

---

# Mathematische Methoden für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &  
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke  
Institut für Physik

---

**Lehrveranstaltung Nr. 12557**  
**(Wintersemester 2012/13: 1 SWS V + 2 SWS Ü)**

V: Mittwoch 7.15 bis 8.00 Uhr, Großer Hörsaal, Inst. f. Physik  
Ü-Ph: Freitag 7.15 bis 8.45 Uhr, Großer Hörsaal, Inst. f. Physik  
Ü-Ch1: Freitag 7.15 bis 8.45 Uhr, Hörsaal 002, Inst. f. Chemie  
Ü-Ch2: Freitag 7.15 bis 8.45 Uhr, Seminarraum 201, Inst. f. Chemie  
Tutorium (Nachhilfe): Montag 17.00 Uhr, Seminarraum 1, Inst. f. Physik

---

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für LA-Studium Physik
2. Ch. B. Lang & N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 1: Mathematische Hilfsmittel (Berlin, 1974)



# Inhaltsangabe

## 1 Komplexe Zahlen

### 1. Komplexe Zahlen I (17.10.2012, R. Mahnke)

Quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  (Variable  $x$ , Parameter  $p, q$ ) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der reellen Zahlen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen  $z = x + iy$  und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit  $i$  mit  $i^2 = -1$ , Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich, bei Division Erweiterung mit der zu  $z$  konjugiert komplexen Zahl  $z^* \equiv \bar{z} = x - iy$ .

Im Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar. Beispiel:  $z^2 - 2i = 0$  mit Lösung  $z_1 = -z_2 = 1 + i$ .

### 2. Komplexe Zahlen II (17.10.2012, R. Mahnke)

Polardarstellung einer komplexen Zahl  $z$  mit Hilfe trigonometrischer Funktionen  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , Hin- und Rücktransformation zwischen kartesischen  $(x, y)$  und polaren Koordinaten  $(r, \alpha)$ .

Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl  $z$  mittels Euler-Formel, z. B.  $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ , einfache Berechnung von Potenzen  $z^n$  durch Euler-Darstellung,  $2\pi$ -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$ ).

### 3. Komplexe Zahlen III (17.10.2012, R. Mahnke)

Zusammenfassung der drei Darstellungsarten einer komplexen Zahl  $z$ :

$$z = x + iy \text{ — kartesische Koordinaten ,}$$

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ — Polarkoordinaten ,}$$

$$z = r \exp(i\alpha) \text{ — komplexe Exponentialfunktion .}$$

*Übungsaufgaben Serie 1*

(in 1. Übung am 19.10.2012 gemeinsam erarbeitet)

- (1a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{2i - 1}{i - 2} .$$

Lösung:  $z = \frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$

- (1b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{(1 + i)^4}{(1 - i)^4} .$$

Lösung:  $z = 1$

- (1c) Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2i = 0 .$$

Hinweis: Unter Benutzung von  $z = x + iy$  erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten  $x = \operatorname{Re}(z)$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$ . Es gibt (genau) zwei Lösungen  $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}i = (1 + i, -1 - i)$ , die mittels Probe überprüft werden sollten.

- (1d) Lösen Sie die quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0 .$$

Angabe der Nullstellen in der Form  $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$ .

Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real- und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten.

Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta:

$$z_1 + z_2 = -p ,$$

$$z_1 \cdot z_2 = q .$$

Wegen  $p = 1 + i$  und  $q = -2 + 2i$  lauten somit die Nullstellen

$$z_1 = -2 ,$$

$$z_2 = 1 - i .$$

4. **Komplexe Zahlen IV** (24.10.2011, R. Mahnke)

Die komplexe Zahl  $z$  hat verschiedene Darstellungsarten. Wir zeigen mittels Reihendarstellung, dass folgendes gilt:

$$\exp(i\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha .$$

5. **Komplexe Zahlen V** (24.10.2011, R. Mahnke)

Aus

$$(\exp(i\alpha))^n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n$$

folgt Satz von Moivre

$$\exp(in\alpha) = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha) .$$

6. **Komplexe Zahlen VI** (24.10.2011, R. Mahnke)

Diskussion über komplexe Funktionen  $w = F(z)$ .  $2\pi$ -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i\alpha} = e^{i(\alpha \pm 2\pi k)} \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots .$$

Als Beispiel aus der Physik: komplexe Exponentialfunktion  $F(z(t)) = A \exp(i\alpha)$  mit  $\alpha = \omega t$ . Wichtig ist die Nullstellenberechnung  $F(z) = 0$ . Ausblick auf die Gleichung  $z^n - 1 = 0$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

*Übungsaufgaben Serie 2*

(Lösungen in 2. Übung am 26.10.2012 abgeben und besprechen)

- (2a) Betrachten Sie (nochmals) die Aufgabenstellung (1c) und zeigen Sie für die positive Lösung  $z \equiv z_1$  die Gleichheit

$$z = 1 + i = \sqrt{2i}.$$

- (2b) Berechnen Sie die Nullstellen der komplexen Funktionen  $F_n(z) = z^n - 1$  mit  $n = 1, 2, 3, 4$  und skizzieren sie diese in der komplexen Zahlenebene.

Hinweis: Es ist die Nullstellengleichung  $z^n - 1 = 0$  für die vier Potenzen  $n = 1, 2, 3, 4$  zu lösen. Sie erhalten jeweils genau  $n$  Lösungen (Nullstellen) auf dem Einheitskreis.

- (2c) Berechnen Sie die dritte(n) Wurzel(n) aus  $8i$ . Geben Sie die Lösung(en) in kartesischer Darstellung an.

