Mathematische Methoden für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557
(Wintersemester 2013/14: 1 SWS V + 2 SWS Ü)

V: Montag 8.00 bis 8.45 Uhr, Großer Hörsaal, Inst. f. Physik
Ü-Ph: Mittwoch 7.30 bis 9.00 Uhr, Sem.Raum I, Inst. f. Physik
Ü-Ch: Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, Kl. Hörsaal, Inst. f. Physik
Tutorium (Nachhilfe) durch Helge Dobbertin: Sem.Raum Didaktik, Do, 17 Uhr

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung für alle am Montag, d. 14.10.2013, 8.00 bis 9.00 Uhr im Großen Hörsaal des Instituts für Physik am Universitätsplatz 3.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für LA-Studium Physik
2. Ch. B. Lang & N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik (Heidelberg, 1998, 2. Aufl. 2005)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 1: Mathematische Hilfsmittel (Berlin, 1974)

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Gymnasien (RPO-LA)

Mathematische Methoden für das Lehramt
Pflichtmodul
3 Leistungspunkte (LP)
unbenotet
1. Semester

Wurde als 2. Studienfach Mathematik bzw. Physik gewählt, ist ein Alternativmodul im Umfang von 3 LP zu wählen.

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Regionalen Schulen

Mathematische Methoden für Lehramt
Pflichtmodul
3 Leistungspunkte (LP)
unbenotet
1. Semester

Wurde als 2. Studienfach Mathematik bzw. Physik gewählt, ist ein Alternativmodul im Umfang von 3 LP zu wählen.

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Prüfungsterminplanung: Abschlussklausur am 20. Februar 2014 (Do), 9.30 – 11.00 Uhr, Großer Hörsaal im Institut für Physik

Inhaltsangabe

1 Einführung

1. **Mathematik in den Naturwissenschaften** (14.10.2013, R. Mahnke)
   Zur Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften. Deterministische Bewegung, z. B. frei fallende Masse mit Weg–Zeit–Funktion $x(t) = x_0 + (g/2)t^2$ (genaue Bahnkurve). Zufällige Bewegung, z. B. Galton–Brett (wobei Hüpfrate $p = 1-q$) mit Bewegungsgleichung $P(m, n+1) = p\,P(m-1, n) + q\,P(m+1, n)$ (Wahrscheinlichkeiten).

   Simulationsresultate für das Galton-Brett

   Neben der Mathematik existieren elektronische Werkzeuge. Beachte: Computeralgebra-Systeme (CAS) sind nicht unfehlbar, können aber hilfreich sein. Programmpakete: Mathematika, Maple, Maxima, ...
   Ein gratis erhältliches Open-Source-CAS: Maxima

   Ein Beispiel:

   $$solve(z^2 - 2*z + 4 = 0, z); \quad \to \quad z = 1 - sqrt(3)*i, z = 1 + sqrt(3)*i$$

   Verweis auf die komplexen Zahlen

   $$z = x + iy \quad \text{mit der imaginären Einheit} \quad i^2 = -1 \; .$$

   Hinweis:
   Um ein mögliches Missverständnis auszuräumen, sei zu Beginn betont, dass die im folgenden behandelte Mathematik – sowohl in ihrer Breite als auch in ihrer Tiefe – weit über das hinausgeht, was Sie in Ihrer künftigen Berufspraxis an Ihre Schülerinnen weitergeben können. Es geht darum, die Naturwissenschaften mit ihrer Mathematik so gut zu kennen, dass Sie Ihren Unterricht souverän und mit Verständnis planen und durchführen können.

1. Übung für Lehramt Physik am 16.10.2013, 7.30 bis 9.00 Uhr, Seminarraum 1, Institut für Physik,
Dr. Reinhard Mahnke

1. Übung für Lehramt Chemie am 16.10.2013, 7.30 bis 9.00 Uhr, Kleiner Hörsaal, Institut für Physik,
Dr. Christine Bräuning

Übungsaufgaben Serie 1
(in 1. Übung am 16.10.2013 gemeinsam erarbeitet)

(1a) Skizzieren Sie die Funktion

$$x(t) = x_0 + \frac{g}{2}t^2$$

und diskutieren den Einfluss der Kontrollparameter.

