Mathematische Hilfsmittel für Lehramt Haupt-/Realschule und Beifach

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557
(3 SWS V + 1 SWS Ü)

Mittwoch 7.30 bis 9.00 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Freitag 7.30 bis 9.00 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Wintersemester 2010/11

Inhaltsangabe:

1. **Komplexe Zahlen I** (13.10.2010, R. Mahnke)
   Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable x, Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der rellen Zahlen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$, Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich, bei Division Erweiterung mit der zu z konjugiert komplexen Zahl $\overline{z} = x - iy$, Polardarstellung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, Hin– und Rücktransformation zwischen karthesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α).

2. **Komplexe Zahlen II** (15.10.2010, R. Mahnke)
   Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, einfache Berechnung von Potenzen z^n durch Euler–Darstellung, 2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$)

Übungsaufgaben Serie 1 (Abgabe zum 22.10.2010)

(1a) Berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} \ .$$

(1b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^4} \ .$$

(1c) Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2i = 0 \ .$$

Hinweis: Unter Benutzung von $z = x + iy$ erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Es gibt (genau) zwei Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = (1+i, -1-i)$, die mittels Probe überprüft werden sollten.

3. **Komplexe Zahlen III** (20.10.2010, R. Mahnke)
Wiederholung komplexe Zahlen (drei Darstellungsarten $z = x + iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = r\exp(i\alpha)$). Diskussion über komplexe Funktionen $w = f(z)$ (Beispiel: komplexe Exponentialfunktion) und die Nullstellenberechnung $f(z) = 0$.
Lösung der quadratischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$z^2 + (1+i)\, z - 2(1-i) = 0 \ .$$

Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i\, y_{1,2}$. Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real– und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten. Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta:

$$z_1 + z_2 = -p \ ,$$
$$z_1 \cdot z_2 = q \ .$$

Wegen $p = 1 + i$ und $q = -2 + 2i$ lauten somit die Nullstellen

$$z_1 = -2 \ ,$$
$$z_2 = 1 - i \ .$$

4. **Komplexe Zahlen IV** (22.10.2010, R. Mahnke)
Besprechung der o. g. *Übungsaufgaben Serie 1* und Diskussion.

Übungsaufgaben Serie 2 (Abgabe zum 29.10.2010)

(2a) Was verstehen Sie unter den Nullstellen einer komplexen Funktion $w = f(z)$?

(2b) Beispiel: Lösung der folgenden quadratischen Gleichung mittels einer von Ihnen gewählten Methode

$$z^2 + (1+i)\, z - 2(1-i) = 0 \; .$$

Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i\, y_{1,2}$.

5. **Newton–Verfahren I** (27.10.2010, R. Mahnke)
Differentialquotient (erste Ableitung, Anstieg) reller Funktionen $f(x)$ als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Es gilt Taylor Entwicklung $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2$, somit

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} \; .$$

Beispiel: Berechnung der ersten Ableitung von $f(x) = x^2$ mit o. g. Definition. Hinweis auf höhere Ableitungen.
Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen (bekannt als Newton–Verfahren) lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; .$$

6. **Komplexe Zahlen V** (29.10.2010, R. Mahnke)
Studentenvortrag von Alexander Bechthold zum Thema *Darstellung einer komplexen Zahl*:
Die komplexe Zahl z hat verschiedene Darstellungsarten. Erläutern Sie diese Identitäten und zeigen Sie insbesondere mittels Reihendarstellung, dass folgendes gilt:

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i \sin\alpha \; .$$

Übungsaufgaben Serie 3 (Abgabe zum 03.11.2010)

(3a) Führen Sie eine Kurvendiskussion der reellen Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ durch. Wie lauten die Nullstellen?

(3b) Wenden Sie das Newton–Verfahren auf die Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ an und ermitteln die Nullstellen iterativ. Wählen sie unterschiedliche Startwerte. Wieviele Iterationsschritte brauchen Sie (Konvergenzrate)? Welche spezielle Eigenschaft hat der Startwert $x_0 = 0$?

