# Mathematische Hilfsmittel für Lehramt an Regionalen Schulen

(Lehramt an Haupt– und Realschulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

**Lehrveranstaltung Nr. 12557**
**(2 SWS V + 1 SWS Ü)**

Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Freitag 7.15 bis 8.45 Uhr, Konferenzraum Wismarsche Str. 44
Wintersemester 2011/12

## 1 Inhaltsangabe

1. **Komplexe Zahlen I** (13.10.2011, R. Mahnke)
   Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable $x$, Parameter $p, q$) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der rellen Zahlen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit $i$ mit $i^2 = -1$, Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich, bei Division Erweiterung mit der zu $z$ konjugiert komplexen Zahl $z^* \equiv \overline{z} = x - iy$.

   Im Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar. Beispiel: $z^2 - 2i = 0$ mit Lösung $z_1 = -z_2 = 1 + i$.

2. **Komplexe Zahlen II** (14.10.2011, R. Mahnke)
Polardarstellung einer komplexen Zahl $z$ mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, Hin– und Rücktransformation zwischen kartesischen $(x, y)$ und polaren Koordinaten $(r, \alpha)$.

Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl $z$ mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, einfache Berechnung von Potenzen $z^n$ durch Euler–Darstellung, $2\pi$–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$).

*Übungsaufgaben Serie 1* (Abgabe zum 19.10.2011)

(1a) Berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} \ .$$

Lösung: $z = \frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$

(1b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4} \ .$$

Lösung: $z = 1$

(1c) Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2i = 0 \ .$$

Hinweis: Unter Benutzung von $z = x + iy$ erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Es gibt (genau) zwei Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = (1 + i, -1 - i)$, die mittels Probe überprüft werden sollten.

(1d) Lösen Sie die quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$z^2 + (1 + i)\,z - 2(1 - i) = 0 \ .$$

Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i\,y_{1,2}$.
Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real– und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten. Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta:

$$z_1 + z_2 = -p \ ,$$
$$z_1 \cdot z_2 = q \ .$$

Wegen $p = 1 + i$ und $q = -2 + 2i$ lauten somit die Nullstellen

$$z_1 = -2 \, ,$$
$$z_2 = 1 - i \, .$$

3. **Komplexe Zahlen III** (19.10.2011 R. Mahnke)
Besprechung der o. g. *Übungsaufgaben Serie 1* und Zusammenfassung der drei Darstellungsarten einer komplexen Zahl $z$:

$$z = x + iy \text{ — kartesische Koordinaten ,}$$
$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ — Polarkoordinaten ,}$$
$$z = r\exp(i\alpha) \text{ — komplexe Exponentialfunktion .}$$

4. **Komplexe Zahlen IV** (21.10.2010, R. Mahnke)
Studentenvortrag von Robert Clasen zum Thema *Darstellung einer komplexen Zahl*:
Die komplexe Zahl $z$ hat verschiedene Darstellungsarten. Erläutern Sie diese Identitäten und zeigen Sie insbesondere mittels Reihendarstellung, dass folgendes gilt:

$$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \, .$$

Diskussion über komplexe Funktionen $w = F(z)$. Als Beispiel aus der Physik: komplexe Exponentialfunktion $F(z(t)) = A\exp(i\alpha)$ mit $\alpha = \omega t$. Wichtig ist die Nullstellenberechnung $F(z) = 0$. Ausblick auf die Gleichung $z^n - 1 = 0$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ .

*Übungsaufgaben Serie 2* (Abgabe zum 02.11.2011)

(2a) Differentialquotient (erste Ableitung, Anstieg) reller Funktionen $f(x)$ als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Es gilt Taylor Entwicklung $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2$, somit

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \, .$$

Berechnen Sie der ersten Ableitung von $f(x) = x^2$ mit o. g. Definition.

(2b) Führen Sie eine Kurvendiskussion der reellen Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ durch. Wie lauten die Nullstellen?

(2c) Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen (bekannt als Newton–Verfahren) lautet

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \, . \qquad (1)$$

Wenden Sie das o. g. Newton–Verfahren auf die Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ an und ermitteln die Nullstellen iterativ. Wählen sie unterschiedliche Startwerte $x_0$. Wieviele Iterationsschritte brauchen Sie (Konvergenzrate)? Welche spezielle Eigenschaft hat der Startwert $x_0 = 0$?