- (2d) Betrachten Sie (nochmals) die Aufgabenstellung (1d) und überführen das Zwischenresultat

$$z_{1,2} = -\frac{1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8-6i}$$

in die kartesische Schreibweise für die Nullstellen  $z_1 = -2$  und  $z_2 = 1-i$ .

## Zusammenfassung: Komplexe Zahlen

Bitte selbst ergänzen:

- Imaginäre Einheit, komplexe Ebene
- Kartesische Darstellung (algebraische Form)
- Polardarstellung (trigonometrische Form)
- Exponentialdarstellung (komplexe Exp-Funktion)
- Eulerformel
- Satz von Moivre
- Grundrechenarten, Potenzieren und Wurzelziehen
- Nullstellenberechnung
- Merke: Für jedes  $z \neq 0$  gibt es genau  $n$  komplexe Zahlen, deren  $n$ -te Potenz  $z$  ist.

$$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r} e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

- Der *schönste mathematische Ausdruck der Welt*

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

folgt aus der Eulerformel. Warum?

## 2 Differenzen- und Differentialrechnung

### 1. Differenzenverfahren (02.11.2012, R. Mahnke)

Schrittweise Berechnung von  $x_{n+1}$  aus  $x_n$  mittels einer Iterations- bzw. Differenzgleichung

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Aus dem gegebenen Startwert  $x_0$  folgt der erste Folgewert  $x_1$ , daraus  $x_2$  usw. Beispiel: lineare Funktion  $f(x) = 2x$ .

### 2. Wachstumsgesetze (02.11.2012, R. Mahnke)

Wachstumsmodelle von Populationen mit und ohne Dämpfung. Berücksichtigung einer Kapazitätsgrenze führt auf eine nichtlineare Iteration, genannt logistische Gleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) .$$

### 3. Nullstellenberechnung (02.11.2012, R. Mahnke)

Die Newton-Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen (bekannt als Newton-Verfahren) lautet

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Beispiel: Nichtlineare Funktion  $f(x) = 8x^2 - 2$  hat die Nullstellen  $x_{null} = \pm 1/2$  (analytische Berechnung).

Numerische Berechnung:

Siehe Computerprogramm mit Resultattabelle (nächste Seite).

### 4. Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene

(02.11.2012, R. Mahnke)

Die Newton-Iteration zur Nullstellenberechnung komplexer Funktionen (bekannt als Newton-Verfahren) lautet analog dem im Reellen

$$z_{n+1} = N(z_n) \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} .$$

Bekanntes Beispiel: Für  $F(z) = z^3 - 1$  sind die Nullstellen bekannt. Welcher Startwert  $z_0$  führt auf welche Nullstelle  $z_k^{null}$ ? Wie sieht das Einzugsgebiet der Nullstellen aus? Es hat fraktale Ränder. Warum? Der Koordinatenursprung ist ein divergenter Punkt, gehört zur Julia-Menge.



```

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>

using namespace std;

double func(double x){
return 8.0*x*x-2.0;
}

double deri(double x){
return 16.0*x;
}

int main(int argc, char *argv[]){
int n=0;
double x=18.0;
cout << " n |      x" << endl;
cout << "----+-----" << endl;
for(n=0; n<11; n++){
cout << setw(3)
      << n
      << " | "
      << setw(11)
      << setprecision(8)
      << fixed
      << x
      << endl;
x=x-func(x)/deri(x);
}
return 0;
}

```

```

/*
Ausgabeliste:

```

```

  n |      x
----+-----
  0 | 18.00000000
  1 |  9.00694444
  2 |  4.51735040
  3 |  2.28634629
  4 |  1.19784553

```

5	0.70327679
6	0.52937780
7	0.50081516
8	0.50000066
9	0.50000000
10	0.50000000

\*/

### 5. Differentialrechnung (07.11.2012, R. Mahnke)

Differentialquotient (erste Ableitung, Anstieg) reeller Funktionen  $f(x)$  als Grenzwert eines Differenzenquotienten. Es gilt Taylor Entwicklung  $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2$ , somit

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}.$$

Berechnung der ersten Ableitung von  $f(x) = x^2$  mit o. g. Definition. Differentiationsregeln und Ableitungen elementarer Funktionen (Schulstoff); Ableitung von mittelbaren Funktionen mittels Kettenregel; Ableitung einer impliziten Funktion; Differential einer Funktion; totales Differential einer mehrdimensionalen Funktion, geschrieben mit partiellen ( $\partial$ ) Ableitungen; höhere Ableitungen; Bedeutung der (ersten und zweiten) Ableitungen in der Physik. Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}.$$

als Beispiel.

### Übungsaufgaben Serie 3

(Lösungen in 3. Übung am 09.11.2012 abgeben und besprechen)

- (3a) Leiten Sie die Newton–Iteration zur Berechnung von Nullstellen reeller Funktionen  $f(x)$  her. Wie lautet der Iterationsalgorithmus im Sinne eines Computerprogramms? Erläutern Sie anhand einer Grafik.
- (3b) Die Newton–Iteration in der komplexen Ebene ist bekannt:

$$z_{n+1} = N(z_n) \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{F(z)}{dF(z)/dz} .$$

Berechnen Sie für das Beispiel der kubischen Gleichung  $F(z) = z^3 - 1$  die Newton–Iterationsformeln getrennt für den Real– und Imaginarteil.