7. **Newton–Verfahren II** (03.11.2010, R. Mahnke)
Studentenvortrag von MARKUS PORZIG zum Thema der *Übungsaufgaben Serie 3*. Die Newton–Iteration zur Berechnung beider Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1/2$ der reellen Funktionen $f(x) = 8x^2 - 2$ wird erläutert.

   Übertragung des Newton–Numerik in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $F(z)$. Berechnung der Nullstellen von Potenzfunktionen ersten bis vierten Grades $F(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$. Diskussion an Hand der kubischen Gleichung ($n = 3$) über die Existenz von drei Nullstellen auf dem Einheitskreis.

   Übungsaufgaben Serie 4 (Abgabe zum 10.11.2010)

   (4a) Analytische Berechnung der Nullstellen der komplexen Funktion $F(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$.

   (4b) Berechnen Sie für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$ die Newton–Iterationsformeln $z_{n+1} = N(z_n)$ getrennt nach Real– und Imaginärteil.

   (4c) ZUSATZ (Bonus):
   Betrachten Sie speziell die Iteration auf der rellen Achse ($y = 0$). Welche Punkte ($x_i < 0, y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt ($x = 0, y = 0$)?
   Berechnen Sie die Anfangsbedingung ($x_0 < 0, y_0 = 0$), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.

8. **Differentialrechnung** (05.11.2010, R. Mahnke)
Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten (Wiederholung); Differentiationsregeln und Ableitungen elementarer Funktionen (Schulstoff); Ableitung von mittelbaren Funktionen mittels Kettenregel; Beispiele dazu; Ableitung einer impliziten Funktion; Differential einer Funktion; totales Differential einer mehrdimensionalen Funktion, geschrieben mit partiellen (∂) Ableitungen; höhere Ableitungen; Bedeutung der (ersten und zweiten) Ableitungen in der Physik.

9. **Newton–Verfahren III** (10.11.2010, R. Mahnke)
Besprechung der o. g. *Übungsaufgaben Serie 4* und Diskussion.
Das Ergebnis von Aufgabe 4b) lautet für den Realteil

$$x_{n+1} = N_{Re}(x_n, y_n) \text{ mit } N_{Re}(x, y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und für den Imaginärteil

$$y_{n+1} = N_{Im}(x_n, y_n) \text{ mit } N_{Im}(x,y) = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

10. **Integralrechnung I** (12.11.2010, R. Mahnke)
Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.

11. **Keine Lehrveranstaltungen** (17.11.2010 + 19.11.2010)

12. **Newton–Verfahren IV** (24.11.2010, R. Mahnke)
Studentenvortrag von Karsten Böger zum Thema *Realisierung des Newton-Algorithmus auf dem Computer*.
Studentenvortrag von Eoin Barrett zum Thema *Berechnung des ersten Verzweigungspunkts auf negativer reeller Achse* (siehe Aufgabe 4c).
Studentenvortrag von Paul Blank zum Thema *Selbstähnlichkeit und Fraktale*. Was bedeutet das sog. Apfelmännchen?

13. **Integralrechnung II** (26.11.2010, R. Mahnke)
Übung zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels partieller Integration; Beispiele sind $\int xe^x\,dx$, $\int \cos^2 x\,dx$ und $\int \ln x\,dx$.

Übungsaufgaben Serie 5 (Abgabe zum 01.12.2010)

(5a) Lösen Sie mittels Variablentransformation:

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

und

(5b)

$$I_2 = \int \cos x\,\sin^2 x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

(5c) Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$I_3 = \int_a^b x\,\cos x\,dx = (x\sin x + \cos x)\Big|_a^b$$

(5d) Lösen Sie mittels zweimaliger partieller Integration:

$$I_4 = \int x^2\,e^{-x}\,dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$$

(5e) Informieren Sie sich über numerische Integration. Wie lautet die Trapezregel im Gegensatz zur Simpson–Formel?

(5f) Was ist ein Kurvenintegral?

