
Mathematische Hilfsmittel für Lehramt und Beifach

PD Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557 (2 SWS V + 2 SWS Ü)

Mittwoch 7.00 bis 9.00 Uhr, Seminarraum HG306
Freitag 7.00 bis 9.00 Uhr, Seminarraum HG306
Wintersemester 2007/08

Inhaltsangabe:

1. **Komplexe Zahlen I** (17.10.2007, R. Mahnke)
Definition $z = x + iy$ und Darstellung in Zahlenebene, Verweis auf Vektoren, Grundrechenarten, bei Division Erweiterung mit konjugiert komplexer Zahl, Polardarstellung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen
2. **Komplexe Zahlen II** (19.10.2007, R. Mahnke)
Nullstellen einer komplexen Funktion (Beispiel: Lösung einer quadratischen Gleichung $z^2 - 2i = 0$), Euler-Formel, z. B.
 $z = 1 + i = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$
Übungsaufgaben Serie 1
3. **Komplexe Zahlen III** (24.10.2007, R. Mahnke)
Wiederholung: $z = x + iy = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r \exp(i\phi)$
Potenzen z^n mittels Moivre-Formel berechnen; Komplexe Funktion

$w = f(z)$ als Abbildung von Definitionsbereich auf Bildbereich; Definition der (ersten) Ableitung einer komplexen Funktion als Differentialquotient (\neq Differenzenquotient); Potenzreihe der komplexen Exponentialfunktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! = e^z$$

4. **Komplexe Zahlen IV** (26.10.2007, R. Mahnke)

Nachweis, dass Potenzreihe $e^{\pm iy}$, sortiert nach Real- und Imaginärteil, $\cos y \pm i \sin y$ ergibt (Euler-Formel). Periodizität der komplexen e-Funktion; komplexe Darstellung von trigonometrischen Funktionen; Hyperbelfunktionen; Verweis auf komplexe Darstellung von Schwingungen und Wellen

Übungsaufgaben Serie 2

5. **Feiertag** (31.10.2007)

6. **Komplexe Gleichung I** (02.11.2007, R. Mahnke)

Lösung einer quadratischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten in Normalform $z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$. Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i y_{1,2}$. Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real- und Imaginärteil.

Newton-Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen $f(x)$ mittels $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. Grafische Herleitung und Erläuterung an Hand eines Beispiels.

7. **Komplexe Gleichung II** (07.11.2007, R. Mahnke)

Wiederholung Newton-Iteration zur Berechnung von Nullstellen am Beispiel der reellen Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$; Erläuterung eines Computerprogramms zur numerischen Ermittlung der (einzigen) Nullstelle $x_{st} = 0.5$.

Übertragung des Newton-Verfahrens in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $f(z)$. Analytische Berechnung der Nullstellen von Potenzfunktionen ersten bis vierten Grades $f(z) = z^m - 1$ mit $m = 1, 2, 3, 4$. Diskussion an Hand der kubischen Gleichung ($m = 3$) über die Existenz von drei Nullstellen auf dem Einheitskreis, deren mögliche Einzugsgebiete begrenzt durch Trennkurven (Separatrix).

Übungsaufgaben Serie 3

8. **Komplexe Gleichung III** (09.11.2007, R. Mahnke)

Berechnung der drei Nullstellen z_k mit $k = 0, 1, 2$ der kubischen Gleichung $z^3 - 1 = 0$ mittels $z_k = \exp\{i 2\pi/3 k\}$ zu $z_0 = 1$ und $z_{1,2} = -1/2 \pm$

$i\sqrt{3}/2$. Anwendung eines Computerprogramms auf Basis der Newton-Iteration zur numerischen Berechnung der Nullstellen und deren Einzugsgebiete. Frustration im Koordinatenursprung (Dreieckspunkt, Buridans – Esel – Problem), fraktale Ränder der Einzugsgebiete, alle Dreieckspunkte (Punkte, die zu keiner Nullstelle konvergieren, sondern divergieren) bilden ein Fraktal, genannt Julia-Menge.

Übungsaufgaben Serie 4

9. **Vektorrechnung I** (14.11.2007, R. Mahnke)

Grundbegriffe zum Vektor (z. B. Ortsvektor) und Skalar- bzw. Vektorfeld; Beispiele wie Temperatur- oder Kraftfeld; Einheitsvektoren als Basis; Differentiation (als Richtungsableitung) von Feldern; Gradient eines Skalarfeldes ergibt ein Vektorfeld.