(1b) Berechnen Sie ohne Hilfsmittel die Ableitung nach x von $f(x) =$

$$\sqrt{x}, \sqrt{x^2+1}, \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \sin x, A\sin x + B\cos x, A\sin(cx) + B\cos(cx),$$

$$\sin(x^2), \sin^2 x, x^2 \sin x, \frac{\sin x}{x}, \exp(kx), e^{x^2}, e^{-x^2}, \ln(1+x^2)\ .$$

(1c) Berechnen Sie ohne Hilfsmittel die unbestimmten Integrale $I =$

$$\int dx(x^2+1), \int dy \sin(by), \int dz \cos(cz), \int dt\, e^{\lambda t}\ .$$

(1d) Berechnen Sie ohne Hilfsmittel die bestimmten Integrale $I_A^B =$

$$\int_1^2 dx(x^2+1), \int_0^{2\pi} dt \sin(\omega t), \int_0^{\pi} d\phi(\cos\phi + a\phi^2)), \int_0^{\infty} dt\, e^{-\lambda t}\ .$$

(1e) Berechnen Sie ohne Hilfsmittel das bestimmte Integral

$$I_A^B = \int_0^{1/2} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \text{ wobei } \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ .$$

2 Komplexe Zahlen

1. **Komplexe Zahlen I** (21.10.2013, R. Mahnke)
   Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable x, Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Einschränkung im Raum der rellen Zahlen, Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene, Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$, Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich, bei Division Erweiterung mit der zu z konjugiert komplexen Zahl $z^* \equiv \overline{z} = x - iy$.

   Im Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar. Beispiel: $z^2 - 2i = 0$ mit Lösung $z_1 = -z_2 = 1 + i$.

2. **Komplexe Zahlen II** (21.10.2013, R. Mahnke)
   Polardarstellung einer komplexen Zahl z mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, Hin– und Rücktransformation zwischen kartesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α).

   Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$, einfache Berechnung von Potenzen z^n durch Euler–Darstellung, 2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$).

3. **Komplexe Zahlen III** (21.10.2013, R. Mahnke)
   Die komplexe Zahl z hat verschiedene Darstellungsarten. Wir zeigen mittels Potenz–Reihendarstellung, dass folgendes, genannt Euler–Formel, gilt:
   $$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha\ .$$

4. **Komplexe Zahlen IV** (21.10.2013, R. Mahnke)
   Zusammenfassung der drei Darstellungsarten einer komplexen Zahl z:
   $$\begin{aligned} z &= x + iy \text{ — kartesische Koordinaten },\\ z &= r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ — Polarkoordinaten },\\ z &= r\exp(i\alpha) \text{ — komplexe Exponentialfunktion }. \end{aligned}$$

2. Übung für Lehramt Physik am 23.10.2013, 7.30 bis 9.00 Uhr, Seminarraum 1, Institut für Physik, Dr. Reinhard Mahnke

2. Übung für Lehramt Chemie am 23.10.2013, 7.15 bis 8.45 Uhr, Kleiner Hörsaal, Institut für Physik, Dr. Christine Bräuning

Übungsaufgaben Serie 2
(Lösungsweg(e) in 2. Übung am 23.10.2013 schriftlich abgeben)

(2a) Berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{2i-1}{i-2} \; .$$

Lösung: $z = \frac{4}{5} - i\frac{3}{5}$ 2 Punkte

(2b) Werten Sie auf einfache Weise aus (Polardarstellung) und berechnen Sie Real– und Imaginärteil:

$$z = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^4} \; .$$

Lösung: $z = 1$ 2 Punkte

(2c) Lösen Sie die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2i = 0 \; .$$

Hinweis: Unter Benutzung von $z = x + iy$ erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Es gibt (genau) zwei Lösungen $z_{1,2} = \pm\sqrt{2i} = (1+i, -1-i)$, die mittels Probe überprüft werden sollten.

3 Punkte

(2d) Lösen Sie die quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$z^2 + (1+i)\, z - 2(1-i) = 0 \; .$$

Angabe der Nullstellen in der Form $z_{1,2} = x_{1,2} + i\, y_{1,2}$.
Diskussion verschiedener Lösungsvarianten mittels Trennung in Real– und Imaginärteil oder Transformation in Polarkoordinaten. Hilfreich ist die Anwendung des Satzes von Vieta:

$$z_1 + z_2 = -p \; ,$$
$$z_1 \cdot z_2 = q \; .$$

Wegen $p = 1 + i$ und $q = -2 + 2i$ lauten somit die Nullstellen

$$z_1 = -2 \; ,$$
$$z_2 = 1 - i \; .$$

3 Punkte

5. **Komplexe Zahlen V** (28.10.2013, R. Mahnke)
   Aus
   $$(\exp(i\alpha))^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$
   folgt Satz von Moivre
   $$\exp(in\alpha) = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\ .$$

6. **Komplexe Zahlen VI** (28.10.2013, R. Mahnke)
   Diskussion über komplexe Funktionen $w = F(z)$. 2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion
   $$e^{i\alpha} = e^{i(\alpha \pm 2\pi k)} \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots\ .$$
   Als Beispiel aus der Physik: komplexe Exponentialfunktion $F(z(t)) = A\exp(i\alpha)$ mit $\alpha = \omega t$. Wichtig ist die Nullstellenberechnung $F(z) = 0$. Ausblick auf die Gleichung $z^n - 1 = 0$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$.