14. **Vektoren (Algebra) I** (01.12.2010, R. Mahnke)
Physikalische Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor. Verknüpfung von Vektoren: (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$) und (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$). Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

15. **Vektoren (Algebra) II** (03.12.2010, R. Mahnke)
Darstellung des Skalarprodukts in kartesischen Koordinaten, Betrag eines Vektors, Einheitsvektoren stehen senkrecht aufeinander, somit gilt $\vec{e_x}\cdot\vec{e_y} = 0$. Berechnung des Vektorprodukts in kartesischen Koordinaten, Nutzung von Determinanten– bzw. Matrizen–Schreibweise. Berechnung ergibt $\vec{e_x} \times \vec{e_x} = \vec{0}$ und $\vec{e_x} \times \vec{e_y} = \vec{e_z}$.

16. **Vektoren (Analysis) I** (08.12.2010, R. Mahnke)
Vortrag der Studentin Stefanie Grosse zum Thema *Gradient*.
Begriff des Gradienten grad f: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $f(x, y, z) = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie) und Kraft.
Begriff der Divergenz div $\vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelldichte. Beispiel: $\operatorname{div}\vec{r} = 3$. Verweis auf den Vektoroperator Nabla ∇ (in kartesischen Koordinaten).

17. **Vektoren (Analysis) II** (10.12.2010, R. Mahnke)
Wiederholung des Gradienten und der Divergenz in Nabla–Schreibweise. Verwendung verschiedener Koordinatensysteme, somit Benutzung des Vektoroperators Nabla in Zylinder– bzw. Kugelkoordinaten.
Begriff der Rotation rot $\vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.
Hinweis auf Kurvenintegrale (Integration entlang einer Kurve).

18. **Vektorrechnung I** (15.12.2010, R. Mahnke)
Übung zur Vektorrechnung (Teil 1 als Hausarbeit).

Übungsaufgaben Serie 6 (Abgabe zum 17.12.2010)

(6a) Koordinatentransformationen:
Stellen Sie für kartesische, Zylinder– und Kugelkoordinaten folgende Formeln zusammen:

- Ortsvektor $\vec{r}$
- Differential $d\vec{r}$
- Nabla ∇
- Berechnen Sie $\operatorname{grad} \vec{r}^{\,2}$.

(6b) Kartesische Koordinaten:
Zeigen Sie, dass das Vektorfeld (Kraft) $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\,\vec{e_x} + (x^2 + 2y)\,\vec{e_y} + (3xz^2 - 2)\,\vec{e_z}\ ,$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ gilt) und berechnen Sie anschliessend die Skalarfunktion (potentielle Energie) $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi\ .$$

Skizzieren Sie sowohl das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ (durch Feldvektoren) als auch das Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$ (durch Äquipotentialkurven).

(6c) Sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten):
Gegeben sei das Vektorfeld der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = r^{-3}\left(2\cos\vartheta\,\vec{e_r} + \sin\vartheta\,\vec{e_\vartheta}\right)\ .$$

Ist das Feld wirbelfrei? Wenn ja, ist das Potential $U(r, \vartheta, \varphi)$ so zu bestimmen, dass $\vec{v} = -\nabla U$ gilt.

19. **Vektorrechnung II** (17.12.2010, R. Mahnke)
Übung zur Vektorrechnung (Teil 2 als Seminar).
Erweiterung des Integralbegriffs durch Integration von Vektorfunktionen entlang einer Kurve (Kurvenintegrale). Erläuterung des Begriffs des Kurvenintegrals anhand der zu verrichtenden Arbeit an einem Teilchen, das sich entlang einer Bahn in einem Vektorfeld (Kraftfeld) bewegt. Diskussion der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals bei wirbelfreien Feldern.