- (3c) ZUSATZ (Bonuspunkte):  
Betrachten Sie speziell die Iteration auf der reellen Achse ( $y = 0$ ).  
Berechnen Sie die Anfangsbedingung ( $x_0 < 0 ; y_0 = 0$ ), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung ( $x = 0 ; y = 0$ ) führt.
- (3d) ZUSATZ (Bonuspunkte):  
Erläutern Sie (mit eigenen Worten), was im o. g. Zusammenhang (Newton–Iteration in der komplexen Zahlenebene) eine Julia Menge ist.
- (3e) Die logistische Gleichung ist bekannt:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) .$$

Der Startwert lautet  $x_0$  mit  $0 < x_0 < 1$ . Wählen Sie  $x_0 = 0.1$ . Diskutieren Sie die Iterationsergebnisse  $x_n$  über  $n$  in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $0 < r \leq 4$ . Betrachten Sie dazu die folgenden Werte von  $r$ , und zwar  $r_1 = 1.2$ ,  $r_2 = 3.2$  und  $r_3 = 4.0$ . Nun erstellen Sie drei Tabellen bzw. Grafiken  $x_n$  über  $n$  und kommentieren die Ergebnisse.

Übungsaufgaben Serie 4

(Lösungen in 4. Übung am 16.11.2012 abgeben und besprechen)

(4a) Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

a)  $f(x) = x \ln x$  .

b)  $f(x) = (a + bx)/(c + dx)$  .

Zusatz:  $f(x) = x^n \sin x \cos x$

Resultat:  $f'(x) = nx^{n-1} \sin x \cos x + x^n (\cos^2 x - \sin^2 x)$   
 $= x^n \left( \frac{2n}{x} \sin(2x) + \cos(2x) \right)$

(4b) Sind Funktionen der Form  $f(x) = u(x)^{v(x)}$  abzuleiten, so schreibt man diese zweckmäßig als  $f(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$  (Zeigen Sie, dass beide Darstellungen identisch sind) und wendet die Kettenregel zur Berechnung von  $f'(x) \equiv df(x)/dx$  an.

a) Ermitteln Sie die erste Ableitung  $f'(x)$  bei beliebigen Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$ .

b) Ermitteln Sie die erste Ableitung speziell für  $u(x) = x$  und  $v(x) = m$ , wobei  $m$  eine reelle Konstante ist.

c) Analoges für den Spezialfall  $u(x) = x$  und  $v(x) = x$ .

(4c) Gegeben ist die (zweidimensionale) Funktion  $f(x, y) = x^3 y - e^{xy}$ .  
Bilden Sie alle ersten und zweiten (partiellen) Ableitungen.

(4d) Sie kennen bereits die Diffusionsgleichung als Beispiel einer partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} .$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) ,$$

genannt Gauss-Verteilung, tatsächlich die Diffusionsgleichung löst, d. h. machen Sie die Probe mittels Einsetzen und partieller Differentiation.

### 3 Integrale

1. **Einführung in die Integralrechnung** (14.11.2012, R. Mahnke)  
Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration, Substitutionsmethode; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.
2. **Integralrechnung I** (14.11.2012, R. Mahnke)  
Zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels Substitution und/oder partieller Integration; Beispiele sind  $\int x e^x dx$ ,  $\int \cos^2 x dx$  und  $\int \ln x dx$ .  
Erweiterung des Integralbegriffs auf mehrdimensionale Integrale. Einführung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen, z. B. Bogenlänge.
3. **Integralrechnung II** (16.11.2012, R. Mahnke)  
Zur Berechnung von Kurvenintegralen; Berechnung der Bogenlänge eines Kreises in kartesischen Koordinaten schwierig; Berechnung nach Transformation in Polarkoordinaten bzw in Parameterdarstellung.  
Verwendung von zweidimensionalen Integralen zur Massenberechnung bei inhomogener Dichteverteilung  $\rho(x, y)$

$$M = \int_{\text{Fläche}} \rho(x, y) dx dy .$$

Berechnung von Volumen mittels dreidimensionaler Integration; Beispiel: Volumen einer Kugel; Rechnung in kartesischen Koordinaten sehr kompliziert; nach Transformation in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung der Jakobi-Determinante wird Rechnung viel einfacher; sinnvoll bei radialsymmetrischen Körpern.

Wechsel des Koordinatensystems als Punkttransformation (z. B. zweidimensionale kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten). Diese allgemeine  $d$ -dimensionale Variablen-Transformation ist fast immer lokal umkehrbar und wird über eine sog. Funktionalmatrix beschrieben. Die Determinante dieser Matrix (Funktional- oder Jakobi-Determinante) ist bei der Berechnung von Volumenintegralen zu berücksichtigen, beispielsweise zur Ermittlung des Kugelvolumens als dreidimensionales Integral in Kugelkoordinaten.

*Übungsaufgaben Serie 5*

(Lösungen in 5. Übung am 23.11.2012 abgeben und besprechen)

(5a) Lösen Sie mittels Variablentransformation:

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

und

(5b)

$$I_2 = \int \cos x \sin^2 x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

(5c) Lösen Sie mittels partieller Integration:

$$I_3 = \int_a^b x \cos x dx = (x \sin x + \cos x) \Big|_a^b$$

(5d) Lösen Sie mittels zweimaliger partieller Integration:

$$I_4 = \int x^2 e^{-x} dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$$

(5e) Informieren Sie sich über numerische Integration. Wie lautet die Trapezregel im Gegensatz zur Simpson-Formel?

(5f) Was bedeutet die Integration entlang einer Kurve (Kurvenintegral)?

(5g) Berechnen Sie die Länge eines Viertelkreises mit dem Radius  $r = 2$  durch Integration entlang der Kreiskurve.

## 4 Differentialgleichungssysteme

### 1. Differentialgleichungssysteme I (21.11.2012, R. Mahnke)

Einführung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf eine einfache Bewegungsgleichung  $dx/dt = \lambda x$  als Anfangswertproblem  $x(t = 0) = x_0$ ; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode; Diskussion der ermittelten Lösung  $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ . Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (auch in Matrix-Schreibweise) am Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y & ; & & x(t = 0) = x_0 ; \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y & ; & & y(t = 0) = y_0 .\end{aligned}$$

Kennenlernen der Begriffe Eigenwert, Eigenvektor, Superpositionslösung.

