

---

# Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &  
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke  
Institut für Physik

---

**Lehrveranstaltung Nr. 12558**  
**(Wintersemester 2013/14: 2 SWS V + 1 SWS Ü)**

V: Dienstag 9.15 bis 10.45 Uhr, Sem.Raum I, Inst. f. Physik  
Ü: Freitag 11.15 bis 12.45 Uhr, Sem.Raum I, Inst. f. Physik  
ungerade Woche; Lehrperson: Frau Dr. Christine Bräuning

---

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung  
für alle am Dienstag, d. 15.10.2013, 9.15 bis 10.45 Uhr  
im Seminarraum I des Instituts für Physik am  
Universitätsplatz 3.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Elemente der theoretischen Physik, Band 1: Klassische Mechanik, LA-Studium Physik
2. Achim Feldmeier: Theoretische Mechanik (Springer, 2013)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 2: Einführung in die Physik. Mechanik (Berlin, 1980)

## **Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Gymnasien bzw. an Regionalen Schulen (RPO-LA)**

### **Aus der Anlage 4.14: Fachanhang Physik einschließlich Atronomie**

Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

Pflichtmodul

3 Leistungspunkte (LP)

jedes Wintersemester

3. Semester

Teilnahmevoraussetzung: Modul Mathematische Methoden für das Lehramt

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Prüfungsterminplanung: Abschlussklausur am 20. Februar 2014 (Do), 13.30 – 15.00 Uhr, Großer Hörsaal im Institut für Physik

# Inhaltsverzeichnis

|   |  |    |
|---|--|----|
| 1 | Einleitung   | 4  |
| 2 | Zufallswanderer und Drift-Diffusion                  | 5  |
| 3 | Theoretische Mechanik:<br>Newton'sche Formulierung   | 11 |
| 4 | Theoretische Mechanik:<br>Lagrange'sche Formulierung | 17 |
| 5 | Theoretische Mechanik:<br>Hamilton'sche Formulierung | 18 |
| 6 | Theorie dynamisches Systeme                          | 21 |

# 1 Einleitung

## 1. Überblick (16.10.2013, R. Mahnke)

Klassische Mechanik beschreibt deterministische Bewegungen mittels

- Newtonscher Bewegungsgleichung: Kraft gegeben, Bahnkurve gesucht
- Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange II): Lagrange-Funktion geg.
- Hamiltonsche Gleichungen: Hamilton-Funktion geg.
- Liouville-Gleichung im Phasenraum: Phasenraumdynamik, z. B. des mathematischen Pendels

Zwei klassische lösbare Probleme der Mechanik sind

- harmonischer Oszillator (lineare rücktreibende Kraft)
- Kepler-Problem (Zentralkraftbewegung)

## 2. Deterministisches Chaos (16.10.2013, R. Mahnke)

Aber es gibt mehr: die *Theorie (nichtlinearer) dynamischer Systeme*, beinhaltet die klassische Mechanik. Neben den regulären Bahnkurven existieren auch irreguläre deterministische Bewegungen, genannt deterministisches Chaos mit seiner sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x(t+1) = rx(t)(1-x(t))$$

## 3. Der Zufall: Stochastische Prozesse (16.10.2013, R. Mahnke)

Physik stochastischer Prozesse (gehört im engeren Sinne nicht zur klassischen Mechanik) liefert Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Beispiel: Zufallswanderer (Galton-Brett)

$$P(m, n+1) = pP(m-1, n) + qP(m+1, n)$$

Das Ergebnis (die Lösung) ist eine Wahrscheinlichkeit  $P(m, n) = \dots$ , die eine Binominalverteilung ist.

## 2 Zufallswanderer und Drift-Diffusion

Die deterministische Bewegung wird durch Schwankungen (Fluktuationen) gestört. Überwiegen die zufälligen Ereignisse wird die Bewegung stochastisch (Physik stochastischer Prozesse). Diffusion ist ein einfacher zufälliger Prozess.

### 4. Zufallswanderer I (42. KW, R. Mahnke)

Das Brownsche Teilchen (der Zufallswanderer) wird durch eine iterative Markov-Dynamik beschrieben. Der eindimensionale Zufallswanderer springt in einem Zeitschritt (Hüpfzeit  $\tau$ ) mit Wahrscheinlichkeit  $p$  nach rechts (Schrittweite  $a$ ) und mit Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  nach links.

Diskrete Zeit:  $t_n = \tau n$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$

Diskreter Ort:  $x_m = a m$  mit  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Drift-Diffusions-Bewegungsgleichung ist eine Iteration in der Zeit

$$P(x_m, t_n + \tau) = pP(x_m - a, t_n) + qP(x_m + a, t_n). \quad (1)$$

Anfangsbedingung

$$P(x_m, t_0 = 0) = \delta_{x_m, x_0=0}. \quad (2)$$

Spezialfälle:  $p = q = 1/2$  (reine Diffusion, nur Zufallsbewegung);  $p = 1$  (gerichtete deterministische Bewegung, nur Drift)

Die Lösung von (2) ist die Binominalverteilung (Pascal'sches Dreieck, Galton-Brett), wobei  $P(x_m, t_n) \equiv P(m = x_m/a, n = t_n/\tau) \equiv P(m, n)$

$$P(m, n) = \frac{n!}{[(n+m)/2]! [(n-m)/2]!} p^{(n+m)/2} q^{(n-m)/2}. \quad (3)$$

Wie ist die Lösung (3) zu erhalten?

