

---

# Einführung in die Theoretische Physik

PD Dr. Reinhard Mahnke

---

## Lehrveranstaltung Nr. 12554 (4 SWS V + 2 SWS Ü)

Dienstag 13.00 bis 14.30 Uhr, Seminarraum R306

Donnerstag 7.30 bis 9.00 Uhr, Seminarraum R306

Freitag 9.15 bis 10.45 Uhr, Seminarraum R306

Institut für Physik, Universitätsplatz 1

Sommersemester 2010

Zum Inhalt der Lehrveranstaltung:

1. **Einleitung** (15. KW, R. Mahnke)

Vorstellung des Themenprogramms (Mechanik, nichtlineare dynamische Prozesse, Elektrodynamik).

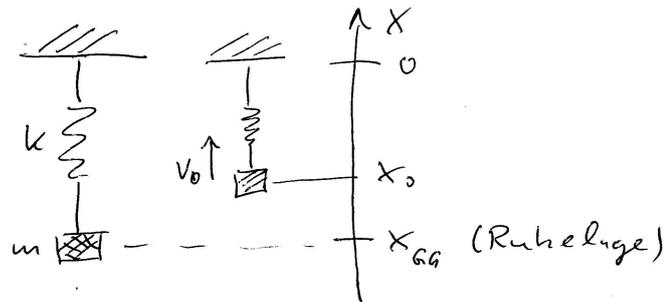
Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse (Diffusion).

Newtonsche Bewegungsgleichung (1dim) plus Anfangsbedingungen.

*Aufgabe 1:* Dynamik einer Masse unter Einfluss einer linearen Federkraft. Siehe Abb. 1

# Federschwinger / R. Munkel / ①

SS 2010



$F(x) = -kx$   
Federkraft

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{GG})}$$

Bewegungsgleichung

+  
Anfangsbed.  $\boxed{\begin{matrix} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{matrix}}$

$\{x(t), v(t)\}$  : Variable

$\{k, m, x_0, v_0, x_{GG}\}$  : Parameter

dynamisches System

$$\boxed{\begin{matrix} \frac{dx}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = -k(x - x_{GG}) \end{matrix}}$$

gekoppelte  
Diffgl. system

Abb. 1: Harmonische Bewegung einer Masse bei linearer rücktreibender Kraft.

2. **Harmonischer Oszillator I** (16. KW, R. Mahnke)

Model des Federschwingers, Hook'sches Gesetz, Federkraft, Newton'sche Bewegungsgleichung, Anfangsbedingungen, dynamisches System aus zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen, verschiedene Lösungsmethoden (exp-Ansatz, Eigenvektoren, Energieerhaltung).

3. **Harmonischer Oszillator II** (17. KW, R. Mahnke)

Ermittlung der zeitabhängigen Lösungen  $x = x(t)$  (Ort über Zeit) und  $v = v(t)$  (Geschwindigkeit über Zeit) des Federschwingers. Zuerst lineare Transformation der Ortskoordinate zur Verschiebung des Koordinatenursprungs. Verschiedene Lösungsmethoden:

- 1.) Anwendung der Energieerhaltung
- 2.) Anwendung des Ansatzes  $\exp(\lambda t)$
- 3.) Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Die mathematische Form der Lösungen ist unterschiedlich. Sie können aber ineinander überführt werden. Es gibt nur eine physikalische Lösung des Federschwingers, aber verschiedene mathematische Schreibweisen.

① Transformieren:

②

$$y = x - x_{GS} \Leftrightarrow x = y + x_{GS}$$

↑ neue  
Ortsvariable

↑ alte  
Ortsvariable

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(y + x_{GS}) = \frac{dy}{dt}$$

$$\Downarrow \boxed{m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky} \quad \text{Standardform der Bewegungsgl.}$$

$$y(t=0) = y_0 = x_0 - x_{GS}$$

$$v(t=0) = v_0$$

l. u. m.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = -ky \end{array}}$$

Def:  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  : Eigenfrequenz<sup>2</sup>