### 2. Differentialgleichungssysteme II (21.11.2012, R. Mahnke)

Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der  $x - y$ -Zustandsebene.

Das transformierte Gleichungssystem ist entkoppelt

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -r & ; & & r(t = 0) = r_0 ; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -1 & ; & & \alpha(t = 0) = \alpha_0 .\end{aligned}$$

und die Lösung ist mittels elementarer Integration möglich

$$\begin{aligned}r(t) &= r_0 \exp(-t) ; \\ \alpha(t) &= -t + \alpha_0\end{aligned}$$

und lautet als Bahnkurve

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) .$$

### 3. Differentialgleichungssysteme III (28.11.2012, Ch. Bräuning)

Wiederholung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf Newton-Bewegungsgleichung als Anfangswertproblem; Trennung der Variablen

als einfachste analytische Lösungsmethode. System von gekoppelten Differentialgleichungen (Matrix-Schreibweise); Superposition von homogener und partikulärer Lösung bei inhomogener Differentialgleichung. Bestimmung der partikulären Lösung durch Variation der Konstanten.

Ein Beispiel aus der Elektrotechnik:

Ein Wechselstromgenerator erzeugt zur Zeit  $t$  die Spannung  $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ . Ist der Stromkreis mit einem Ohmschen Widerstand  $R$  und einer Eigeninduktivität  $L$  angeschlossen, so folgt die Stromstärke  $I(t)$  aus der Differentialgleichung

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt},$$

wobei die Stromstärke zur Zeit  $t = 0$  als  $I_0 = 0$  gegeben ist.

Wie erfolgt die Berechnung der zeitabhängigen Stromstärke  $I = I(t)$ ?

### *Übungsaufgaben Serie 6*

(Lösungen in 6. Übung am 30.11.2012 abgeben und besprechen)

- (6a) Studentenvortrag von HARALD BATHEL (Gr. Physik),  
 Studentenvortrag von TOM KEMPKE (Gr. Chemie, M. Brics),  
 Studentenvortrag von CAROLIN KNAACK (Gr. Chemie, S. Rosmej)  
 zum Thema

*Zwei gekoppelte Differentialgleichungen: Van der Pol-Oszillator*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y - x(x^2 + y^2) & ; & & x(t=0) &= x_0 ; \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y(x^2 + y^2) & ; & & y(t=0) &= y_0 . \end{aligned}$$

mit Vorstellung der Transformationslösungsmethode.

- (6b) Aufgabe zum Thema *Integration*

$$\int dx \sin^2 x \quad ; \quad \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x$$

mit grafischer Diskussion der Lösungen.

- (6c) Aufgabe zum Thema *Integration*:

Berechnung der Masse eines im Viertelkreis ( $r = 2$ ) gebogenen Drahtes

$$M = \int_C ds \rho(x, y) \quad \text{mit} \quad \rho(x, y(x) = \sqrt{4 - x^2}) = 1 + x$$

mit Vorstellung der Lösung.



## 5 Vektoralgebra und Vektoranalysis

### 1. Vektoren (05.12.2012, R. Mahnke)

Naturwissenschaftliche Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor  $\vec{r} = xe_x + ye_y + ze_z$  in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor. Verknüpfung von Vektoren: (a) Skalarprodukt (inneres Produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ ) und (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ). Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve  $\vec{r}(t)$ .

### 2. Skalar- und Vektorfelder I (05.12.2012, R. Mahnke)

Begriff des Gradienten  $\text{grad } \varphi$ : Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ . Beispiele sind Potential (potentielle Energie) und Kraft.

Begriff der Divergenz  $\text{div } \vec{F}$ : Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelledichte. Einfaches Beispiel:  $\text{div } \vec{r} = 3$ .

Verweis auf den Vektoroperator Nabla  $\vec{\nabla}$  (in kartesischen Koordinaten).

Begriff der Rotation  $\text{rot } \vec{F}$ : Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.

Zwei wichtige Formeln:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi \equiv \text{rot grad } \varphi = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv \text{div rot } \vec{F} = 0.$$

### 3. Skalar- und Vektorfelder II (07.12.2012, R. Mahnke)

Gemeinsame Übung zur Vektorrechnung, keine Hausaufgaben.

(7a) Koordinatentransformationen:

Stellen Sie für kartesische, Zylinder- und Kugelkoordinaten folgende Formeln zusammen:

- Ortsvektor  $\vec{r}$
- totales Differential  $d\vec{r}$
- Nabla  $\vec{\nabla}$
- Berechnen Sie  $\text{grad } r^2$ .

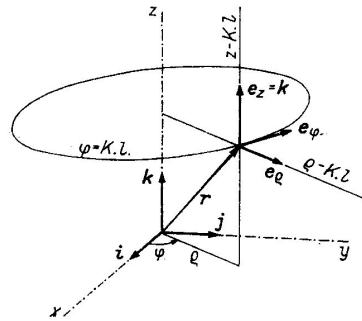


Abb. 7.7  
Zylinderkoordinaten  $\rho, \varphi, z$

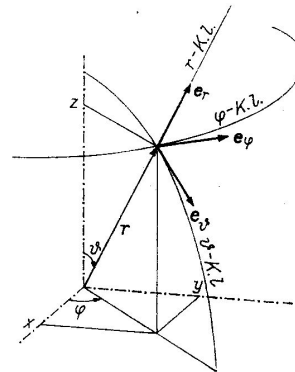


Abb. 7.8  
Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$

Fig. 1: Koordinatensysteme: Zylinder- (links) und Kugelkoordinaten (rechts).