5. **Newton–Verfahren I** (02.11.2011, R. Mahnke)
Studentenvorträge mit den Lösungen zu den *Übungsaufgaben Serie 2*. Die Newton–Iteration zur Berechnung beider Nullstellen $x_{1,2} = \pm 1/2$ der reellen Funktionen $f(x) = 8x^2 - 2$ wird erläutert. Hinweis auf den divergenten Startwert $x_0 = 0$ (Separations- bzw. Bifurkationsstelle), der zur Frustation (Nichtentscheidbarkeit) führt.

6. **Newton–Verfahren II** (04.11.2011, R. Mahnke)
Übertragung des Newton–Numerik in die komplexe Ebene zur Nullstellenberechnung einer komplexen Funktion $F(z)$. Berechnung der Nullstellen von Potenzfunktionen ersten bis vierten Grades $F(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$. Diskussion an Hand der kubischen Gleichung ($n = 3$) über die Existenz von drei unimodularen Nullstellen $x_k = \exp{(ik2\pi/3)}$ mit $z_0 = 1$, $z_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ und $z_2 = z_1^*$ auf dem Einheitskreis.

Für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$ lautet die Newton–Iterationsformel (1) $z_{m+1} = N(z_m)$ getrennt nach Real– und Imaginärteil wie folgt

$$x_{m+1} = N_{Re}(x_m, y_m) \text{ mit } N_{Re}(x,y) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (2)$$

$$y_{m+1} = N_{Im}(x_m, y_m) \text{ mit } N_{Im}(x,y) = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \, . \qquad (3)$$

*Übungsaufgaben Serie 3* (Abgabe zum 09.11.2011)

(3a) Analytische Berechnung der Nullstellen der komplexen Funktion $F(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$.

(3b) Berechnen Sie für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$ die Newton–Iterationsformeln $z_{m+1} = N(z_m)$ getrennt nach Real– und Imaginärteil.

(3c) ZUSATZ (Bonus):
Betrachten Sie speziell die Iteration auf der rellen Achse ($y = 0$). Welche Punkte ($x_i < 0, y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt ($x = 0, y = 0$)?
Berechnen Sie die Anfangsbedingung ($x_0 < 0, y_0 = 0$), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.

7. **Newton–Verfahren III** (09.11.2011, R. Mahnke)
Besprechung der o. g. *Übungsaufgaben Serie 3* und Diskussion.
Studentenvortrag von Max Krüger zum Thema *Realisierung des Newton-Algorithmus auf dem Computer.*
Studentenvortrag von Tobias Brosowski zum Thema *Berechnung des ersten Verzweigungspunkts auf negativer reeller Achse* (siehe Aufgabe 3c).
Lösung: Startwert $x_0 = -1/2^{1/3}$ führt auf $x_1 = 0$.
Studentenvortrag von Steffen Müller zum Thema *Selbstähnlichkeit und Fraktale*. Was bedeutet das sog. Apfelmännchen?

8. **Differentialrechnung** (11.11.2011, R. Mahnke)
Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten (Wiederholung); Differentiationsregeln und Ableitungen elementarer Funktionen (Schulstoff); Ableitung von mittelbaren Funktionen mittels Kettenregel; Ableitung einer impliziten Funktion; Differential einer Funktion; totales Differential einer mehrdimensionalen Funktion, geschrieben mit partiellen ($\partial$) Ableitungen; höhere Ableitungen; Bedeutung der (ersten und zweiten) Ableitungen in der Physik. Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \mathcal{D} \, \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \; . \tag{4}$$

als Beispiel.

*Übungsaufgaben Serie 4* (Abgabe zum 23.11.2011)

(4a) Diskutieren Sie die Bedeutung der Diffusionsgleichung.

(4b) Leiten Sie die Diffusionsgleichung (anschaulich) her.
ZUSATZ (Bonus):
Study Einstein's concept of Brownian motion to derive the well–known diffusion equation (4) by reading the orginal paper „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" in Annalen der Physik 1905, pp. 549–560.

(4c) Die Lösung $p(x,t) = \ldots$ der Diffusionsgleichung ist als Gauss-Verteilung bekannt. Machen Sie die Probe. Erfüllt die Lösung die Anfangs- und Randwerte?

(4d) Überprüfen Sie die Normierung, d. h. nehmen Sie die Lösung und berechnen das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)dx$.

