Gerlinde Brigitte Eberle
LA Haupt- und Realschulen
Mathematik/ Physik/ Informatik
Mat.-Nr.: 210204233
E-Mail: gerlinde.eberle@uni-rostock.de

Institut für Physik

Realexperiment zum symmetrischen Zufallswanderer

Einführung in die Theoretische Physik

Privat-Dozent Dr. Reinhard Mahnke

Aufgabe

Machen Sie ein diskretes Diffusionsexperiment mittels Münzwurf.

Ermitteln Sie bei 10 Würfen (bzw. bei 10 Schritten) und bei 20 und anschließend bei 50 Realisierungen den Mittelwert und die Varianz.

Vergleichen Sie die erhaltenen Resultate mit der Theorie des Zufallswanderers.

Physikalische Grundlagen

Die diskrete Diffusion befasst sich ausschließlich mit Prozessen ohne Drift. In diesem Fall geht es nur um den eindimensionalen Zufallswanderer. Es wird die zufällige Bewegung von Teilchen betrachtet. Das heißt die Wahrscheinlichkeit des Teilchens nach links zu hüpfen ist genauso groß wie nach rechts zu hüpfen. Die Teilchen bewegen sich damit auf zufälligen Trajektorien. Der Zeitschritt ist diskret und es existiert nur ein Grundschritt. Die Bewegungsgleichung sieht für den Zufallswanderer so aus:

$$P(m, n+1) = q \cdot P(m+1, n) + p \cdot P(m-1, n)$$

Hierbei wird die Wahrscheinlichkeit von Teilchen zum nächsten Zeitpunkt am Ort m zu sein beschrieben. Sie berechnet sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeit q (nach links hüpfen) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit P am Orte m+1 und der Wahrscheinlichkeit p (nach rechts hüpfen) multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit P am Orte m-1 zum Zeitpunkt n zu sein. Es wird die Zukunft aus der Gegenwart berechnet (Gegenwart aus Vergangenheit).

Die Anfangsbedingung ergibt sich aus:

$$P(x_n, t_n = 0) = \delta_{x_m, x_0} = \begin{cases} 1 \; \text{für } x = 0 \\ 0 \; \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung durch die Fourier Transformation ist die Binominalverteilung.

$$P(m, n) = \frac{n!}{\left(\frac{n+m}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2}\right)!} \cdot p^{\left(\frac{n+m}{2}\right)} \cdot q^{\left(\frac{n-m}{2}\right)}$$

Die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Definition $\quad < m^k > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m^k \cdot P(m, n)$

0. Moment: (k=0) ist die Normierung

$$< m^0 > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m^0 \cdot P(m, n)$$

$$1 = \sum_{m=-n}^{+n} P(m, n)$$

Das heißt die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss immer 1 sein.

1. Moment: (k=1) ist der Mittelwert oder Schwerpunkt

$$< m > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m \cdot P(m,n) = 2 \cdot n \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)$$

Es besteht eine lineare Zeitabhängigkeit.

2. Moment: (k=2)

$$< m^2 > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m^2 \cdot P(m,n) = 4 \cdot n \cdot p \cdot q + 4 \cdot n^2 \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$$

Varianz: Breite der Verteilung

$$(\Delta m)(n) = \sqrt{< (m - < m >)^2 >} = \sqrt{< m^2 > - < m >^2} = \sqrt{4 \cdot n \cdot p \cdot q}$$

Ein anschauliches Beispiel ist das Werfen mit einer idealen Münze (die Chance für Kopf oder Zahl liegt jeweils bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,5). Dieser Versuch wird in der theoretischen Physik der diskreten Diffusion zugeordnet. Bei einem Münzwurfexperiment handelt es sich um einen eindimensionalen Zufallsprozess.