Löse das Problem in

$\{y(t), v(t)\}$ , dann Rücktransformation

Abb. 2: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

③ Löse mit Hilfe Energieerhaltung ③

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 \quad ; \quad E_{\text{pot}} = + \frac{k}{2} y^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = -ky \quad | \cdot v$$

$$m v \frac{dv}{dt} = -ky v$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} v^2 \right) = -ky v \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \quad | \cdot ky$$

$$ky \frac{dy}{dt} = ky v$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{k}{2} y^2 \right) = ky v \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} y^2 \right] = -kyv + kyv = 0$$

Integration bezüglich der Zeit  $t$

$$\boxed{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0} \quad \text{mit}$$

$$E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2$$

Abb. 3: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Berechne Trajektorie

(4)

$$\frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} y^2 = E_0 \quad | \cdot \frac{2}{m}$$

$$v^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2$$

$$v(y) = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2}$$

$e^2 = \frac{2E_0}{m\omega_0^2} \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$| v(y) = \pm \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2} |$$

Berechne Weg-Zeit-Gesetz  $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = v = \pm \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2}$$

Trennung der Variablen

$$\pm \omega_0 \int dt = \int \frac{dy}{\sqrt{e^2 - y^2}} \quad \text{Grundintegral}$$

$$\pm \omega_0 t(x) = \arcsin\left(\frac{y}{e}\right) + C$$

Bestimme Konstante C aus Anfangsbedingung  
 $y(t=0) = y_0$

$$0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right) + C$$

$$\Rightarrow C = -\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$$

Abb. 4: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

$$\pm \omega_0 t(x) = \arcsin\left(\frac{y}{e}\right) - \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right) \quad (5)$$

Invertierung (Umkehrung) durchführen

$$\arcsin\left(\frac{y}{e}\right) = \underbrace{\pm \omega_0 t}_{\substack{t \geq 0 \\ \text{"+" Zeichen}}} + \underbrace{\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)}_{\alpha_0}$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{y}{e}\right)\right) = \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

inverse Fktn

$$\boxed{y(t) = e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)}$$

Weg-Zeit-Gesetz

$$\text{mit } e = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2}} \quad ; \quad E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$$

Rücktransformieren:

$$\boxed{x(t) = x_{GG} + e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)}$$

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{x_0 - x_{GG}}{e}\right)$$

$$E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} (x_0 - x_{GG})^2$$

Abb. 5: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Berechne  $v = v(t)$ : Geschwindigkeit (6)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e \sin(\omega_0 t + \alpha_0))$$

$$\boxed{v(t) = e \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)}$$

oder aus Trajektorie:

$$\begin{aligned} v &= \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2} = \omega_0 \sqrt{e^2 - e^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)} \\ &= \omega_0 e \sqrt{1 - \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)} = e \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \end{aligned}$$

Prüfe Anfangsbedingung:  $v(t=0) = v_0$

$$v(t=0) = e \omega_0 \cos \alpha_0 = e \omega_0 \cos\left(\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)\right)$$

Benutze:  $\cos(\arcsin u) = \sqrt{1 - u^2}$

$$\begin{aligned} v(t=0) &= e \omega_0 \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{e^2}} = \omega_0 \sqrt{e^2 - y_0^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} y_0^2} = \sqrt{\frac{2}{m} E_0 - \omega_0^2 y_0^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2 \right) - \omega_0^2 y_0^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} y_0^2 - \frac{k}{m} y_0^2} = \sqrt{v_0^2} = v_0 \end{aligned}$$

Abb. 6: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Zeige, dass folgendes gilt: (7)

$$y(t) = e \sin(\omega_0 t + d_0) \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Benutze:  $\sin(d+\beta) = \sin d \cos \beta + \cos d \sin \beta$   
 $d \rightarrow \omega_0 t$ ;  $\beta \rightarrow d_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$

$$y(t) = e \sin(\omega_0 t + d_0) \\ = e \left[ \sin(\omega_0 t) \cos d_0 + \cos(\omega_0 t) \sin d_0 \right] \\ = \sqrt{1 - \sin^2 d_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{y_0}{e} \cos(\omega_0 t) \\ = e \left[ \sin(\omega_0 t) \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{e^2}} + \cos(\omega_0 t) \frac{y_0}{e} \right] \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{e^2 - y_0^2} \sin(\omega_0 t) \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2} - y_0^2} \sin(\omega_0 t) \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + \frac{K y_0^2 - y_0^2}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t) \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t) \\ = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Abb. 7: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