(7.Übung) Kartesische Koordinaten:

Einfache Beispiel-Aufgabe:

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld  $\vec{F}(x, y, z)$ , gegeben durch

$$\vec{F} = (2x + y) \vec{i} + (x - y^2) \vec{j} + 0 \vec{k},$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob  $\text{rot } \vec{F} = 0$  gilt) und berechnen Sie danach die Skalarfunktion  $\phi(x, y, z)$  mittels

$$\vec{F} = -\text{grad } \phi.$$

Antwort:

Da die Rotation des Vektorfeldes verschwindet (Wirbelfreiheit), existiert eine skalare Potentialfunktion  $\phi = \phi(x, y, z)$ . Sie lautet  $\phi(x, y) = -xy - x^2 + y^3/3$ , wobei die Integrationskonstante zu  $\phi(x = 0, y = 0, z = 0) = 0$  gewählt wurde.

Grafische Darstellung: Entweder dreidimensionale Funktion  $\phi(x, y)$  zeichnen oder zweidimensionale Isolinendarstellung  $\phi(x, y) = H$ . Siehe dazu Abb. 2.

(7b) Kartesische Koordinaten:

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld (Kraft)  $\vec{F}(x, y, z)$ , gegeben durch

$$\vec{F} = (2xy + z^3) \vec{e}_x + (x^2 + 2y) \vec{e}_y + (3xz^2 - 2) \vec{e}_z,$$

konservativ ist (prüfen Sie, ob  $\text{rot } \vec{F} = 0$  gilt) und berechnen Sie anschliessend die Skalarfunktion (potentielle Energie)  $\phi(x, y, z)$

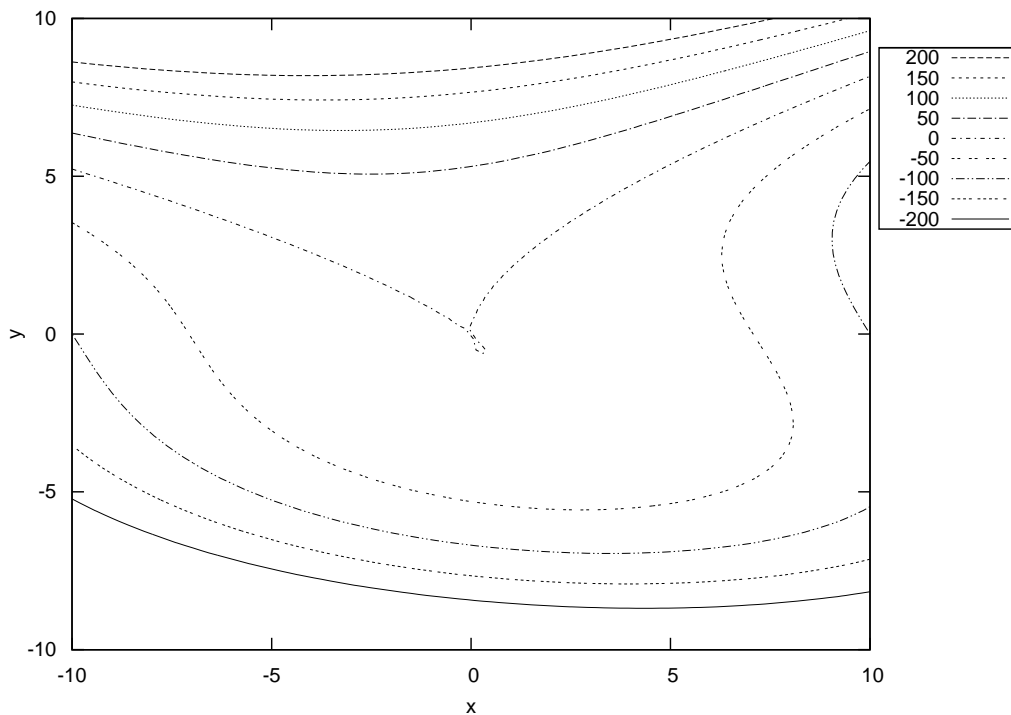


Fig. 2: Isolinien  $\phi(x, y) = H$

mittels

$$\vec{F} = -\text{grad } \varphi .$$

Wählen Sie für die Integrationskonstante einen sinnvollen Wert. Skizzieren Sie sowohl das Vektorfeld  $\vec{F}(x, y, z)$  (durch Feldvektoren) als auch das Skalarfeld  $\varphi(x, y, z)$  (durch Äquipotentialkurven).

Antwort:

Das Vektorfeld  $\vec{F}(x, y, z)$  ist wirbelfrei. Das Potential lautet

$$\varphi(x, y, z) = -x^2y - xz^3 - y^2 + 2z + C .$$

(7c) Sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten):

Gegeben sei das Vektorfeld der Geschwindigkeit

$$\vec{v} = r^{-3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) .$$

Ist das Feld wirbelfrei? Wenn ja, ist das Potential  $U(r, \vartheta, \varphi)$  so zu bestimmen, dass  $\vec{v} = -\vec{\nabla}U$  gilt.