Urliste

10 Würfe:

1001110001
1101110101
0101111010
1011111011
0111111010
1001110101
1010110101
1111011100
1001100110
0101001011
1101010010
0001101111
0010001101
1110010101
0001111011
0001001001
1011001100
1011111111
1111111111
1101000000
1100101100
0001110111
1010011110
1011010000
0111100111
1011010110
1000110110
0101001010
0010000101
1111100111

20 Würfe:
00001111111111000111
10111111001010111010
10101100010010100000
00010110100111100000
01011011010110000100
01110110101101001101
01001010001010010110
11110101011100000010
11011010010010010110
11111100101000111001
10001100011111100111
00100101100000101000
01110001001110101001
01001001100011100101
10010101010110100110
10100110111010001001
10000011010000111101

10010100001101100101
11101100111010000110
00011101001000101010
11000100101101100110
01100000001011100111
01000101100000101001
11110111111000011111
11111110100100011101
11100000100101000010
00000011110100000110
11110100001010100010
11010101111101010110
10010010101111011101

50 Würfe:
10010001001010011110011010100100011010010111000001
11011101011101111000010110111111101010010100011000
11001010000001010010100110100101010011001010000000
01011000110101000101011111011111110011011000101100
10000001011100100111111110111001111000111011101111
11011111011111111001011111001110001011011111010010
00000100110110001101111101110010100011100101111001
11101001000010010011111111101000101001000000100111
10011001010001000011011100101011011010011001010110
01110101010111111110101111001100100110010110101111
11111010111010000010011100100010111011010100000100
01101000010000100101110011110000111101110110000100
10011111111010001100100011001001111001111000011101
11000010100110101001110001000111100100110000000110
11101010010101101011101101100100101110000011111000
11110101100110101100101000011010110001101000001101
11000011110100000011000100011111010000100101111100
11100111000100111111110110010111110001110011011110
00000011000110110100011000111010110010100100000100
00000010101111000101001000110001001011111010110001
01100010000001110101100100101010011010000100011010 0
10001110001000010111010010100010001000100011111110
01111111011001011111101001010011100000100101101000
00111011001100100100111000110101011110001101011001
10010101111101101100111011110000100001000001111000
11000110000010001111001101101101110010000010000110
01001100000101111011110101000100001110011100001100 1
00111111010111101110010000101010000101011101010011
11100011011100010100000111010111011101010000001001
00010111100010010101001111110000110111101110111111

Experimenteller Aufbau und Durchführung

Es soll mit einer Münze geworfen werden und in richtiger Reihenfolge Zahl und Kopf protokolliert werden. Dies ist für Messreihen mit 10, 20 und 50 Würfen durchzuführen. Es wurden jeweils 30 Versuchsreihen durchgeführt. Der Versuch wurde mit einem echten Zufallszahlengerator durchgeführt.