③ Löse mittels Ansatz "exp( $\lambda t$ )" ⑧

Ansatz:  $y(t) = C e^{\lambda t}$

in Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = C \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = C \lambda^2 e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

$$\Downarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i \omega_0$$

imaginäre Lösung

Superpositionslösung (Komplexe Fkt):

$$y(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$v(t) = C_1 i\omega_0 e^{i\omega_0 t} - C_2 i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}$$

$$y(t=0) = C_1 + C_2 = y_0$$

$$v(t=0) = i\omega_0 (C_1 - C_2) = v_0$$

$$\Downarrow C_1 = \frac{1}{2} \left( y_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right); C_2 = \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left( y_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left( y_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t}$$

Komplexe Lösung, die aber reell ist!

Abb. 8: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Nutze:  $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$  (9)

Euler-Formel

$$\begin{aligned}y(t) &= C_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] \\ &\quad + C_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega_0 t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega_0 t) \\ &= y_0 \cos(\omega_0 t) + i \frac{v_0}{i \omega_0} \sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

reine reelle Lösung (Schwingung)

Abb. 9: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

④ Löse mittels linearer Algebra, (10)  
 Bestimme Eigenwerte & Eigenfunktionen

Definiere Vektor  $\vec{A}(t)$  & Matrix  $M$  (2x2)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{A} = M \vec{A}} ; \vec{A}(t=0) = \vec{A}_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 y \end{aligned}} ; \boxed{\begin{aligned} y(t=0) &= y_0 \\ v(t=0) &= v_0 \end{aligned}}$$

• Bestimme Eigenwerte  $\lambda$  von Matrix  $M$ ,

$$\det(M - \lambda E) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - (-\omega_0^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i \omega_0 ;$$

Konjugierte rein imaginäre EW

Abb. 10: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

- Bestimme die zu  $\lambda_i$  (EW)  $\textcircled{11}$  gehörenden Eigenvektoren  $\vec{B}_i$  (EV)

$$\boxed{M \vec{B}_i = \lambda_i \vec{B}_i} \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \quad ; \lambda_1 = i\omega_0$$

$$0 \cdot b_{11} + 1 \cdot b_{12} = i\omega_0 b_{11} \rightarrow b_{12} = i\omega_0 b_{11}$$

$$-\omega_0^2 b_{11} + 0 \cdot b_{12} = i\omega_0 b_{12} \rightarrow -\omega_0^2 b_{11} = i\omega_0 b_{12}$$

2 identische Gleichungen

$$b_{12} = i\omega_0 b_{11} \quad ; \quad -i \cdot i b_{12} = +i\omega_0 b_{11}$$

Setze :  $b_{11} = 1 \quad \leadsto \quad b_{12} = i\omega_0$

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \quad ; \text{ noch nicht normiert}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \quad ; \lambda_2 = -i\omega_0$$

$$b_{22} = -i\omega_0 b_{21} \quad / \cdot i\omega_0^{-1} \rightarrow b_{21} = i\omega_0^{-1} b_{22}$$

$$-\omega_0^2 b_{21} = -i\omega_0 b_{22} \rightarrow b_{21} = i\omega_0^{-1} b_{22}$$

Setze :  $b_{22} = 1 \quad \leadsto \quad b_{21} = i/\omega_0$

$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B}_1 \text{ und } \vec{B}_2 \text{ müssen lin. unabhängig sein.}$$

Abb. 11: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

## Normierung der Eigenvektore (12)

$$\text{normierter Vektor: } |\vec{B}| = \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}^*} = 1$$