Zusammenfassung: Komplexe Zahlen

Bitte selbst ergänzen:

- Imaginäre Einheit, komplexe Ebene
- Kartesische Darstellung (algebraische Form)
- Polardarstellung (trigonometrische Form)
- Exponentialdarstellung (komplexe Exp-Funktion)
- Eulerformel
- Satz von Moivre
- Grundrechenarten, Potenzieren und Wurzelziehen
- Nullstellenberechnung
- Merke: Für jedes $z \neq 0$ gibt es genau n komplexe Zahlen, deren $n-$te Potenz z ist.
  $$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, n-1\ .$$
- Der *schönste mathematische Ausdruck der Welt*
  $$e^{i\pi} + 1 = 0$$
  folgt aus der Eulerformel. Warum?

3. Übung für Lehramt Physik am 30.10.2013, 7.30 bis 9.00 Uhr, Seminarraum 1, Institut für Physik, Dr. Reinhard Mahnke

3. Übung für Lehramt Chemie am 30.10.2013, 7.15 bis 8.45 Uhr, Kleiner Hörsaal, Institut für Physik, Dr. Christine Bräuning

Thema der Übung: Iterationen (Fraktale)

A. Koch'sche Schneeflocke

Die Kochsche Schneeflocke (eine Erweiterung der Kochschen Kurve) ist ein Beispiel für ein (mathematisches bzw. ideales) Fraktal. Die Konstruktionsvorschrift aus dem Jahre 1904 des schwedischen Mathemathikers Helge von Koch lautet wie folgt: Ausgangspunkt ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Man drittle jede Dreiecksseite und konstruiere über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck dieser Länge $(a/3)$. Dieser Vorgang wird nun iterativ durchgeführt, d. h. diese Prozedur wird ständig wiederholt.

Umfang U_n und umfaßte Fläche A_n sind für jede Generation $n = 0, 1, 2, \ldots$ zu berechnen.

Das Resultate für $n \to \infty$ lauten: Der Umfang $U = (4/3)^n U_0$ divergiert ($U_0 = 3a$), wobei aber der Flächeninhalt konvergiert (siehe Abb. 1) auf den Wert $A = (8/5)A_0$, wobei $A_0 = a^2\sqrt{3}/4$. Die Berechnung erfolgt über eine geometrische Reihe.

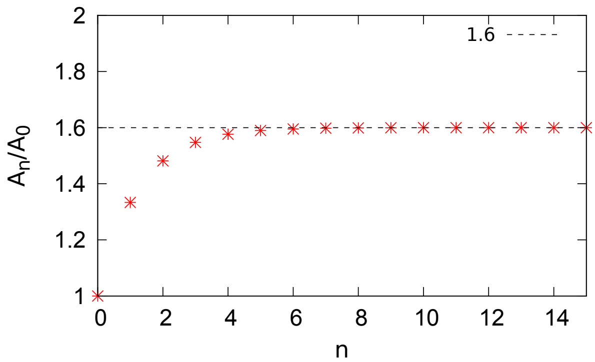

Abb. 1: Die Abbildung zeigt den Flächeninhalt A_n (gemessen in A_0) der Koch'schen Schneeflocke in Anhängigkeit der Iterationszahl n.

B. Newton'sche Iteration

Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen (bekannt als Newton–Verfahren) lautet

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; .$$

Beispiel: Nichtlineare Funktion $f(x) = 8x^2 - 2$ hat die Nullstellen $x_{null} = \pm 1/2$ (analytische Berechnung).

Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung komplexer Funktionen (bekannt als Newton–Verfahren) lautet analog dem o. g. im Reellen

$$z_{n+1} = N(z_n) \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} \; .$$

Bekanntes Beispiel: Für $F(z) = z^3 - 1$ sind die Nullstellen bekannt. Welcher Startwert z_0 führt auf welche Nullstelle z_k^{null}? Wie sieht das Einzugsgebiet der Nullstellen aus? Es hat fraktale Ränder. Warum? Der Koordinatenursprung ist ein divergenter Punkt; er gehört zur Julia-Menge.

Für die kubische Funktion $F(z) = z^3 - 1$ lautet die Newton-Iteration

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} \; ,$$

aufgespalten in Real- und Imaginärteil, wie folgt

$$\begin{aligned} x_{n+1} = N_{Re}(x_n, y_n) &= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}\frac{x_n^2 - y_n^2}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \; , \\ y_{n+1} = N_{Im}(x_n, y_n) &= \frac{2}{3}y_n - \frac{2}{3}\frac{x_n y_n}{(x_n^2 + y_n^2)^2} \; . \end{aligned}$$

Anwendung eines Computerprogramms auf Basis der Newton–Iteration zur numerischen Berechnung der Nullstellen und deren Einzugsgebiete. Frustation im Koordinatenursprung (Dreieckspunkt, Buridans – Esel – Problem), fraktale Ränder der Einzugsgebiete, alle Dreieckspunkte (Punkte, die zu keiner Nullstelle konvergieren, sondern divergieren) bilden ein Fraktal, genannt Julia–Menge.

