungen. Konkret bedeutet dies, daß die zwei Parameter, welche die Feinheit der Raum- und Zeitdiskretisierung messen, voneinander *unabhängig* sind. Diese Eigenschaft ermöglicht schnelle numerische Simulationen, ohne daß diese zwei Parameter aufeinander abgestimmt werden müßten. Die Nichtsteifheit des Verfahrens wurde vom Projektleiter mittels einer ziemlich schwierigen analytischen Fehlerabschätzung bereits gezeigt, allerdings nur in Raumdimension eins.

## 2.2. Wissenschaftliche Ergebnisse der Forschung.

Das Forschungsprojekt befaßt sich, von der mathematischen Seite her, mit der Entwicklung und den Anwendungen der *modernen Funktionalanalysis, partieller Differentialgleichungen, dynamischer Systeme* und *Variationsrechnung* auf das allgemein anerkannte mathematische “Ginzburg-Landau-Modell” für Supraleiter. Das Projektziel ist eine möglichst genaue Beschreibung von Singularitäten und der Musterbildung in einem Supraleiter mittels vor allem analytischer aber auch numerischer Methoden.

Diese Forschungsprobleme wurden während des

**IMA Thematic Year on  
Mathematics of Materials and Macromolecules:  
Multiple Scales, Disorder, and Singularities  
September 1, 2004 - June 30, 2005**

an der **University of Minnesota, Minneapolis, U.S.A.**, behandelt.

Der Projektleiter hat auf Einladungen mehrere Vorträge über seine Arbeiten gehalten:

- (i) am 07.12.2004: *Emory University*, Atlanta, Georgia;
- (ii) am 17.12.2004: *Université Toulouse 1*, Toulouse, Frankreich;
- (iii) am 17.01.2005: *Universidad de Chile*, Santiago de Chile, Chile (beim PASI-Kongreß);
- (iv) am 26.01.2005: *IMA*, Minneapolis, Minnesota;
- (v) am 07.02.2005: *University of Minnesota*, Minneapolis, Minnesota.

## 2.3. Liste der Publikationen aus diesem Projekt.

Die wissenschaftlichen Ergebnisse aus diesem Projekt wurden (oder werden) in den folgenden Arbeiten veröffentlicht (Sonderdrucke sind beigelegt bzw. werden bald nachgereicht):

- [1] P. TAKÁČ,  *$L^\infty$ -Bounds for Weak Solutions of an Evolutionary Equation with the  $p$ -Laplacian*, in P. Drábek and J. Rákosník; eds., Proceedings of the 2004 International Conference on “Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis” (FS-DONA) in honor of Alois Kufner, May 28 – June 2, 2004, Brno-Milovy, Czech Republic, pp. 327–354. Math. Inst. of the Academy of Sciences of the Czech Republic (MÚ AV ČR), Prague, 2005.
- [2] P. TAKÁČ, *A variational approach to the Fredholm alternative for the  $p$ -Laplacian near the first eigenvalue*, im Vorbereitungsprozeß.

## 3. ZUSAMMENFASSUNG

Das Forschungsprojekt befaßt sich, von der mathematischen Seite her, mit der Entwicklung und den Anwendungen der *modernen Funktionalanalysis, partieller Differentialgleichungen, dynamischer Systeme* und *Variationsrechnung* auf das allgemein anerkannte mathematische “Ginzburg-Landau-Modell” für Supraleiter. Das Projektziel ist eine möglichst genaue Beschreibung von

Singularitäten und der Musterbildung in einem Supraleiter mittels vor allem analytischer aber auch numerischer Methoden.

PROF. DR. PETER TAKÁČ, PH.D., INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ROSTOCK,  
UNIVERSITÄTSPLATZ 1, 18055 ROSTOCK

*E-mail address:* `peter.takac@uni-rostock.de`