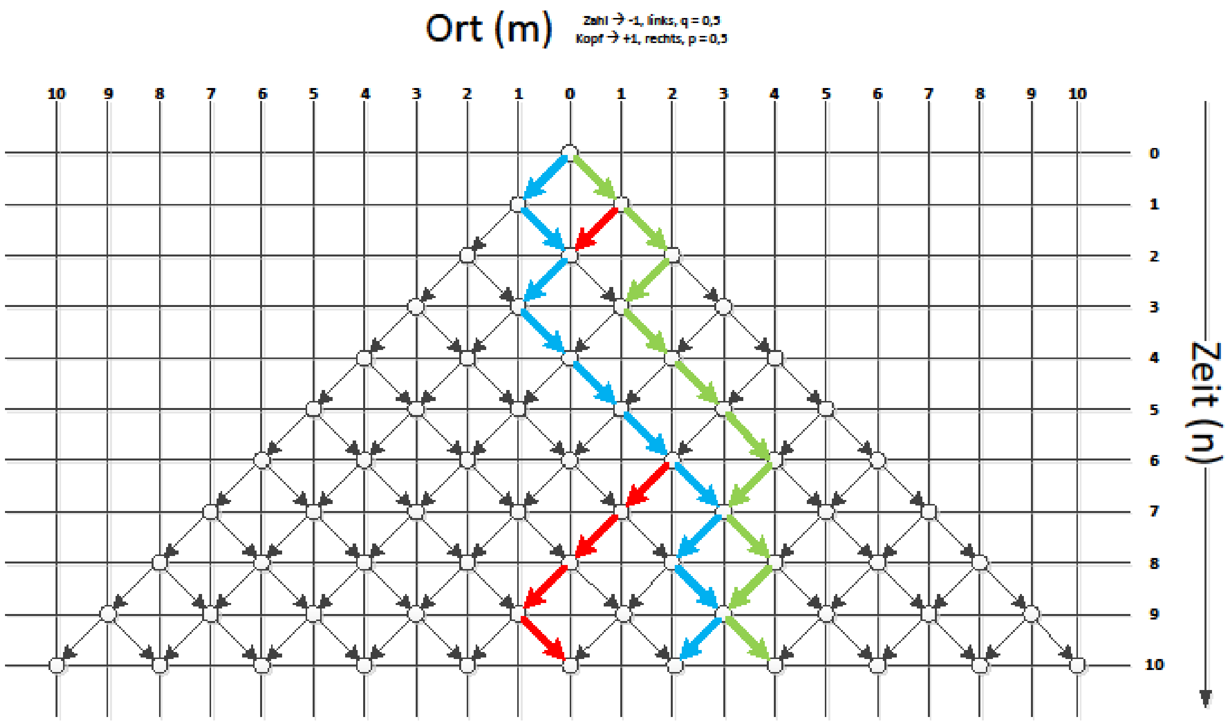
Quelle ist das /dev/random Interface des Linux Kernel. Die Richtigkeit und Echtheit der Zufallszahlen wird unter http://man7.org/linux/man-pages/man4/random.4.html angegeben.

Es wurden 30 Messreihen zu je 10 Würfen, 30 Messreihen zu je 20 Würfen und 30 Messreihen zu je 50 Würfen aufgenommen. Diese sind im Anhang auf der Urliste einzusehen.

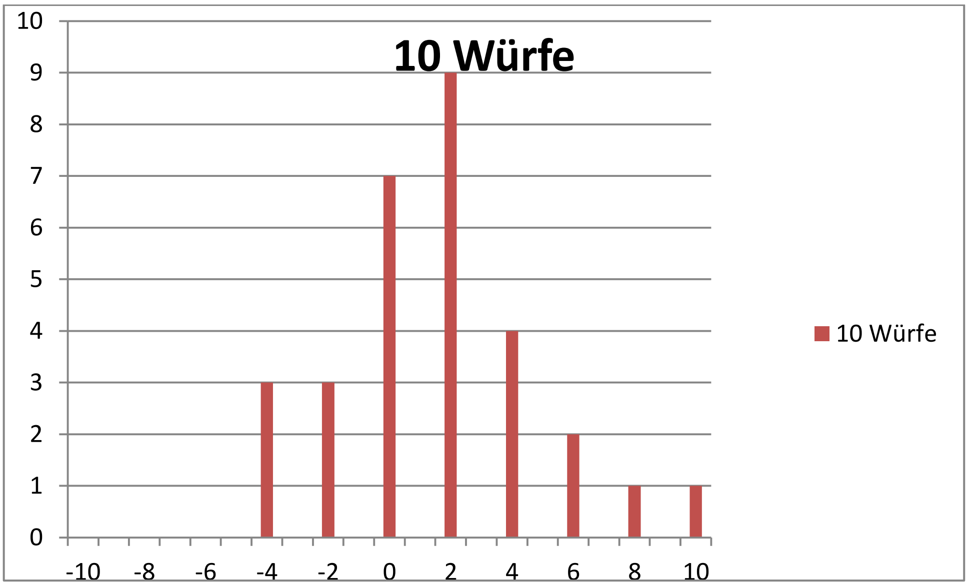
Eine 1 steht für das Ergebnis Kopf und wird mit +1 im Diagramm eingezeichnet. Also geht der Zufallswanderer einen Schritt nach rechts. Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei 0,5. Zahl ergibt sich aus der 0 in der Urliste und steht für den Schritt nach links des Zufallswanderers. Auch diese Wahrscheinlichkeit liegt bei 0,5.