Newton-Iteration

Übungsaufgaben Serie 3

(Lösungsweg(e) in 4. Übung am 06.11.2013 schriftlich abgeben)

(3a) Fertigen Sie Ihre ganz persönliche Zusammenfassung über die mathematischen Strukturen der komplexen Zahlen sowie die Rechenregeln mit komplexen Zahlen an.

2 Punkte

(3b) Betrachten Sie (nochmals) die Aufgabenstellung (2c) und zeigen Sie für die positive Lösung $z \equiv z_1$ die Gleichheit

$$z = 1 + i = \sqrt{2i} \, .$$

2 Punkte

(3c) Berechnen Sie die Nullstellen der komplexen Funktionen $F_n(z) = z^n - 1$ mit $n = 1, 2, 3, 4$ und skizzieren sie diese in der komplexen Zahlenebene.
Hinweis: Es ist die Nullstellengleichung $z^n - 1 = 0$ für die vier Potenzen $n = 1, 2, 3, 4$ zu lösen. Sie erhalten jeweils genau n Lösungen (Nullstellen) auf dem Einheitskreis.

2 Punkte

(3d) Berechnen Sie die dritte(n) Wurzel(n) aus $8i$. Geben Sie die Lösung(en) in kartesischer Darstellung an.

2 Punkte

(3e) Betrachten Sie (nochmals) die Aufgabenstellung (2d) und überführen das Zwischenresultat

$$z_{1,2} = -\frac{1+i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8-6i}$$

in die kartesische Schreibweise für die Nullstellen $z_1 = -2$ und $z_2 = 1 - i$.

2 Punkte

3 Differenzen- und Differentialrechnung

7. **Differenzenverfahren** (04.11.2013, R. Mahnke)
   Schrittweise Berechnung von x_{n+1} aus x_n mittels einer Iterations- bzw. Differenzengleichung
   $$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
   Aus dem gegebenen Startwert x_0 folgt der erste Folgewert x_1, daraus x_2 usw. Beispiel: lineare Funktion $f(x) = 2x$.

8. **Wachstumsgesetze** (04.11.2013, R. Mahnke)
   Wachstumsmodelle von Populationen mit und ohne Dämpfung. Berücksichtigung einer Kapazitätsgrenze führt auf eine nichtlineare Iteration, genannt logistische Gleichung
   $$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \ .$$

9. **Differenzen- und Differentialquotient** (04.11.2013, R. Mahnke)
   Differenzenquotient:
   $$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
   Differentialquotient:
   $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

10. **Newton–Iterationsverfahren** (04.11.2013, R. Mahnke)
    Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen
    $$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \ .$$
    folgt aus
    $$f'(x_n) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \ .$$
    Die Nullstellen x_{null} (aus $f(x_{null}) = 0$) sind die Fixpunkte $N(x_{null}) = x_{null}$ der Newton-Iteration.

11. **Differentialrechnung** (11.11.2013, R. Mahnke)
    Aus Taylor-Entwicklung
    $$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)$$
    folgt als Näherung in 1. Ordnung
    $$f'(x)\Delta x \approx \Delta f(x) \ .$$
    Beispiel: Kugel $V(r) = (4\pi/3) r^3$, Vergleich ΔV mit $dV = (dV(r)/dr)dr$

12. **Differentialrechnung mehrerer Variabler** (11.11.2013, R. Mahnke)
Oftmals Funktionen mehrerer Variabler $f(x_1, x_2, x_3)$; partielle Ableitungen (z. B. $\partial f(x_1, x_2, x_3)/\partial x_1$) und Ableitungen höherer Ordnung
Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 - e^{x_1 x_2}$

    Zusammenfassung:
    Definition der ersten Ableitung $f'(x)$ als Differentialquotienten $df(x)/dx$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten $\Delta f(x)/\Delta x$. Berechnung der ersten Ableitung am Beispiel $f(x) = x^2$. Zweite und höhere Ableitungen. Gewöhnliche (d) und partielle (∂) Ableitungen (bei Funktionen mehrerer Variablen).

Übungsaufgaben Serie 4
(Lösungsweg(e) in 5. Übung am 13.11.2013 schriftlich abgeben)

(4a) Berechnen Sie für das Beispiel der komplexen kubischen Funktion $F(z) = z^3 - 1$ die Newton–Iterationsformeln getrennt nach Real– und Imaginärteil.
4 Punkte

(4b) Betrachten Sie speziell die Iteration auf der rellen Achse ($y = 0$).
Welche Punkte ($x_i < 0, y = 0$) konvergieren auf den divergenten Punkt (Koordinatenursprung $x = 0, y = 0$)?
Berechnen Sie die Anfangsbedingung ($x_0 < 0, y_0 = 0$), die nach genau einer Iteration auf den Koordinatenursprung führt.
3 Punkte

(4c) Berechnen Sie die Fixpunkte des iterativen Populationswachstums, beschrieben durch die bekannte logistischen Gleichung. Diskutieren Sie die Lösungen in Abhängigkeit des Kontrollparameters r.
3 Punkte

(4d) Differenzieren Sie $f(x)$ nach x:

- $f(x) = x \ln x$
- $f(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$
- $f(x) = u(x)^{v(x)}$
- Spezialfälle: $u(x) = x; v(x) = m$ und $u(x) = v(x) = x$

5 Punkte

Übungsaufgaben Serie 5

(Lösungsweg(e) in 6. Übung am 20.11.2013 schriftlich abgeben)

(5a) Bedeutung der (ersten und zweiten) partiellen Ableitungen in den Naturwissenschaften. Betrachten Sie die Diffusionsgleichung (was beschreibt sie?)