(4e) Bestimmen Sie den Mittelwert, d. h. nehmen Sie die Lösung und berechnen das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx$.

(4f) Bestimmen Sie die Varianz, d. h. nehmen Sie die Lösung und berechnen das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x,t)dx$.

(4g) ZUSATZ (Bonus):
Lösen Sie (mittels Ansatz oder Transformation) die Diffusionsgleichung und ermitteln die Funktion $p(x,t)$.

9. **Diffusion I + II** (23. und 25.11.2011, R. Mahnke)
Der Zufall ist sowohl im täglichen Leben als auch in der Wissenschaft allgegenwärtig. Wahrscheinlichkeitsaussagen sind wichtig. Bekannt sind sie aus der Demographie und der Versicherungsmathematik. Insbesondere in der Physik spielt der Zufall eine zentrale Rolle. Forschungen zur Physik zufälliger Prozesse sind hochaktuell. Sie reichen von der Quantenphysik bis zur Risikoabschätzung von Finanzprodukten.

Die Diffusion ist solch ein zufälliger Prozess.

Diskrete Bewegungsgleichung (Differenzengleichung, Iteration)

$$P(m,n+1) = \frac{1}{2}\,P(m-1,n) + \frac{1}{2}\,P(m+1,n)\ . \tag{5}$$

Die Lösung von (5) ist die Binomialverteilung

$$P(m,n) = \frac{n!}{[(n+m)/2]!\,[(n-m)/2]!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\ . \tag{6}$$

Kontinuierliche Bewegungsgleichung (Differentialgleichung)

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\,\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}\ . \tag{7}$$

Die Lösung von (7) ist die Gauss-Verteilung

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right)\ . \tag{8}$$

10. **Integralrechnung I** (30.11. und 02.12.2011, R. Mahnke)
Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.

*Übungsaufgaben Serie 5* (Abgabe zum 02.12.2011)

(5a) Lösen Sie mittels Variablentransformation:

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C$$

und

(5b)

$$I_2 = \int \cos x\, \sin^2 x\, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

(5c) Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$I_3 = \int_a^b x\, \cos x\, dx = (x \sin x + \cos x)\Big|_a^b$$

(5d) Lösen Sie mittels zweimaliger partieller Integration:

$$I_4 = \int x^2\, e^{-x}\, dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$$

11. **Integralrechnung II** (07. und 09.12.2011, R. Mahnke)
Übung zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels Substitution und/oder partieller Integration; Beispiele sind $\int xe^x\, dx$, $\int \cos^2 x\, dx$ und $\int \ln x\, dx$.

Erweiterung des Integralbegriffs auf mehrdimensionale Integrale. Einführung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen (siehe Themenstellungen Serie 6).

*Übungsaufgaben Serie 6* (Abgabe zum 14.12.2011)

(6a) Informieren Sie sich über numerische Integration. Wie lautet die Trapezregel im Gegensatz zur Simpson–Formel?

(6b) Was bedeutet die Integration entlang einer Kurve (Kurvenintegral)?

(6c) Berechnen Sie die Länge eines Viertelkreises mit dem Radius $R = 2$ durch Integration entlang des Kreiskurve.

(6d) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel (Radius $R$) mittels dreidimensionaler Integration

$$V = \int_{Kugel} dx\, dy\, dz \ .$$

12. **Integralrechnung III** (14., 16. und 21.12.2011, R. Mahnke)
Übung zur Berechnung von Kurvenintegralen; Berechnung der Bogenlänge eines Kreises in kartesischen Koordinaten; analoge Berechnung nach Transformation in Polarkoordinaten; Verwendung von zweidimensionalen Integralen zur Massenberechnung bei inhomogener Dichteverteilung $\rho(x, y)$

$$M = \int_{\text{Fläche}} \rho(x, y)\, dx\, dy \ .$$

Berechnung von Volumen mittels dreidimensionaler Integration; Beispiel: Volumen einer Kugel; Rechnung in kartesischen Koordinaten sehr kompliziert; nach Transformation in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung der Jakobi-Determinante wird Rechnung viel einfacher; sinnvoll bei radialsymmetrischen Körpern.