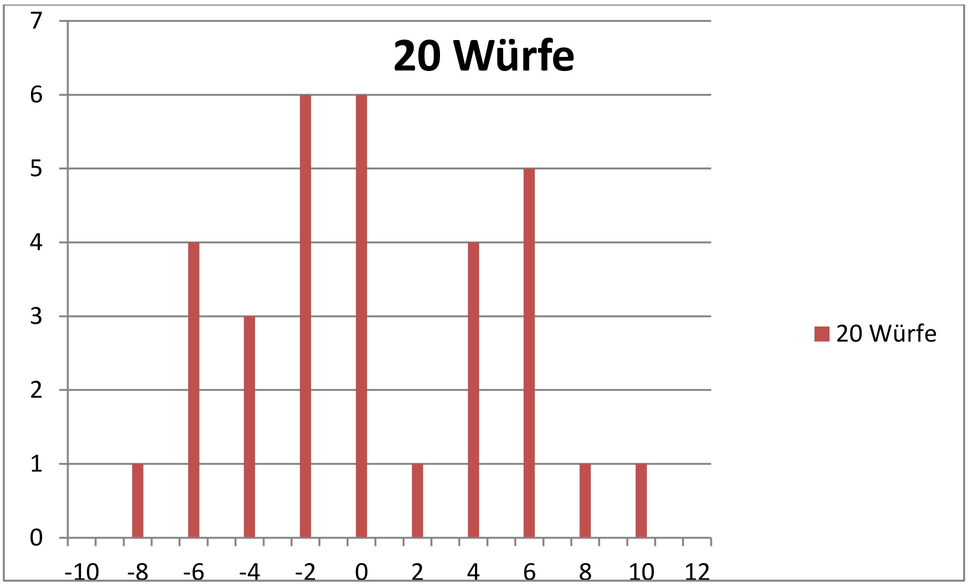
Resultate

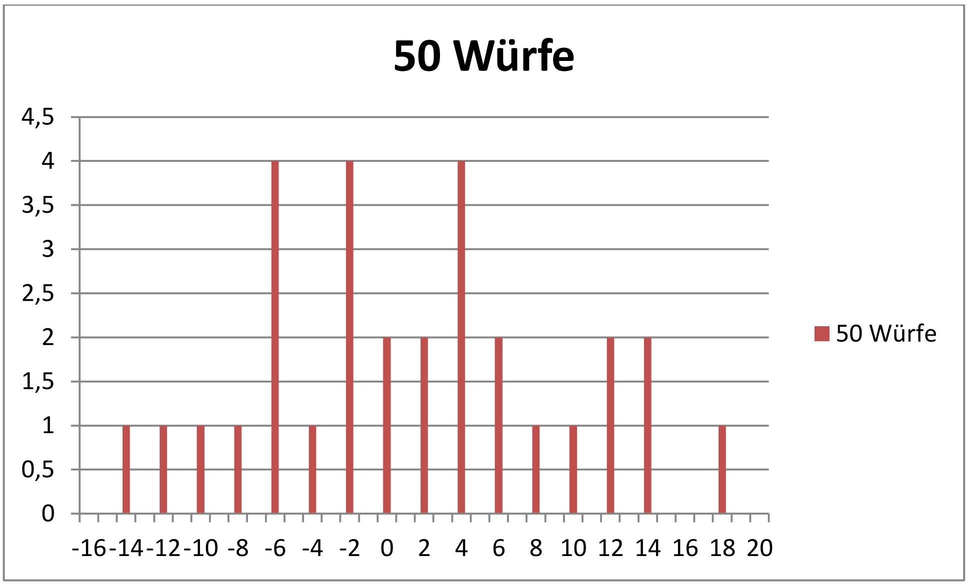
In der folgenden Grafik werden die ersten drei Ergebnisse der Messreihe mit 10 Würfen dargestellt, diese werden der Urliste entnommen.