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

als Beispiel. Beweisen Sie, dass die Funktion (genannt Gauß-Verteilung)

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right)$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung ist. Dazu sind die entsprechenden partiellen Ableitungen zu berechnen und in die o. g. Differentialgleichung einzusetzen.

5 Punkte

(5b) Die logistische Gleichung

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

ist bekannt. Der Startwert lautet x_0 mit $0 < x_0 < 1$. Wählen Sie $x_0 = 0.1$. Berechnen und diskutieren Sie die Iterationsergebnisse x_n über n in Abhängigkeit vom Kontrollparameter $0 < r \leq 4$. Betrachten Sie dazu die folgenden Werte von r, und zwar $r_1 = 1.2$, $r_2 = 3.2$ und $r_3 = 4.0$. Nun erstellen Sie drei Tabellen oder Grafiken x_n über n ($n = 0, 1, 2, \ldots, 14, 15$) und kommentieren die Ergebnisse.

5 Punkte

4 Integralrechnung

13. **Integrale I** (18.11.2013, R. Mahnke)
Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration, Substitutionsmethode; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.

14. **Integrale II** (18.11.2013, R. Mahnke)
Zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels Substitution und/oder partieller Integration; Beispiele sind $\int xe^x \, dx$, $\int \cos^2 x \, dx$ und $\int \ln x \, dx$.
Erweiterung des Integralbegriffs auf mehrdimensionale Integrale. Einführung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen, z. B. Bogenlänge.

15. **Integralrechnung III** (25.11.2013, R. Mahnke)
Zur Berechnung von Kurvenintegralen; Berechnung der Bogenlänge eines Kreises in kartesischen Koordinaten schwierig; Berechnung nach Transformation in Polarkoordinaten bzw in Parameterdarstellung.
Verwendung von zweidimensionalen Integralen zur Massenberechnung bei inhomogener Dichteverteilung $\rho(x, y)$
$$M = \int_{\text{Fläche}} \rho(x, y) \, dx \, dy \; .$$
Berechnung von Volumen mittels dreidimensionaler Integration; Beispiel: Volumen einer Kugel (Radius R) mittels dreidimensionaler Integration
$$V = \int_{\text{Kugel}} dx \, dy \, dz \; .$$
Rechnung in kartesischen Koordinaten sehr kompliziert; nach Transformation in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung der Jakobi-Determinante wird Rechnung viel einfacher; sinnvoll bei radialsymmetrischen Körpern.

Übungsaufgaben Serie 6

(Lösungsweg(e) in 7. Übung am 27.11.2013 schriftlich abgeben)

(6a) Lösen Sie mittels Variablentransformation zuerst das unbestimmte Integral

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

und bestimmen Sie anschliessend den Wert des Integrals I_a^b in den Grenzen von $a = 0$ bis $b = 1$.

2 Punkte

(6b) Lösen Sie mittels zweimaliger partieller Integration das Integral

$$I = \int y^2\, e^{-y}\, dy\ .$$

2 Punkte

(6c) Informieren Sie sich über numerische Integration eines (Riemannschen) Integrals. Wie lautet die Trapezregel im Gegensatz zur Simpson–Formel?

2 Punkte

(6d) Was bedeutet die Integration entlang einer Kurve (Kurvenintegral) im Gegensatz zum Riemann–Integral?
Berechnen Sie die Länge eines Viertelkreises mit dem Radius $r = 2$ durch Integration entlang des Kreiskurve. Die Lösung kennen Sie bereits (aus der Schule).

4 Punkte

ZUSATZ Prüfen Sie sich selbst, ob Sie integrieren können.
(Bitte keine Abgabe des Lösungsweges, es gibt keine Punkte).

$$I_1 = \int \cos x\, \sin^2 x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$I_2 = \int_a^b x\, \cos x\, dx = (x \sin x + \cos x)\Big|_a^b$$

5 Differentialgleichungssysteme

16. **Differentialgleichungssysteme I** (25.11.2013, R. Mahnke)
Einführung bzw. Wiederholung des Begriffs Differentialgleichung; Verweis auf die einfache Bewegungsgleichung $dx/dt = \lambda x$ als Anfangswertproblem $x(t = 0) = x_0$; Trennung der Variablen als einfachste analytische Lösungsmethode; Diskussion der ermittelten Lösung $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$.
Klassifikation von Differentialgleichungen (linear/nichtlinear und homogen/inhomogen); Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (auch in Matrix–Schreibweise) am Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \; ; \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y \quad ; \quad y(t=0) = y_0 \; . \end{aligned}$$