Antwort:

Berechnungen in Kugelkoordinaten. Das Vektorfeld  $\vec{v}(r, \vartheta, \varphi)$  ist

wirbelfrei. Das Potential lautet

$$U(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\cos \vartheta}{r^2} + C .$$

*Übungsaufgaben Serie 7*

(Lösungen in 8. Übung am 14.12.2012 abgeben und besprechen)

- (7a) Zusammenstellung: Siehe Aufgabenstellung vom 07.12.2012
- (7b) Berechnungen in kartesischen Koordinaten:  
Siehe Aufgabenstellung vom 07.12.2012
- (7c) Optional/ZUSATZ: Berechnungen in sphärischen Koordinaten:  
Siehe Aufgabenstellung vom 07.12.2012
- (7d) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel (Radius  $R$ ) mittels dreidimensionaler Integration

$$V = \int_{Kugel} dx dy dz .$$

## 6 Matrizen und Gleichungssysteme

### 1. Matrix, Eigenwert, Eigenvektor (12.12.2012, R. Mahnke)

Matrizenschreibweise. Matrixgleichung. Inverse Matrix. Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren aus einer Eigenwertgleichung.

Berechnung der Eigenwerte  $\lambda$  und der (normierten) Eigenvektoren  $X$  der Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie dessen Inverse  $A^{-1}$  aus  $A^{-1}A = E$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist.

Die Eigenwertgleichung lautet wegen  $(A - \lambda E)X = 0$  somit wie folgt

$$\begin{pmatrix} 10 - \lambda_i & -3 \\ -3 & 2 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte folgen aus einer quadratischen Gleichung zu  $\lambda_1 = 11$  und  $\lambda_2 = 1$ . Die dazu gehörigen normierten Eigenvektoren lauten  $X_1 = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $X_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Sie stehen senkrecht aufeinander.

### 2. Lineare Gleichungssysteme (19.12.2012, R. Mahnke)

Algebraische lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise  $Y = AX$  mittels Invertierung  $X = A^{-1}Y$  lösen.

Eindimensionale lineare Differentialgleichung  $dx/dt = \lambda x$  mit Anfangsbedingung  $x(t=0) = x_0$  besitzt die Lösung  $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$ . Erweiterung auf mehrdimensionale lineare Gleichungssysteme  $dX/dt = AX$ . Superpositionslösung (unter Verwendung von Eigenwerten  $\lambda$  und Eigenvektoren  $U$ ) lautet

$$X(t) = \sum_i c_i e^{\lambda_i t} U_i .$$

Die Koeffizienten  $c_i$  sind aus den Anfangsbedingungen  $X(t=0) = X_0$  zu ermitteln.

Ein Beispiel: *Das zufällige Zwei-Niveau-System*

Der Spinzustand (Was ist ein Spin?) hat nur zwei Werte (+ (up) Niveau bzw.  $+\hbar/2$ ) und - (down) Niveau bzw.  $-\hbar/2$ ). Das Umklappen erfolgt zufällig mit den Raten  $w_{-+}$  von + nach - und  $w_{+-}$  von - nach +. Diese Raten (Anzahl der Umklappprozesse pro Zeit) sind gegeben. Die beiden Zustände sind charakterisiert durch ihre Wahrscheinlichkeiten

$p_+(t)$  und  $p_-(t)$ . Die Zeitentwicklung ist durch das folgende dynamische System (auch Mastergleichung genannt)

$$\begin{aligned}\frac{dp_+}{dt} &= -w_{-+}p_+ + w_{+-}p_- \\ \frac{dp_-}{dt} &= +w_{-+}p_+ - w_{+-}p_-\end{aligned}$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen  $p_+(0)$  und  $p_-(0)$  gegeben.

Aufgabe: Berechnen und diskutieren Sie die zeitabhängigen Lösungen  $p_+(t)$  und  $p_-(t)$ .

Analyse des gegebenen dynamischen Systems. Das Ziel ist die Bestimmung der Zeitentwicklung (Evolution) der Variablen  $p_+(t)$  und  $p_-(t)$ . Nach Einführung von Koeffizientenmatrix  $W$  und Vektor  $P$  kompakte Schreibweise des dynamischen Systems als  $dP/dt = W P$ . Formulierung der Eigenwertgleichung. Bestimmung der beiden Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Anschliessend Berechnung der dazugehörigen Eigenvektoren  $P_1$  und  $P_2$  und deren Normierung. Bestimmung der Superpositionslösung  $P(t)$  unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Lösung: Master equation and its solution

Two states + and - with transition rates  $w_{-+}$  from + to - and  $w_{+-}$  from - to +.

Probabilities:  $p_+(t)$ ,  $p_-(t)$ , normalization  $p_+ + p_- = 1$

Equation of motion given by master equation together with initial condition (see above)

$$\frac{d}{dt}p_+ = -w_{-+}p_+ + w_{+-}p_- \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}p_- = +w_{-+}p_+ - w_{+-}p_- \quad (2)$$

The solution, with respect to differential equations, is

$$p_+(t) = \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} + \left[ p_+(0) - \frac{w_{+-}}{w_{+-} + w_{-+}} \right] e^{-(w_{+-} + w_{-+})t} \quad (3)$$

$$p_-(t) = \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}} + \left[ p_-(0) - \frac{w_{-+}}{w_{+-} + w_{-+}} \right] e^{-(w_{+-} + w_{-+})t} \quad (4)$$

where  $p_+(0)$  and  $p_-(0)$  are the initial states of  $p_+(t)$  and  $p_-(t)$  at  $t = 0$ , respectively.

*Übungsaufgaben Serie 8*

(Lösungen in 9. Übung am 21.12.2012 abgeben und besprechen)

Es werden – bei Bedarf – Fragen zu den Aufgaben der Probeklausur beantwortet. Keine Entgegennahme von Probeklausur–Antwortzetteln.

(8a) Die Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist zu invertieren. Überprüfen Sie das Ergebnis und berechnen die Produkte  $A A^{-1}$  und  $A^{-1} A$ .

Resultat:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(8b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 3y &= 6 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

mittels Matrixinversion.