Anschließend werden die Messreihen entsprechend ausgewertet. Man zählt bzw. berechnet an welcher Stelle sich der Zufallswanderer nach 10 Zeitschritten befindet. Hieraus werden Säulendiagramme erstellt.


10 Würfe
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10
10 Würfe


20 Würfe
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12
20 Würfe


50 Würfe
4,5
4
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-16 -14 -12 -10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
50 Würfe

Um die geforderten Größen zu berechnen muss die relative Häufigkeit für das Auftreten des jeweiligen Falles berechnet werden. Dies wird exemplarisch für den Versuch mit 10 Würfen gezeigt.

$$h_r(A) = \frac{H_r(A)}{r}$$

r steht für die Anzahl an durchgeführten Messungen
$H_r(A)$ ist die absolute Häufigkeit

$$h_{30}(A) = \frac{0}{30}$$

A steht hierbei für alle ungeraden Zahlen von -10 bis 10 und für -10, -8, -6.
Für diese Werte kommt in dieser Versuchsreihe immer 0 heraus, deswegen werden sie in allen weiteren Berechnungen vernachlässigt. Da es sich im weiteren Verlauf immer um Summen handelt ist dies ohne Einfluss auf das Endergebnis möglich.

$$h_{30}(-4) = \frac{3}{30}$$
$$h_{30}(-2) = \frac{3}{30}$$

$$h_{30}(0) = \frac{7}{30}$$
$$h_{30}(2) = \frac{9}{30}$$
$$h_{30}(4) = \frac{4}{30}$$
$$h_{30}(6) = \frac{2}{30}$$
$$h_{30}(8) = \frac{1}{30}$$
$$h_{30}(10) = \frac{1}{30}$$

Bei allen weiteren Rechnungen wird auf das ausführliche Aufschreiben aller Rechnungen verzichtet. Es wird alles für 10 Würfe ausführlich berechnet. Die Rechnungen für 20 und 50 Würfe folgen analog.

10 Würfe

<u>1.Moment/Mittelwert</u>

$$< m > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m \cdot P(m,n) = 2 \cdot n \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)$$

Theorie: Es gilt p=q= 0,5

$$< m > (10) = 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$< m > (10) = 0$$

Praxis:

$$< m > (10) = \frac{3}{30} \cdot -4 + \frac{3}{30} \cdot -2 + \frac{7}{30} \cdot 0 + \frac{9}{30} \cdot 2 + \frac{4}{30} \cdot 4 + \frac{2}{30} \cdot 6 + \frac{1}{30} \cdot 8 + \frac{1}{30} \cdot 10$$
$$< m > (10) = \frac{23}{15}$$

<u>2.Moment</u>

$$< m^2 > (n) = \sum_{m=-n}^{+n} m^2 \cdot P(m,n) = 4 \cdot n \cdot p \cdot q + 4 \cdot n^2 \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)^2$$

Theorie: Es gilt p=q=0,5

$$< m^2 > (10) = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 10^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$
$$< m^2 > (10) = 10$$

Praxis:

$$< m > (10) = \frac{3}{30} \cdot (-4)^2 + \frac{3}{30} \cdot (-2)^2 + \frac{7}{30} \cdot 0^2 + \frac{9}{30} \cdot 2^2 + \frac{4}{30} \cdot 4^2 + \frac{2}{30} \cdot 6^2 + \frac{1}{30} \cdot 8^2 + \frac{1}{30} \cdot 10^2$$
$$< m > (10) = \frac{66}{5}$$