Diese algebraische Lösungsmethode erfordert das Kennenlernen der Begriffe Matrix, Determinante, Eigenwert, Eigenvektor. Die Lösung der Eigenwertgleichungen und die Anwendung der Superpositionsmethode liefern als Resultat der o. g. linearen Differentialgleichungen die Funktionen

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} \left(x_0 \cos t + y_0 \sin t \right) \; ; \\ y(t) &= e^{-t} \left(y_0 \cos t - x_0 \sin t \right) \; . \end{aligned}$$

17. **Differentialgleichungssysteme II** (02.12.2012, R. Mahnke)
Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der $x-y$–Zustandsebene.
Das transformierte Gleichungsystem ist entkoppelt

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -r \quad ; \quad r(t=0) = r_0 \; ; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -1 \quad ; \quad \alpha(t=0) = \alpha_0 \; . \end{aligned}$$

und die Lösung ist mittels elementarer Integration möglich

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \exp(-t) \; ; \\ \alpha(t) &= -t + \alpha_0 \end{aligned}$$

und lautet als Bahnkurve

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) \; .$$

Übungsaufgaben Serie 7
(Lösungsweg(e) in 8. Übung am 04.12.2013 schriftlich abgeben)

(7a) Aufgabe zum Thema *eindimensionale Integration*:

$$\int dx \sin^2 x \qquad ; \qquad \int_0^{\pi/2} dx \sin^2 x$$

mit grafischer Diskussion der Lösungen.

2 Punkte

(7b) Aufgabe zum Thema *Integration entlang einer Kurve*:
Berechnung der Masse eines im Viertelkreis ($r = 2$) gebogenen Drahtes

$$M = \int_C ds\, \rho(x, y) \quad \text{mit} \quad \rho(x, y(x) = \sqrt{4 - x^2}) = 1 + x$$

mit Diskussion der Lösung.

4 Punkte

(7c) Aufgabe zum Thema *dreidimensionale Integration*:
Berechnen Sie in kartesischen Koordinaten das Kugelvolumen (Radius R)

$$V = \int\int\int_{\text{Kugel}} dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{3} R^3 \; .$$

Schauen Sie dazu in die Literatur und vollziehen die (komplizierte) Rechnung nach.
Nun ersetzen Sie $dV = dx\, dy\, dz$ durch $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ und berechnen nun in Kugelkoordinaten das Kugelvolumen. Sie erhalten das gleiche Resultat.

4 Punkte

Übungsaufgaben Serie 8
(Lösungsweg(e) in 9. Übung am 11.12.2013 schriftlich abgeben)

(8a) Aufgabe zum Thema *Zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen*:
Das lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_1}{dt} = -8x_1 + 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = +8x_1 - 2x_2$$

ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x_1(t = 0) = 0$ und $x_2(t = 0) = 1$ in kartesischen Koordinaten zu lösen. Verwenden Sie dazu die algebraische Methode und lösen das Eigenwertproblem. Skizieren Sie abschliessend die Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ grafisch.

5 Punkte

(8b) Aufgabe zum Thema *Zwei nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen*: Der *van der Pol–Oszillator* mit seiner nichtlinearen Dynamik

$$\frac{dx}{dt} = x - y - x(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y - y(x^2 + y^2) \qquad ; \qquad y(t=0) = y_0 \; .$$

ist unter Verwendung der Transformationsmethode (Polarkoordinaten) zu lösen.

5 Punkte

6 Vektoralgebra und Vektoranalysis

18. **Vektoren** (09.12.2013, R. Mahnke)
Naturwissenschaftliche Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor. Verknüpfung von Vektoren: (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$) und (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$). Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

19. **Skalar– und Vektorfelder** (16.12.2013, R. Mahnke)
Begriff des Gradienten $\operatorname{grad} \varphi$: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie) und Kraft.
Begriff der Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelldichte. Einfaches Beispiel: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.
Verweis auf den Vektoroperator Nabla $\vec{\nabla}$ (in kartesischen Koordinaten).
Begriff der Rotation $\operatorname{rot} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.
Zwei wichtige Formeln:
$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi \equiv \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

Letzter Übungstermin vor Weihnachten: 18.12.2013
Keine Hausaufgaben zur ersten Übung am 08.01.2014

Übungsaufgaben Serie 9
(Lösungsweg(e) in 10. Übung am 18.12.2013 schriftlich abgeben)

(9a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ und die normierten Eigenvektoren X der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie dessen Inverse A^{-1} aus $A^{-1}A = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Hinweis:
Die Eigenwertgleichung lautet wegen $(A - \lambda E)X = 0$ somit wie folgt

$$\begin{pmatrix} 10 - \lambda_i & -3 \\ -3 & 2 - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ x_{i,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

5 Punkte

(9b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem (verwenden Sie die Matrizenschreibweise)

$$\frac{dx}{dt} = y \quad ; \quad x(t=0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = x \quad ; \quad y(t=0) = y_0$$

unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangsbedingungen.