10. **Fraktale** (16.11.2007, R. Mahnke)

Studentenpräsentationen zu Fraktalen

- (a) Anke Palentschus: *Fraktale – Eigenschaften und Beispiele*
Begriffe wie fraktale Dimension, Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz, Julia Menge, Mandelbrot Iteration, Sierpinski Dreieck, Koch-Kurve bzw. Schneeflocke, etc
- (b) Maxi Brandt: *Fraktale in der Kunst*
Mathematische Fraktale werden durch die Hand des Künstlers modifiziert, insbesondere durch Einsatz von Farben oder zufälligen Elementen, siehe Werke von Karin Kuhlmann bzw. Fraktale auf de.wikipedia.org oder Fractals on en.wikipedia.org
- (c) Sarah Leck: *Fraktale in der Natur*
Vollständige (Mathematik) oder partielle (Natur) Selbstähnlichkeit; Länge einer Küstenlinie hängt vom Massstab ab; viele Beispiele fraktaler Strukturen in der Biologie: Romanesko, Muschel, Kaktus, Blattadern, Farne (Barnsley-Farn mittels affiner Abbildungen)
- (d) Felix Haak: *Newton-Iteration – Julia Menge*
Lösung einer Übungsaufgabe zur Berechnung des Julia-Punktes auf der reellen Achse, der durch genau eine Iteration auf den Koordinatenursprung führt und somit divergiert

11. **Vektorrechnung II** (21.11.2007, R. Mahnke)

Vektoren und deren Verknüpfungen (Skalarprodukt, Vektorprodukt); Komponentendarstellung eines Vektors; Eigenschaften der Einheitsvektoren; Bedeutung von Feldfunktionen, u. z. Skalarfeld und Vektorfeld;

Beispiele für Felder in der Physik (z. B. Temperaturfeld, Gravitationsfeld).

12. **Vektoranalysis I** (23.11.2007, R. Mahnke)

Differentiation von Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation; Benutzung des Nablaoperators; Unterscheidung zwischen konservativen und nicht-konservativen (dissipativen) vektorellen (Kraft-)Feldern und deren Darstellung mittels (skalarer) Potentialfunktion.

Beispiel-Aufgabe:

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{A} = (2xy + z^3) \vec{i} + (x^2 + 2y) \vec{j} + (3xz^2 - 2) \vec{k} ,$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob $\text{rot } \vec{A} = 0$ gilt) und berechnen Sie danach die Skalarfunktion $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{A} = -\text{grad } \varphi .$$

Führen Sie eine sinnvolle Normierung durch.

13. **Vektoranalysis II** (28.11.2007, R. Mahnke)

Einführung des Laplace-Operators als skalares Produkt des Nabla-Operators; Hinweis auf Wellengleichung (Laplace-Gleichung); Approximative Lösungsmethoden (Testfunktion als Ansatz, Numerik); Integration von Vektorfunktionen entlang einer Raumkurve (Kurvenintegral); Verweis auf Wegabhängigkeit von Kurvenintegralen.

14. **Vektoranalysis III** (30.11.2007, R. Mahnke)

Übung zur Differentiation und Integration von Vektorfeldern, insbesondere zur Berechnung von Kurvenintegralen.

Übungsaufgaben Serie 5

15. **Differentialgleichungen I** (05.12.2007, R. Mahnke)

Wiederholung Differentialquotient und Vergleich mit Differenzenquotient; Beispiel: Kugelvolumen; Einführung des Begriffs Differentialgleichung n -ter Ordnung; Spezialfälle (Differentialgleichungen 2. Ordnung).

16. **Differentialgleichungen II** (07.12.2007, R. Mahnke)

Diskussion der Aussage, dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung genau n Integrationskonstanten enthält. Verweis auf die Newton-Gleichung (vektorielle Bewegungsgleichung der Mechanik) als spezielle Differentialgleichung 2. Ordnung bzw. von zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Übungsaufgaben Serie 6