Bestimme Betrag  $\uparrow$   $\swarrow$  konjugiert komplex

$$|\vec{B}_1| = \sqrt{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_1^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (i\omega_0)(-i\omega_0) = 1 + \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 \text{ normiert} = \frac{1}{1 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix}}$$

$$|\vec{B}_2| = \sqrt{\vec{B}_2 \cdot \vec{B}_2^*} = \begin{pmatrix} i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 \text{ normiert} = \frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Beide EV sind linear unabhängig

$$\mu_1 \vec{B}_1 + \mu_2 \vec{B}_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Abb. 12: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

## Bilde Superposition der EV

(13)

$$\vec{A}(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \vec{B}_i' \exp(\lambda_i t)$$

Vorfaktoren  
(Parameter)  $\uparrow$  aus Anfangsbedingungen  
 $c_1, c_2 \Leftrightarrow \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

normierte  
Eigenvektoren  $\uparrow$  ausgerechnet

e-Funktion  
mit Eigenwerten

$$\vec{A}(t) = c_1 \vec{B}_1' \exp(i\omega_0 t) + c_2 \vec{B}_2' \exp(-i\omega_0 t)$$

Koeffizienten aus Anfangsbed. ermitteln

$$\vec{A}(t=0) = c_1 \vec{B}_1' + c_2 \vec{B}_2' = \vec{A}_0$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \frac{1}{1+\omega_0^2} + c_2 \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{1+\omega_0^2} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + c_2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = (1+\omega_0^2) \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 + i\omega_0 c_2 = (1+\omega_0^2) y_0$$

$$\Leftrightarrow i\omega_0 c_1 + \omega_0^2 c_2 = (1+\omega_0^2) v_0$$

Gleichungssystem nach  $c_1$  und  $c_2$  auflösen

Abb. 13: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Koeffizienten  $C_1, C_2$  sind komplex 14

$$C_1 = (1 + \omega_0^2) y_0 - i \omega_0 C_2$$

$$i \omega_0 (1 + \omega_0^2) y_0 - (i \omega_0)(i \omega_0) C_2 + \omega_0^2 C_2 = (1 + \omega_0^2) V_0$$

$$(\omega_0^2 + \omega_0^2) C_2 = (1 + \omega_0^2) V_0 - i \omega_0 (1 + \omega_0^2) y_0$$

$$C_2 = \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0^2} V_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} y_0$$

$$C_1 = (1 + \omega_0^2) y_0 - i \omega_0 \left( \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0^2} V_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} y_0 \right)$$

$$= \left( 1 + \omega_0^2 - \frac{1 + \omega_0^2}{2} \right) y_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} V_0$$

$$C_1 = \frac{1 + \omega_0^2}{2} y_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} V_0$$

Lösung vollständig bekannt!

Abb. 14: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

4. **Mathematisches Pendel I** (18. KW, R. Mahnke)

Modellbildung, Dynamik einer Masse an einem Faden unter Einfluss der Schwerkraft. Newton-Formalismus, Tangentialkraft, dynamisches System. Hamilton-Formalismus, kanonische Bewegungsgleichungen, Energieerhaltung. Diskussion des Phasenraumporträts (Ruhelage, Schwingungsregime, Separatrix (Grenzkurve), Rotationsregime).

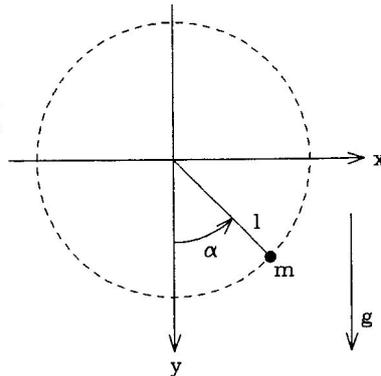


Abb. 2.2: Skizze eines mathematische Pendels.