<u>Varianz</u>

$$(\Delta m)(n) = \sqrt{< (m - < m >)^2 >} = \sqrt{< m^2 > - < m >^2} = \sqrt{4 \cdot n \cdot p \cdot q}$$

Theorie: p=q= 0,5

$$(\Delta m)(10) = \sqrt{4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$
$$(\Delta m)(10) = \sqrt{10}$$

Praxis:

$$(\Delta m)(10) = \sqrt{\frac{66}{5} - \left(\frac{23}{15}\right)^2}$$
$$(\Delta m)(10) = \sqrt{\frac{2441}{225}}$$

20 Würfe

1.Moment/Mittelwert

Theorie: $< m > (20) = 0$

Praxis: $< m > (20) = -\frac{2}{15}$

2.Moment

Theorie: $< m^2 > (20) = 20$

Praxis: $< m^2 > (20) = \frac{296}{15}$

Varianz

Theorie. $(\Delta m)(20) = \sqrt{20}$

Praxis: $(\Delta m)(20) = \sqrt{\frac{4436}{225}}$

50 Würfe

1.Moment/Mittelwert

Theorie: $< m > (50) = 0$

Praxis: $< m > (50) = \frac{4}{3}$

2.Moment

Theorie: $< m^2 > (50) = 50$

Praxis: $< m^2 > (50) = \frac{332}{5}$

Varianz

Theorie. $(\Delta m)(50) = \sqrt{50}$

Praxis: $(\Delta m)(50) = \sqrt{\frac{2908}{45}}$

Auswertung

Der Mittelwert oder auch erstes Moment genannt liegt für 10 Würfe bei circa 1,53, dies ist auch gleichzeitig eine große Abweichung von 1,53. Bei 20 Schritten relativiert sich diese schon zu einer Differenz von rund 0,13. Die Abweichung ist klein und wenn mehr als 30 Versuche durchgeführt werden, wird diese sich fortlaufend der Theorie von 0 annähern. Bei dem Versuch von 50 Zeiteinheiten sollte sich der Mittelwert nach 30 Durchgängen eigentlich noch viel näher an 0 liegen. Dies ist in meinem Beispiel jedoch nicht der Fall. Das erste Moment liegt bei circa 1,3 und entspricht damit nicht den gewünschten Erwartungen. Dies kann an einer schlechten Messreihe von 30 Durchführungen liegen. Besser wäre es für alle drei Experimente über 100 Versuche durchzuführen. Denn nun würden sich die Abweichungen deutlich verkleinern.

Bei 50 Würfen kam nicht die erwartete kleinere Abweichung heraus, dies ist bei einem Zufallsexperiment gar nicht so undenkbar. Es handelt sich um ein Realexperiment für den Zufallswanderer. Hierbei kann der Zufall bei 30 Durchführungen zuschlagen und das Ergebnis von der Theorie abweichen lassen.

Auch bei der Varianz sollte dieser Trend erkennbar sein. Die Abweichung von der Theorie beträgt für den ersten Versuch mit 10 Würfen circa 0,13. Bei dem zweiten Versuch sind es nur 0,01 und bei 50 Würfen ist die Differenz 0,97. Das am weitesten von der Theorie abweichende Ergebnis zeigt also der Versuch, der eigentlich das beste Ergebnis zeigen sollte. Dies könnte wie schon gesagt an schlechten Messreihen liegen. Wenn man nun deutlich mehr Messreihen aufnehmen würde, würde sich die Abweichung verkleinern und sogar gegen 0 streben.

Damit hat das Realexperiment die Theorie in 2 von 3 Fällen bestätigt. Wenn man nun, deutlich mehr als 30 Messreihen dokumentieren würde, so wird die Abweichung verschwindend gering und die Theorie ist in 3/3 Fällen bestätigt.