Wechsel des Koordinatensystems als Punkttransformation (z. B. zweidimensionale kartesische Korrdinaten in Polarkoordinaten). Diese allgemeine $d$-dimensionale Variablen-Transformation ist fast immer lokal umkehrbar und wird über eine sog. Funktionalmatrix beschrieben. Die Determinante dieser Matrix (Funktional- oder Jakobi-Determinante) ist bei der Berechnung von Volumenintegralen zu berücksichtigen, beispielsweise zur Ermittlung des Kugelvolumens als dreidimensionales Integral in Kugelkoordinaten.

*Übungsaufgaben Serie 7* (Abgabe zum 04.01.2012)

(7a) Studentenvortrag von Robert Clasen zum Thema *Zwei gekoppelte Differentialgleichungen*

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \qquad ; \qquad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y \qquad ; \qquad y(t=0) = y_0 \; .$$

mit Vorstellung einer Lösungsmethode.

(7b) Studentenvortrag von Max Krüger zum Thema *Integration*

$$\int dx \sin^2 x \qquad ; \qquad \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x$$

mit Vorstellung der Lösungen.

(7c) Studentenvortrag von Sven Seefeldt zum Thema *Integration*; Berechnung der Masse eines im Viertelkreis ($R = 2$) gebogenen Drahtes

$$M = \int_C ds \, \rho(x,y) \quad \text{mit} \quad \rho(x, y(x) = \sqrt{4 - x^2}) = 1 + x$$

mit Vorstellung der Lösung.

13. **Differentialgleichungssysteme I** (04.01.2012, R. Mahnke)
Einführung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf eine einfache Bewegungsgleichung $dx/dt = \lambda x$ als Anfangswertproblem $x(t = 0) = x_0$; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode; Diskussion der ermittelten Lösung $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$. Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (auch in Matrix–Schreibweise) am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y \quad ; \quad y(t=0) = y_0 \; .$$

Kennenlernen der Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, Superpositionslösung.

14. **Differentialgleichungssysteme II** (06.01.2012, R. Mahnke)
Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems (siehe 13.) in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der $x - y$—Zustandsebene.

Das transformierte Gleichungsystem ist entkoppelt

$$\frac{dr}{dt} = -r \quad ; \quad r(t=0) = r_0 \; ;$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = -1 \quad ; \quad \alpha(t=0) = \alpha_0 \; .$$

und die Lösung ist mittels elementarer Integration möglich

$$r(t) = r_0 \exp(-t) \; ;$$
$$\alpha(t) = -\,t + \alpha_0$$

bzw. als Bahnkurve

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) \; .$$

*Übungsaufgaben Serie 8* (Abgabe zum 11.01.2012)

(8a) Studentenvortrag von Robert Clasen zur Spin–Dynamik (siehe Anhang: Mastergleichung).

(8b) Studentenvortrag von Tobias Brosowski zum Thema *Zwei gekoppelte Differentialgleichungen: Van der Pol–Oszillator*

$$\frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y - y(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad y(t=0) = y_0 \; .$$

mit Vorstellung der Transformationslösungsmethode.

(8c) Studentenvortrag von Gerlinde Eberle zum Thema *Zwei gekoppelte Differentialgleichungen: Räuber–Beute–System*

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A x - k_{12} x y \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = k_{21} x y - k_2 y \qquad ; \quad y(t=0) = y_0 \; .$$

mit Vorstellung des Modells.

8d Studentenvortrag von MAX KRÜGER zum Thema *Dirac'sche Delta–Funktion.*

Bereiten Sie einen Kurz–Vortrag zum o. g. Thema vor (Definition, Eigenschaften, etc).

Besteht ein Zusammenhang zur Gauss–Funktion

$$g(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{9}$$

bei Variation des Parameters $\sigma$?

8e Studentenvortrag von KEVIN HEINZ zum Thema:

Berechnen Sie die Eigenwerte und die (normierten) Eigenvektoren der Matrix $A$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie auch die Inverse $A^{-1}$.

15. **Studentenvorträge** (11. – 18.01.2012, R. Mahnke)
Vorstellungen der o. g. Themen mit Diskussion

16. **Vektoren** (20.01.2012, R. Mahnke)
Physikalische Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor. Verknüpfung von Vektoren: (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$) und (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$). Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

17. **Skalar– und Vektorfelder I** (25.01.2012, R. Mahnke)
Begriff des Gradienten $\operatorname{grad}\varphi$: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie) und Kraft.
Begriff der Divergenz $\operatorname{div}\vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelldichte. Beispiel: $\operatorname{div}\vec{r} = 3$. Verweis auf den Vektoroperator Nabla $\nabla$ (in kartesischen Koordinaten).
Begriff der Rotation $\operatorname{rot}\vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.
Hinweis auf Kurvenintegrale (Integration entlang einer Kurve).