Lagrange-Formalismus (Lagrange-Funktion, Bewegungsgleichung)

$$L(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\alpha}^2 - mgl(1 - \cos \alpha) \quad (2.7)$$

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin \alpha \quad (2.8)$$

oder im Hamilton-Formalismus (Hamilton-Funktion, Bewegungsgleichungen)

$$H(\alpha, p_\alpha) = \frac{p_\alpha^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \alpha) = E \quad (2.9)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{ml^2} \quad (2.10)$$

$$\dot{p}_\alpha = -mgl \sin \alpha \quad (2.11)$$

beschrieben, wobei  $\omega^2 = g/l$

Abb. 15: Modell eines Mathematischen Pendels im Lagrange- und Hamilton-Formalismus mit Hamilton-Funktion und Bewegungsgleichungen.

5. **Mathematisches Pendel II** (19. KW, R. Mahnke)

Integration der Bewegungsgleichung unter Verwendung der Energieerhaltung zur Bestimmung  $\alpha = \alpha(t)$ , spezielle Situation: Bewegung auf der Separatrix.

Math. Pendel / R. Mahnke

Ausgehend von Energieerhaltung

$$\frac{p_d^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos d) = E$$

folgt  $p_d = p_d(d; E)$  : Drehimpuls

$$\begin{aligned} p_d &= \pm \sqrt{2ml^2(E - mgl(1 - \cos d))} \\ &= \pm \sqrt{(ml^2)^2 \left( 2 \frac{E}{ml^2} - 2 \frac{mgl}{ml^2} (1 - \cos d) \right)} \\ &= \pm 2ml^2 \sqrt{\frac{E}{2ml^2} - \frac{wg}{2} (1 - \cos d)} \\ &= \pm 2ml^2 \sqrt{\frac{E}{2ml^2} - w^2 \sin^2 \frac{d}{2}} \end{aligned}$$

benutze:  $\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$ ;  $2\beta = d$

Def:  $\xi^2 = \frac{E}{2ml^2}$  : dimensionlose Energie

$$= \pm 2ml^2 \xi \sqrt{1 - \frac{w^2}{\xi^2} \sin^2 \frac{d}{2}}$$

als Resultat.

Drei Fälle; wobei Separatrix:  $\frac{\xi^2}{w^2} = 1$

$$\frac{\xi^2}{w^2} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{\xi^2}{w^2} > 1$$

Abb. 16: Mathematisches Pendel im Hamilton-Formalismus: Bestimmung des Drehimpulses unter Ausnutzung der Energieerhaltung.

6. **Analyse konservativer und dissipativer Systeme I** (20. KW, R. Mahnke)

Konservative Systeme (Hamiltonsche Systeme: Mathematisches Pendel, Federschwinger) im Vergleich zu dissipativen mit (passiver und aktiver) Reibung.

- 1. Freier Fall mit Reibung (1dim)  $\implies$  Lasse Gerstenberger  
Bewegung im Schwerfeld der Erde unter Einfluss von Stokescher Reibung (linear zur Geschwindigkeit)
- 2. Reibung im zähen Medium (1dim)  $\implies$  Sven Prochnow  
Bewegung unter Einfluss von Newtonscher Reibung (quadratisch zur Geschwindigkeit)
- 3. Gekoppeltes dynamisches System (2dim)  $\implies$  Sebastian Risser

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y \quad (2)$$

Lösung mittels Transformation in Polarkoordinaten

- 4. Zentralkörperproblem (3dim)  $\implies$  Carsten Hennekes  
Bewegung der Erde um die Sonne (ebene Bewegung, Ellipse) unter Einfluss der Gravitationskraft; zwei Erhaltungssätze (Energie, Drehimpuls)
- 5. Automobildynamik (1dim)  $\implies$  Anett Ziehm  
Bewegung eines fahrenden Autos (auf freier Strecke) bzw. Abbremsen vor einem Hindernis

**Hinweis zur Automobildynamik (N-dim)**

Gegeben sei ein System von  $N$  Auto-Teilchen auf einem Kreis der Länge  $L$ , d. h. es gelte  $x_i \in [0, L)$ ,  $i = 1, \dots, N$  für ihre Orte. Die Bewegungsgleichungen seien dann gegeben durch