Resultat:  $x = 3$ ,  $y = 1$

(8c) Die Matrix  $A$  lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie  $A^2$ ,  $A^3$  und  $A^4$ .

Existiert ein Zusammenhang zur komplexen Exponentialfunktion  $\exp(A)$ ?

Resultate:  $A^2 = -E$ ,  $A^3 = -A$  und  $A^4 = E$

Reihendarstellung:  $\exp(A) = \sum_n \frac{1}{n!} A^n = E \cos 1 + A \sin 1$

## 7 Spezielle Funktionen

### 1. Die Delta- und Sprungfunktion (09.01.2013, R. Mahnke)

Die Dirac'sche Deltafunktion  $\delta(x)$  und die Heaviside'sche Sprungfunktion  $\theta(x)$  sind sog. Distributionen. Sie spielen in den Naturwissenschaften zur kontinuierlichen Beschreibung von Feldern, z. B. ist die Ladungsdichte  $\varrho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  eine Delta-Funktion, und bei Ein- und Ausschaltvorgängen eine Rolle.

Die Deltafunktion bzw. Delta-Distribution ist die erste Ableitung der Sprungfunktion. Sie ist auch über das folgende Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

definiert. Hinweise auf die Fourier-Transformation und die Fourier-Darstellung der Deltafunktion.

### *Übungsaufgaben Serie 9*

(Lösungen in 11. Übung am 18.01.2013 abgeben und besprechen)

#### (9a) Das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -8x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= +8x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen  $x_1(t=0) = 0$  und  $x_2(t=0) = 1$  zu lösen. Skizzieren Sie die Lösungen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  grafisch.

#### (9b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der eindimensionalen Delta-Funktion.

#### (9c) Ein Körper besteht aus zwei Punktmassen und besitzt die Massendichte $\mu = m_A\delta(\vec{r} - \vec{r}_A) + m_E\delta(\vec{r} - \vec{r}_E)$ . Erklären Sie diese Aussage und berechnen die (Gesamt-)Masse des Körpers $M$ .



## 8 Folgen und Reihen

### 1. Die Koch'sche Schneeflocke (16.01.2013, R. Mahnke)

Die Koch-Kurve bzw. -Schneeflocke (Helge von Koch, 1904) ist ein Fraktal. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck (Kantenlänge  $a$ ) wird iterativ eine Figur konstruiert, dessen Umfang  $U_n$  divergiert, wobei aber der Flächeninhalt  $A_n$  konvergiert auf den Wert  $2a^2\sqrt{3}/5$ . Die Berechnung erfolgt über eine geometrische Reihe.

### 2. Potenzreihe und Taylor-Formel (16.01.2013, R. Mahnke)

Stetige Funktionen können durch eine Potenzreihe approximiert werden. Diese als Taylor-Reihe bekannte Darstellung verwendet Ableitungen  $k$ -ter Ordnung. Das bekannteste Beispiel ist die Reihendarstellung der Exponential-Funktion durch die Summe der Potenzen  $x^k/k!$ .

Hinweis auf Taylor-Entwicklung mehrdimensionaler Funktionen, auf die Binomische Reihe und die Fourier-Darstellung periodischer Funktionen.

### 3. Fourier-Transformation (18.01.2013, R. Mahnke)

Kontinuierliche symmetrische eindimensionale Fourier-Transformation zwischen Funktion im Ortsraum  $f(x)$  und Funktion  $g(k)$  im reziproken Raum (Wellenzahlraum  $k = 2\pi/L$ )

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} g(k) dk \quad (5)$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (6)$$

Analoges gilt für eine Funktion abhängig von Zeit  $t$  und transformierte Funktion abhängig von Kreisfrequenz  $\omega$  mit  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ .

Beachte: Integrale enthalten komplexe Exponentialfunktion. Somit exakte Auswertung der reellen Integrale mithilfe der Euler-Formel.

### 4. Fourier-Entwicklung (23.01.2013, R. Mahnke)

Periodische Vorgänge  $f(x)$  im Intervall der Länge  $2L$  ( $0 \leq x \leq 2L$  oder symmetrisch  $-L \leq x \leq +L$ ) durch periodische Funktionen, die ein vollständig orthonormiertes Funktionensystem bilden, approximieren. Diese Reihendarstellung heißt Fourier-Entwicklung in reeller Schreibweise

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad (7)$$

bzw. in komplexer Schreibweise

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{L}x} \quad (8)$$

Die Fourier-Koeffizienten (entspricht Rücktransformation) lauten im Komplexen

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\frac{k\pi}{L}x} dx \quad (9)$$

bzw. im Reellen

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad (10)$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad (11)$$

Der Kontinuumsgrenzübergang ( $L \rightarrow \infty$ , ganze Zahlen  $k$  werden zu kontinuierlicher reeller Wellenzahl  $k$ ) führt auf die nichtsymmetrische Fourier-Transformation (vgl. 5 und 6)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} g(k) dk \quad (12)$$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (13)$$

für die Entwicklung beliebiger (nichtperiodischer) Funktionen  $f(x)$  im Intervall  $-\infty < x < +\infty$ .

5. **Übung zur Iteration und Taylor-Formel** (25.01.2013, R. Mahnke)  
Besprechung der Hausaufgaben und Beantwortung von Fragen.

#### *Übungsaufgaben Serie 10*

(Lösungen in 12. Übung am 25.01.2013 abgeben und besprechen)

- (10a) Berechnen Sie für die *Koch'sche Schneeflocke* den Umfang  $U_n$  und die Fläche  $A_n$  für die ersten acht Iterationen. Ausgangspunkt (0. Generation) ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge  $a$ . Ermitteln Sie den Grenzwert  $A_\infty$  für unendlich viele Iterationen bzw. Generationen. Stellen Sie die Ergebnisse für Umfang, Fläche und Fehler  $\Delta A_n = (A_\infty - A_n)/A_\infty$  in einer Tabelle zusammen.  
Erstellen Sie daraus Grafiken sowohl für Fläche (und Fehler) als auch Umfang über Generationszahl  $n$ .