5 Punkte

Wiederholung zum Thema **Lineare Gleichungssysteme** in der Übung am 08.01.2014:
Gruppe Physik (R. Mahnke) & Gruppe Chemie (S. Rosmej)

Algebraische lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise $Y = AX$ mittels Invertierung $X = A^{-1}Y$ lösen.
Eindimensionale lineare Differentialgleichung $dx/dt = \lambda\, x$ mit Anfangsbedingung $x(t=0) = x_0$ besitzt die Lösung $x(t) = x_0 \exp(\lambda t)$. Erweiterung auf mehrdimensionale lineare Gleichungssysteme $dX/dt = M\,X$.
Superpositionslösung (unter Verwendung von Eigenwerten λ aus $\det(M - \lambda E) = 0$ und Eigenvektoren U aus $(M\,U = \lambda E\,U)$ lautet

$$X(t) = \sum_i c_i\, U_i\, e^{\lambda_i t} .$$

Die Koeffizienten c_i sind aus den Anfangsbedingungen $X(t=0) = X_0$ zu ermitteln.

7 Spezielle Funktionen

20. **Die Delta– und Sprungfunktion** (06.01.2014, R. Mahnke)
Die Dirac'sche Deltafunktion $\delta(x)$ und die Heaviside'sche Sprungfunktion $\theta(x)$ sind sog. Distributionen. Sie spielen in den Naturwissenschaften zur kontinuierlichen Beschreibung von Feldern, z. B. ist die Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ eine Delta–Funktion, und bei Ein- und Ausschaltvorgängen eine Rolle.
Die Deltafunktion bzw. Delta–Distribution ist die erste Ableitung der Sprungfunktion. Sie ist auch über das folgende Integral
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$
definiert.

Übungsaufgaben Serie 10
(Lösungsweg(e) in 12. Übung am 15.01.2014 schriftlich abgeben)

(10a) Koordinatentransformationen:
Stellen Sie für kartesische, Zylinder– und Kugelkoordinaten folgende Formeln zusammen:

- Ortsvektor $\vec{r}$
- totales Differential $d\vec{r}$
- Nabla $\vec{\nabla}$
- Berechnen Sie $\operatorname{grad} \vec{r}^{\,2}$.

4 Punkte

(10b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z)$, gegeben durch
$$\vec{F} = (2x + y)\,\vec{i} + (x - y^2)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\ ,$$
konservativ ist (prüfen Sie, ob $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ gilt) und berechnen Sie danach die Skalarfunktion $\varphi(x, y, z)$ mittels
$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi\ .$$

4 Punkte

(10c) Berechnen Sie den Gradienten des Skalarfeldes $g(x, y, z) = x^2 y$.

1 Punkt

(10d) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{u}(\vec{r}) = (2yz, xy + z^2, -z^2)$.

1 Punkt

8 Folgen und Reihen

21. **Potenzreihe und Taylor–Formel** (13.01.2014, R. Mahnke)
Stetige Funktionen können durch eine Potenzreihe approximiert werden. Diese als Taylor–Reihe bekannte Darstellung verwendet Ableitungen k-ter Ordnung. Das bekannteste Beispiel ist die Reihendarstellung der Exponential–Funktion durch die Summe der Potenzen $x^k/k!$.
Hinweis auf Taylor–Entwicklung mehrdimensionaler Funktionen, auf die Binomische Reihe und die Fourier–Darstellung periodischer Funktionen.

Übungsaufgaben Serie 11
(Lösungsweg(e) in 13. Übung am 22.01.2014 schriftlich abgeben)

(11a) Wie lautet der Laplace–Operator Δ in drei Dimensionen? Verwenden Sie dazu $\Delta f = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f$.

3 Punkte

(11b) Wenden Sie den Laplace–Operator $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ auf die folgenden skalaren Felder an:

A) $f(x, y) = x^2 y$ (2dim)
B) $g(x, y, z) = x^2 + (y - x^3)z^2$ (3dim)
C) $h(x, y) = r^2$ (2dim)
D) $h(x, y, z) = r^2$ (3dim)

4 Punkte

(11c) Die geometrische Reihe lautet

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \ ,$$

gültig für alle rellen x mit $|\, x \,| < 1$. Beweisen Sie diese Formel mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung der Funktion $(1-x)^{-1}$ an der Stelle 0.