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_{\text{kons}}(\Delta x_i) + F_{\text{diss}}(v_i),$$
$$\frac{dx_i}{dt} = v_i,$$

wobei

$$F_{\text{kons}}(\Delta x_i) = \frac{m}{\tau}(v_{\text{opt}}(\Delta x_i) - v_{\text{max}}) \leq 0$$
$$\text{mit } v_{\text{opt}}(\Delta x_i) = v_{\text{max}} \frac{(\Delta x_i)^2}{D^2 + (\Delta x_i)},$$
$$F_{\text{diss}}(v_i) = \frac{m}{\tau}(v_{\text{max}} - v_i) \geq 0$$

und die Abstände  $\Delta x_i$  zwischen den Autos zyklisch gegeben sind durch  $\forall i = 1, \dots, N-1 : \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  und  $\Delta x_N = x_1 - x_N$ .

**7. Analyse konservativer und dissipativer Systeme II** (21. KW, Projektwoche)

Bearbeitung der o. g. Projektaufgaben 1-5 mit dem Ziel einer schriftlichen physikalischen (inkl. mathematischen) Analyse (Ausarbeitung) und einem mündlichen Vortrag (Präsentation)

**8. Analyse konservativer und dissipativer Systeme III** (22. KW, R. Mahnke)

Di, 01.06.2010, 12.30–14.00: Vorträge 1-5 (je 10 min)

- 1. Vortrag: Lasse Gerstenberger  
Thema: Freier Fall mit Reibung (1dim)  
Bewegung im Schwerfeld der Erde unter Einfluss von Stokescher Reibung (linear zur Geschwindigkeit)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - r \frac{dx}{dt}; \quad x(t=0) = x_0; v(t=0) = v_0$$

Inhomogene Differentialgleichung; Lösung ist Linearkombination

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{r} \left( v_0 + \frac{mg}{r} \right) [1 - \exp(-tr/m)] - \frac{mg}{r} t$$

- 2. Vortrag: Sven Prochnow  
Thema: Reibung im zähen Medium (1dim)  
Bewegung unter Einfluss von Newtonscher Reibung (quadratisch zur Geschwindigkeit)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2; \quad x(t=0) = x_0; v(t=0) = v_0$$

Lösung durch Trennung der Variablen

$$x(t) = x_0 + \frac{m}{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{\gamma v_0}{m} t \right)$$

Obwohl die Geschwindigkeit  $v(t) = (mv_0)/(m + \gamma v_0 t)$  immer kleiner wird, bewegt sich der Körper beliebig weit bis Unendlich.

- 3. Vortrag: Sebastian Risser (Leistung nicht erbracht, kein Vortrag)  
Thema: Gekoppeltes dynamisches System (2dim)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y\end{aligned}$$

Lösung mittels Transformation in Polarkoordinaten

- 4. Vortrag: Carsten Hennekes  
Thema: Zentralkörperproblem (3dim)  
Bewegung der Erde um die Sonne (ebene Bewegung, Ellipse) unter Einfluss der Gravitationskraft; zwei Erhaltungssätze (Energie, Drehimpuls), Gravitationspotential  $E_{pot} = -C/r$   
Hamilton-Funktion

$$H(p_r, p_\alpha, r, \alpha) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\alpha^2}{2mr^2} + E_{pot}(r)$$

Kanonische Bewegungsgleichungen lösen unter Beachtung der Erhaltungssätze  $H = E$  und  $p_\alpha = L$ . Grafische Diskussion am effektiven Potential  $E_{pot}^{eff}(r) = L^2/(2mr^2) - C/r$ .