20. **Vektorrechnung III** (05.01.2011, R. Mahnke)
Übung zur Vektorrechnung (Teil 3 als Besprechung der Übungsaufgaben Serie 6).
Vortrag der Studentin Fanny Schäpe zum Thema *Koordinatensysteme* (Aufgabe 6a).
Vortrag des Studenten Sebastian Risser zum Thema *Skalar- und Vektorfeld* (Aufgabe 6b).
Das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ ist wirbelfrei. Das Potential lautet

$$\varphi(x, y, z) = -x^2 y - xz^3 - y^2 + 2z + C \ .$$

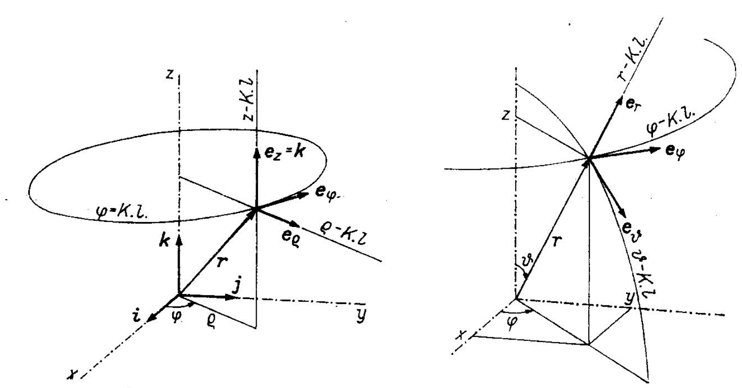

Abb. 7.7
Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z

Abb. 7.8
Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

Abbildung 1: Koordinatensysteme: Zylinder- (links) und Kugelkoordinaten (rechts).

21. **Vektorrechnung IV** (07.01.2011, R. Mahnke)
Berechnungen in Kugelkoordinaten (Aufgabe 6c).
Das Vektorfeld $\vec{v}(r, \vartheta, \varphi)$ ist wirbelfrei. Das Potential lautet

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\cos \vartheta}{r^2} + C \ .$$

22. **Gleichungssysteme** (12.01.2011, R. Mahnke)
Wechsel des Koordinatensystems als Punkttransformation (z. B. zweidimensionale kartesische Korrdinaten in Polarkoordinaten). Diese allgemeine d-dimensionale Variablen-Transformation ist fast immer lokal umkehrbar und wird über eine sog. Funktionalmatrix beschrieben. Die Determinante dieser Matrix (Funktionaldeterminante) ist bei der Berechnung von Volumenintegralen zu berücksichtigen, beispielsweise zur Ermittlung des Kugelvolumens als dreidimensionales Integral in Kugelkoordinaten.

23. **Differentialgleichungssysteme I** (14.01.2011, R. Mahnke)
Einführung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf eine einfache Bewegungsgleichung $dx/dt = \lambda x$ als Anfangswertproblem $x(t = 0) = x_0$; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode; Diskussion der ermittelten Lösung $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$. Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (auch in Matrix–Schreibweise) am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \quad ; \quad x(t = 0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dx}{dt} = -x - y \quad ; \quad y(t = 0) = y_0 \; .$$

Kennenlernen der Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, Superpositionslösung.

24. **Differentialgleichungssysteme II** (19.01.2011, R. Mahnke)
Studentenvortrag von Alexander Röher zum Thema *Zwei gekoppelte Differentialgleichungen* mit Vorstellung einer weiteren Lösungsmethode.

25. **Selbststudium** (21.01.2011)
Anfertigung einer kurzen Zusammenfassung der Lehrveranstaltung und Benennung der Schwerpunkte (max. zwei Seiten)

26. **Differentialgleichungssysteme III** (26.01.2011, R. Mahnke)
Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems (siehe 23.) in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der $x - y$—Zustandsebene.

27. **Zusammenfassung und Ausblick** (28.01.2011, R. Mahnke)
Diskussion der Schwerpunkte der Lehrveranstaltung auf Basis der von allen Teilnehmern angefertigten Zusammenfassungen.

Ausblick auf die *Einführung in die Theoretische Physik* (SS 2011):

Die Physik im Blick von Ort und Geschwindigkeit.