3 Punkte

22. **Fourier-Transformation** (20.01.2014, R. Mahnke)
Kontinuierliche symmetrische eindimensionale Fourier-Transformation zwischen Funktion im Ortsraum $f(x)$ und Funktion $g(k)$ im reziproken Raum (Wellenzahlraum $k = 2\pi/L$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} g(k) dk \tag{1}$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \tag{2}$$

Analoges gilt für eine Funktion abhängig von Zeit t und transformierte Funktion abhängig von Kreisfrequenz ω mit $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Beachte: Integrale enthalten komplexe Exponentialfunktion. Somit exakte Auswertung der rellen Integrale mithilfe der Euler-Formel.

23. **Entwicklung nach orthonormiertes Funktionensystemen** (20.01.2014, R. Mahnke)
Komplexwertige Funktionen $\varphi_k(x)$ mit $k = 1, 2, \ldots, n$, gegeben im Intervall $a \leq x \leq b$. Linear unabhängige Funktionenfolge. Betrachte Grenzfall $n \to \infty$.
Definiere Skalarprodukt $(\varphi_k(x), \varphi_m(x))$ (analog zu Vektoren). Orthonormiertes Funktionensystem mittels Kronecker-Symbol schreiben

$$(\varphi_k(x), \varphi_m(x)) = \int_a^b \varphi_k^*(x)\, \varphi_m(x)\, dx = \delta_{km} \; . \tag{3}$$

Vergleiche mit dem Skalarprodukt zwischen (komplexen) Vektoren

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k^*\, b_k \; , \tag{4}$$

wobei der Stern *konjugiert komplex* bedeutet.

24. **Fourierreihen-Entwicklung** (27.01.2014, Ch. Bräuning)
Periodische Vorgänge $f(x)$ im Intervall der Länge $2L$ ($0 \leq x \leq 2L$ oder symmetrisch $-L \leq x \leq +L$) durch periodische Funktionen, die ein vollständig orthonormiertes Funktionensystem bilden, approximieren. Diese Reihendarstellung heißt Fourier-Entwicklung in reeller Schreibweise

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{5}$$

bzw. in komplexer Schreibweise

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\frac{k\pi}{L}x} \tag{6}$$

Die Fourier-Koeffizienten (entspricht Rücktransformation) lauten im Komplexen

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\frac{k\pi}{L}x} dx \tag{7}$$

bzw. im Reellen

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \tag{8}$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \tag{9}$$

Der Kontinuumsgrenzübergang ($L \to \infty$, ganze Zahlen k werden zu kontinuierlicher reeller Wellenzahl k) führt auf die nichtsymmetrische Fourier-Transformation (vgl. 1 und 2)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} g(k) dk \tag{10}$$

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \tag{11}$$

für die Entwicklung beliebiger (nichtperiodischer) Funktionen $f(x)$ im Intervall $-\infty < x < +\infty$.

9 Zusammenfassung

- Komplexe Zahlen

  Algebraische (kartesische) Form
  Trigonometrische (polare) Form
  komplexe Exponentialfunktion
  Zusammenhänge zwischen diesen Darstellungsformen
  Euler-Formel
  Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
  Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene

- Differenzengleichung (Iterationen)

  Differenzenverfahren (Generationenfolge)
  Diskretes Wachstum (Wachstumsmodelle)
  Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung
  Beispiel: Koch'sche Schneeflocke

- Differentialrechnung

  erste (gewöhnliche) Ableitung, höhere Ableitungen
  partielle Ableitungen
  Differentiationsregeln
  totales Differential

- Integralrechnung

  Riemannsches Integral (mit und ohne Grenzen)
  bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze
  Integration eines Produkts (partielle Integration)
  Substitutionsmethode
  Sinnvolle Ansätze wählen, Probe machen
  mehrdimensionale Integrale
  Kurvenintegrale

- Differentialgleichungen

  Einzelne Differentialgleichung, Lösen unter Beachtung der Anfangsbedingung
  Satz von gekoppelten Differentialgleichungen
  Entkopplung durch Variablentransformation
  homogene und partielle Lösungen
  Lineare (Differential-)Gleichungssysteme
  Matrix-Schreibweise, Eigenwert, Eigenfunktion, Superpositionslösung

- Vektoren und Vektorfelder

  Skalare und Vektoren, Einheitsvektoren
  Vektorverknüpfungen (skalar, vektoriell)

linear unabhängige Vektoren (Orthonormalsystem)
Ortsvektor
Gradient eines Skalarfeldes
Vektoroperator Nabla
Divergenz und Rotation

- Spezielle Funktionen (Distributionen)

  Delta–Funktion (diskrete Variante: Kronecker-Symbol)
  Sprungfunktion
  Umklappfunktion, Sägezahnfunktion

- Reihenentwicklungen von Funktionen

  Taylorsche Reihe (Taylorentwicklung einer Funktion an einer Stelle)
  Beispiel: Exponentialfunktion
  Binomische Reihe (Binomische Formel)
  Entwicklung nach orthonormierten Funktionen (Sinus und Cosinus)
  Fourier-Reihendarstellung periodischer Funktionen
  Fourier-Transformation als Kontinuumsgrenzübergang