- 5. Vortrag: Anett Ziehm  
Thema: Automobildynamik (1dim)  
Bewegung eines fahrenden Autos (auf freier Strecke) bzw. Abbremsen vor einem Hindernis  
Ein Auto auf einer Ringstraße der Länge  $L$ , Reduktion des  $N$ -Auto-Teilchen-Problems auf den Ein-Teilchen-Fall:

$$\begin{aligned}m \frac{dv}{dt} &= \frac{m}{\tau} (v_{opt}(\Delta x = L) - v) \\ \frac{dx}{dt} &= v\end{aligned}$$

Integration liefert das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz als Annäherung an die optimale Geschwindigkeit

$$v(t) = v_{opt}(L) - (v_{opt}(L) - v_0) \exp(-t/\tau)$$

Kontrollfragen Nichtlineare Dynamik  
(Theoretische Mechanik konservativer und dissipativer Systeme):

9. **Schwingende Atwood–Maschine** (22. + 23. KW, R. Mahnke)  
 Modell, vier Variablen, Zusammenhang Kraft – Potential, Bestimmung potentieller Energie aus Kraft, Hamilton–Funktion, Bewegungsgleichungen und Anfangsbedingungen. Spezialfälle, insbesondere Wurf und mathematisches Pendel.  
*Aufgabenstellung:* Dynamik der schwingenden Atwood Maschine (SAM) in Abhängigkeit vom Massenverhältnis  $\mu = M/m$ .
- 2a Numerische Integration der Bewegungsgleichungen (Runge–Kutta Verfahren)
  - 2b Berechnung der Äquipotentialkurven (Kegelschnitte bzw. Ellipsengleichung)
  - 2c Spezialfall  $\mu = 0$ : Integrierte Bewegung (Wurf)
  - 2d Näherung  $\mu \gg 1$ : Zentralfeldnäherung
  - 2e Grenzfall  $\mu \rightarrow \infty$ : Rotation
  - 2f Dynamik des mathematischen Pendels (2-dim Zustandsraum)
10. **Bewegung im Zentralkraftfeld** (23. KW, R. Mahnke)  
 Bewegung eines Planeten (Masse  $m$ ) um einen Zentralkörper der Masse  $M$  (Kepler–Problem, Potential ist nur abstandsabhängig). Somit Drehimpulserhaltung, Umkehrpunkte beim effektiven Potential aus Energieerhaltung. Kepler–Ellipsen (geschlossene Bahnkurven, Bindungszustände) beim Gravitationspotential, im allgemeinen nichtgeschlossene Bahnkurven in einem ringförmigen Gebiet.
11. **Diffusion** (24. KW, R. Mahnke)  
 Original–Arbeit von Albert Einstein 1905 (Annalen der Physik), Diffusionsgleichung (1dim) und Lösung der Diffusionsgleichung, zeitliche Entwicklung des Dichteprofiles
12. **Elektrodynamik I** (25. KW, R. Mahnke)  
 Grundbegriffe der klassischen Elektrodynamik (u. a. skalare und vektorielle Feldfunktionen); wichtige Entwicklungsetappen (Coulomb, Oersted, Faraday, Maxwell); Symbole und SI–Einheiten (m, kg, s, A, K, mol, cd); Punktladung; Coulomb–Kraft zwischen zwei Punktladungen; Ladungserhaltung (Ladungsdichte, Stromdichtevektor); elektrische und magnetische Feldvektoren (Feldlinien); Maxwellgleichungen; Ohmsches Gesetz; Lorentz–Kraft; Vektorfeld ist durch seine Quellen und Wirbel bestimmt.

13. **Elektrodynamik II** (26. KW, R. Mahnke)  
Grundgleichungen der Elektrodynamik sind als Maxwell-Gleichungen bekannt. Sie bestehen aus Quellen- und Wirbelgleichungen fuer das elektrische und das magnetische Feld. Äquivalenz zwischen lokaler (bzw. differentialer) und globaler (bzw. integraler) Formulierung. Materialgleichungen als Zusatzbeziehungen. Ladungserhaltung (Kontinuitätsgleichung) wird durch die Maxwellgleichungen erfüllt.
14. **Elektrodynamik III** (27. KW, R. Mahnke)  
Selbststudium und Lösung der Hausaufgabe zur Elektrostatik
15. **Elektrodynamik IV** (28. KW, R. Mahnke)  
Elektrostatik und Magnetostatik. Lösung der Hausaufgabe zur homogen geladenen Kugel. Berechnung des elektrischen Potentials und des elektrischen Feldes.

Zusammenfassung und Kontrollfragen Elektrodynamik