17. **Differentialgleichungen III** (12.12.2007, R. Mahnke)
Wiederholung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf (Newton–) Bewegungsgleichung als Anfangswertproblem; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode.
18. **Differentialgleichungen IV** (14.12.2007, R. Mahnke)
Übung zur Lösung von Differentialgleichungen an folgendem Beispiel: Integrieren der (eindimensionalen) Newton–Gleichung bei Vorgabe einer zeitabhängigen Kraft $F(t) = mg \exp(-kt)$ unter Beachtung der Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$ und $v(t = 0) = v_0$.
19. **Differentialgleichungen V** (19.12.2007, R. Mahnke)
Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); System von gekoppelten Differentialgleichungen (Matrix–Schreibweise); Superposition von homogener und partikulärer Lösung bei inhomogener Differentialgleichung; System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels Eigenwertgleichung lösen.
Übungsaufgaben Serie 7
20. **Konsultation & Selbststudium I** (21.12.2007, R. Mahnke)
21. **Konsultation & Selbststudium II** (02.01.2008, R. Mahnke)
22. **Kurvendiskussion** (04.01.2008, R. Mahnke)
Am Beispiel einer rationalen Funktion einer Variablen $y = f(x)$ wird eine Kurvendiskussion der optimalen Geschwindigkeits–Abstands–Funktion $v_{opt}(\Delta x) = v_{max} \frac{(\Delta x)^2}{D^2 + (\Delta x)^2}$ durchgeführt.
23. **Integration I** (09.01.2008, R. Mahnke)
Formulierung einer Anfangswertaufgabe zur Bewegung eines Autos auf einer ebenen Straße. Die Newton–Dynamik ist durch eine Beschleunigungs– und eine Bremskraft bestimmt, die von der Geschwindigkeit und vom Abstand zum Vorderman (zur Vereinfachung als Beispiel eine feste Mauer) abhängen.
24. **Integration II** (11.01.2008, R. Mahnke)
Lösung von Differentialgleichungen mit der Methode Trennung der Variablen am Beispiel einer Newton–Bewegungsgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen. Ermittlung der Geschwindigkeits–Zeit–Funktion beim Anfahren eines Autos mittels unbestimmter und/oder bestimmter Integration und daraus folgend die Orts–Zeit–Kurve.

25. **Integration III** (16.01.2008, R. Mahnke)
 Lösung der Differentialgleichung $d^2x/dt^2 = f(x)$ mittels Substitution und Variablentrennung mit dem Zwischenresultat $v = v(x)$. Im zweiten Schritt wird mittels Trennung der Variablen die Funktion $t = t(x)$ berechnet und anschließend invertiert. Als Beispiel zur Gewinnung der Lösung $x = x(t)$ (Weg-Zeit-Funktion) dient der Federschwinger mit einer linearen Kraft.
26. **Integration IV** (18.01.2008, R. Mahnke)
 Betrachtet wird die Bewegung eines Autos (Punktmasse m) auf einer geraden (eindimensionalen) Straße der Länge L unter dem Einfluss sowohl einer Beschleunigungs- $F_{acc} = m(v_{max} - v)/\tau$ als auch Bremskraft $F_{dec} = m(v_{opt}(\Delta x) - v_{max})/\tau$ mit der o. g. optimalen Geschwindigkeits-Abstands-Funktion $v_{opt}(\Delta x) = v_{max} (\Delta x)^2 / (D^2 + (\Delta x)^2)$ (Kurvendiskussion wurde schon durchgeführt) für zwei unterschiedliche Situationen (Kreisverkehr $\Delta x = L$ bzw. Sackgasse $\Delta x = L - x$).
 Anfangsbedingung: Zum Zeitpunkt $t = 0$ fährt das Auto am Ort $x(t = 0) = x_0 (\geq 0)$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0) = v_0 (\geq 0)$.
27. **Matrizen-Rechnung I** (23.01.2008, R. Mahnke)
 Kompakte Schreibweise von Gleichungen mittels Matrizen und Vektoren; Verknüpfungen (Addition, Subtraktion, Multiplikation) von Matrizen bzw. Vektoren; Lösung von Gleichungssystemen mittels Inversion (inverse Matrix). Mastergleichung und ihre formale Lösung.
28. **Matrizen-Rechnung II** (30.01.2008, R. Mahnke)
 Lösung des Zwei-Niveau-Systems (zufällige Übergänge zwischen zwei Zuständen) durch Berechnung der Zeitentwicklung; allgemeine Lösung als Superpositionsansatz aus Eigenvektoren und exponentiellen Funktionen; Ermittlung der Eigenwerte und den dazu entsprechenden Eigenvektoren, wobei die Vorfaktoren aus Anfangsbedingungen folgen.