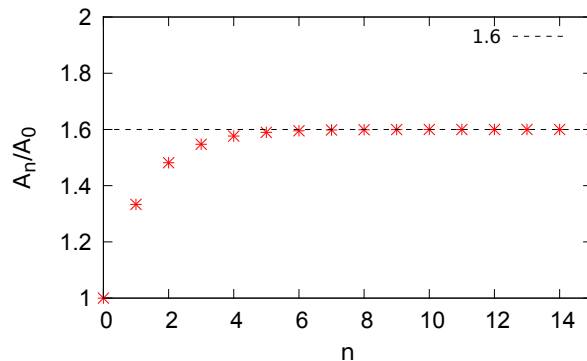


Fig. 3: Die Abbildung zeigt den Flächeninhalt  $A_n$  (gemessen in  $A_0$ ) der Koch'schen Schneeflocke in Abhängigkeit der Iterationszahl  $n$ .

(10b) Was ist eine fraktale Dimension  $d_f$  im Vergleich zur Dimension einer Linie ( $d = 1$ ) oder einer Fläche ( $d = 2$ ). Welchen Wert hat die fraktale Dimension der Koch-Kurve? Die Koch-Kurve ist der Umfang der Koch'schen Schneeflocke.

(10c) Entwickeln Sie die reelle Funktion  $f(x) = \ln(1 - x)$  für  $|x| < 1$  in eine Taylor-Reihe an der Stelle  $x_0 = 0$ .

Die Lösung lautet

$$\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (14)$$

## 9 Reihenentwicklungen

### 1. Entwicklung nach orthonormiertes Funktionensystemen

(30.01.2013, R. Mahnke)

Komplexwertige Funktionen  $\varphi_k(x)$  mit  $k = 1, 2, \dots, n$ , gegeben im Intervall  $a \leq x \leq b$ . Linear unabhängige Funktionenfolge. Betrachte Grenzfall  $n \rightarrow \infty$ .

Definiere Skalarprodukt  $(\varphi_k(x), \varphi_m(x))$  (analog zu Vektoren). Orthonormiertes Funktionensystem mittels Kronecker-Symbol schreiben

$$(\varphi_k(x), \varphi_m(x)) = \int_a^b \varphi_k^*(x) \varphi_m(x) dx = \delta_{km}. \quad (15)$$

Vergleiche mit dem Skalarprodukt zwischen (komplexen) Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k^* b_k, \quad (16)$$

wobei der Stern *konjugiert komplex* bedeutet.

1. **Zusammenfassung und Übersicht** (01.02.2013, R. Mahnke)

Beispielaufgabe zur Fourier-Transformation:

Für die Funktion  $f(t) = Ae^{-\alpha|t|}$  mit  $\alpha > 0$  ist die Fourier-Transformierte

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (17)$$

zu bestimmen.

Die Lösung lautet

$$g(\omega) = A \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (18)$$

Zusammenfassung und Übersicht: Siehe folgendes Kapitel

## 10 Zusammenfassung

- Komplexe Zahlen
  - Algebraische (kartesische) Form
  - Trigonometrische (polare) Form
  - komplexe Exponentialfunktion
  - Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungsformen
  - Euler-Formel
  - Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
  - Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene
- Differenzengleichung (Iterationen)
  - Differenzenverfahren (Generationenfolge)
  - Diskretes Wachstum (Wachstumsmodelle)
  - Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung
  - Beispiel: Koch'sche Schneeflocke
- Differentialrechnung
  - erste (gewöhnliche) Ableitung, höhere Ableitungen
  - partielle Ableitungen
  - Differentiationsregeln
  - totales Differential
- Integralrechnung
  - Riemannsches Integral (mit und ohne Grenzen)
  - bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze
  - Integration eines Produkts (partielle Integration)
  - Substitutionsmethode
  - Sinnvolle Ansätze wählen, Probe machen
  - mehrdimensionale Integrale
  - Kurvenintegrale
- Differentialgleichungen
  - Einzelne Differentialgleichung, Lösen unter Beachtung der Anfangsbedingung
  - Satz von gekoppelten Differentialgleichungen
  - Entkopplung durch Variablentransformation
  - homogene und partielle Lösungen
  - Lineare (Differential-)Gleichungssysteme
  - Matrix-Schreibweise, Eigenwert, Eigenfunktion, Superpositionslösung

- Vektoren und Vektorfelder
  - Skalare und Vektoren, Einheitsvektoren
  - Vektorverknüpfungen (skalar, vektoriell)
  - linear unabhängige Vektoren (Orthonormalsystem)
  - Ortsvektor
  - Gradient eines Skalarfeldes
  - Vektoroperator Nabla
  - Divergenz und Rotation
  
- Spezielle Funktionen (Distributionen)
  - Delta-Funktion (diskrete Variante: Kronecker-Symbol)
  - Sprungfunktion
  - Umklappfunktion, Sägezahnfunktion
  
- Reihenentwicklungen von Funktionen
  - Taylorische Reihe (Taylorentwicklung einer Funktion an einer Stelle)
  - Beispiel: Exponentialfunktion
  - Binomische Reihe (Binomische Formel)
  - Entwicklung nach orthonormierten Funktionen (Sinus und Cosinus)
  - Fourier-Reihendarstellung periodischer Funktionen
  - Fourier-Transformation als Kontinuumsrenzübergang