18. **Skalar– und Vektorfelder II** (27.01.2012, R. Mahnke)
Übung zur Vektorrechnung

(9a) Koordinatentransformationen:
Stellen Sie für kartesische, Zylinder– und Kugelkoordinaten folgende Formeln zusammen:

- Ortsvektor $\vec{r}$
- Differential $d\vec{r}$
- Nabla $\nabla$
- Berechnen Sie $\operatorname{grad} \vec{r}^{\,2}$.

(9b) Kartesische Koordinaten:
Zeigen Sie, dass das Vektorfeld (Kraft) $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch

$$\vec{F} = (2xy + z^3)\, \vec{e_x} + (x^2 + 2y)\, \vec{e_y} + (3xz^2 - 2)\, \vec{e_z} \ ,$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ gilt) und berechnen Sie anschliessend die Skalarfunktion (potentielle Energie) $\varphi(x, y, z)$ mittels

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi \ .$$

Skizzieren Sie sowohl das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$ (durch Feldvektoren) als auch das Skalarfeld $\varphi(x, y, z)$ (durch Äquipotentialkurven).

(9c) Sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten):
Gegeben sei das Vektorfeld der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = r^{-3}\, (2 \cos\vartheta\, \vec{e_r} + \sin\vartheta\, \vec{e_\vartheta}) \ .$$

Ist das Feld wirbelfrei? Wenn ja, ist das Potential $U(r, \vartheta, \varphi)$ so zu bestimmen, dass $\vec{v} = -\nabla U$ gilt.

Zum Abschluss:
Anfertigung einer kurzen Zusammenfassung der Lehrveranstaltung und Benennung der Schwerpunkte (max. eine Seite)

Ausblick auf die LV *Einführung in die Theoretische Physik* (SS 2012):

Einführung in die Theoretische Physik

# 2 Anhang: Mastergleichung

## Master equation and its solution

Two states + and − with transition rates $w_{-+}$ from + to − and $w_{+-}$ from − to +.

Probabilities: $p_+(t)$, $p_-(t)$, normalization $p_+ + p_- = 1$

Dynamics: Markov process

Equation of motion given by master equation together with initial condition

$$\frac{d}{dt}p_+ = -w_{-+}p_+ + w_{+-}p_- \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}p_- = +w_{-+}p_+ - w_{+-}p_- \tag{2}$$

The solution, with respect to differential equations, is

$$p_+(t) = \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} + \left[p_+(0) - \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}}\right] e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \tag{3}$$

$$p_-(t) = \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}} + \left[p_-(0) - \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}}\right] e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \tag{4}$$

where $p_+(0)$ and $p_-(0)$ are the initial states of $p_+(t)$ and $p_-(t)$ at $t = 0$, respectively.

## Task: Find the solution by integration

## Solution

### Direct integration method

In the following we will show two different ways how to get the solution. The first one is the direct integration method. Inserting the normalization relation $p_+ = 1 - p_-$ into the first equation of motion, we obtain an inhomogeneous differential equation

$$\frac{d}{dt} p_+ + (w_{+-} + w_{-+}) p_+ = w_{+-} \ , \tag{5}$$

which is solved in a standard way. First we consider the homogeneous case

$$\frac{d}{dt} p_+ + (w_{+-} + w_{-+}) p_+ = 0 \tag{6}$$

and find its solution

$$p_+^{hom}(t) = C \, e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \ . \tag{7}$$

In the following we search for a particular solution by variation of constant according to the ansatz

$$p_+^{par}(t) = C(t) \, e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \ . \tag{8}$$

By inserting this into the inhomogeneous differential equation we obtain

$$C(t) = w_{+-} \int_0^t e^{+(w_{+-}+w_{-+})s} ds = \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} \left[ e^{+(w_{+-}+w_{-+})t} - 1 \right] \ . \tag{9}$$

Therefore

$$p_+^{par}(t) = \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} \left[ 1 - e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \right] \tag{10}$$

holds and the solution reads

$$\begin{aligned} p_+(t) &= p_+^{par}(t) + p_+^{hom}(t) \\ &= \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} \left[ 1 - e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \right] + C \, e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \ , \end{aligned} \tag{11}$$

The integration constant $C$ is calculated from the initial condition

$$p_+(t = 0) = C = p_+(0) \ , \tag{12}$$

which finally yields the known result.

### Diagonalization method by eigenstates

The solution can be obtained using another method, the so–called diagonalization by eigenstates. It is possible to solve the equations of motion starting from the form

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_+(t) \\ p_-(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_{-+} & w_{+-} \\ w_{-+} & -w_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+(t) \\ p_-(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

or, compare (**??**),

$$\frac{d}{dt}P(t) = W\ P(t), \tag{14}$$

where $W$ is the transition matrix, and $P(t)$ is the time–dependent state.

Taking into account the initial condition $P(t=0) = P(0)$ the formal solution reads

$$P(t) = \exp\left(W\,t\right)\ P(0) = U(t)\ P(0) \tag{15}$$

The general solution $P(t)$, see (**??**), with eigenvalues $\lambda_i$ and eigenstates $u_i$ is given by

$$P(t) = \sum_i c_i u_i e^{-\lambda_i t}\ , \tag{16}$$

where coefficients $c_i$ are constants calculated from initial conditions. In our case $i$ has two values: $i = 0, 1$.

The first step consists of determination of eigenvalues from

$$|\,W - \lambda E\,| = \begin{vmatrix} -w_{-+} - \lambda & w_{+-} \\ w_{-+} & -w_{+-} - \lambda \end{vmatrix} = 0\ . \tag{17}$$

The calculation

$$\left(w_{-+} + \lambda\right)\left(w_{+-} + \lambda\right) - w_{+-}w_{-+} = 0 \tag{18}$$

$$\lambda\left(\lambda + \left(w_{+-} + w_{-+}\right)\right) = 0 \tag{19}$$

yields the eigenvalues $\lambda_0 = 0$ and $\lambda_1 = -\left(w_{+-} + w_{-+}\right)$. The term with zero eigenvalue $\lambda_0$ in (**??**) represents the stationary solution reached asymptotically as $t \to \infty$. In this case the stationary solution is also the equilibrium one, since the detailed balance (**??**) holds, i. e., the condition $dp_+(t)/dt = dp_-(t)/dt = 0$ implies that the probability flux from state $+$ to state $-$ is balanced by the opposite flux. The other term with negative eigenvalue $\lambda_1$ describes the relaxation to this stationary solution.

In the second step we calculate eigenstates $W\, u_\lambda = \lambda\, u_\lambda$ from the equation

$$\begin{pmatrix} -w_{-+} & w_{+-} \\ w_{-+} & -w_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+^i \\ u_-^i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} u_+^i \\ u_-^i \end{pmatrix} . \tag{20}$$

For $i = 0$ we have

$$\begin{pmatrix} -w_{-+} & w_{+-} \\ w_{-+} & -w_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+^0 \\ u_-^0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} u_+^0 \\ u_-^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{21}$$

so that the eigenstate $u^0$ can be written as

$$u_+^0 = \frac{w_{+-}}{w_{-+}} u_-^0 . \tag{22}$$

For $i = 1$ we have

$$\begin{pmatrix} -w_{-+} & w_{+-} \\ w_{-+} & -w_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+^1 \\ u_-^1 \end{pmatrix} = -\left(w_{+-} + w_{-+}\right) \begin{pmatrix} u_+^1 \\ u_-^1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

and the eigenstate $u^1$ can be represented as

$$u_+^1 = -u_-^1 . \tag{24}$$

Putting these eigenstates into the general solution

$$P(t) = c_0 u^0 e^{\lambda_0 t} + c_1 u^1 e^{\lambda_1 t} \tag{25}$$

we get

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_+(t) \\ p_-(t) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} \frac{w_{+-}}{w_{-+}} \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(w_{+-}+w_{-+})t} \tag{26}$$

From initial condition

$$P(t=0) = c_0 u^0 + c_1 u^1 = P(0) \tag{27}$$

we obtain

$$P(0) = \begin{pmatrix} p_+(0) \\ p_-(0) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} \frac{w_{+-}}{w_{-+}} \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{28}$$

Using initial condition and normalization finally we receive the up to now unknown coefficients

$$c_0 = \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}} , \tag{29}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= p_-(0) - c_0 = p_-(0) - \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}} \\ &= -p_+(0) + \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} \end{aligned} \tag{30}$$

to get the known result.