Transformation in den inversen Ortsraum (Wellenzahlraum  $k$ ) mittels Fourierreihe

$$\tilde{P}(k, n) = \sum_{m=-n}^{+n} e^{ikm} P(m, n) \quad (4)$$

$$P(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikm} \tilde{P}(k, n) dk. \quad (5)$$

Einige Fragen:

- Skizzieren Sie jeweils eine rein deterministische und eine stochastische Bewegung eines Zufallswanderers über drei Zeitschritte.
- Schreiben Sie zuerst die diskrete Drift-Diffusions-Gleichung (Markov-Kette) auf. Ergänzen Sie die Anfangsbedingung als zweite Gleichung.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(x_m, t_n)$  für den zweiten Zeitschritt aus der bekannten Anfangssituation  $P(x_m, t_0 = 0) = \delta_{x_m, 0}$  mit dem Parameter  $p = 1/4$  (Hüpfwahrscheinlichkeit nach rechts).

5. **Zufallswanderer II** (42. KW, R. Mahnke)

Wichtige Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(m, n)$  liefern die Momente  $k$ -ter Ordnung

$$\langle m^k \rangle(n) = \sum_{m=-n}^n m^k P(m, n). \quad (6)$$

Das Moment  $k = 0$  ist die Normierung; das erste Moment  $k = 1$  ist der Mittelwert; das zweite Moment  $k = 2$  hängt mit der Breite (Varianz, Standardabweichung) der Verteilung zusammen.

Normierung ( $k = 0$ ):

$$\langle m^0 \rangle(n) = \sum_{m=-n}^n P(m, n) = 1. \quad (7)$$

Das erste Moment ( $k = 1$ ) der Wahrscheinlichkeitsverteilung 3 ist

$$\langle m \rangle(n) = \sum_{m=-n}^n m P(m, n) = 2n \left( p - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

und das zweite Moment ( $k = 2$ ) ist

$$\langle m^2 \rangle(n) = \sum_{m=-n}^n m^2 P(m, n) = 4npq + 4n^2 \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (9)$$

Somit ergibt sich die Standardabweichung zu

$$(\Delta m)(n) \equiv \sqrt{\langle (m - \langle m \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2} = \sqrt{4npq}, \quad (10)$$

und der relative Fehler

$$\frac{\Delta m}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{4np(1-p)}}{2n(p-1/2)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{(p-1/2)^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \simeq n^{-1/2} \quad (11)$$

geht gegen Null, wenn die (diskrete) Zeit  $n$  gegen Unendlich konvergiert.

## 6. Zufallswanderer III (43. KW, R. Mahnke)

Betrachte Kontinuumsrenzfall ( $a \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ ):

(Symmetrische) Diffusion ist (im Gegensatz zur Drift) eine ungerichtete Bewegung. Diffusion ist ein zufälliger Prozeß. Das Galtonbrett ist eine experimentelle Realisierung der (diskreten) Diffusion. Der Zufallswanderer ist ein einfaches Modell der Diffusion. Eine zentrale Gleichung der Physik (Nichtgleichgewichtsdynamik, Diffusionskonstante  $D$ ) ist die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \quad (12)$$

mit der Anfangsbedingung

$$p(x, t = 0) = \delta(x - x_0) . \quad (13)$$

Die Lösung der Diffusionsgleichung ist die bekannte Normal- bzw. Gauss-Verteilung

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2Dt}\right) . \quad (14)$$

Berechnung der ersten drei Momente ( $k = 0, 1, 2$ )

$$\langle x^k \rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x, t) dx . \quad (15)$$

liefert

$$\langle x^0 \rangle(t) = 1 \quad (16)$$

$$\langle x^1 \rangle(t) = x_0 \quad (17)$$

$$\langle x^2 \rangle(t) = Dt + x_0^2 \quad (18)$$

und Standardabweichung

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{Dt} . \quad (19)$$

Betrachte Erweiterung auf den Drift–Diffusion–Fall (asymmetrische Diffusion). Bewegungsgleichung (Spezialfall der Fokker–Planck–Gleichung) ist Erweiterung der Diffusionsgleichung (12) der Form

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -v_D \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (20)$$

wobei  $v_D$  die Driftgeschwindigkeit ist.

- (a) Überprüfung, dass (14) wirklich Lösung von (12) ist (Probe machen).
- (b) Ermittlung der Lösungsfunktion (14) mittels Skalierungstransformation

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{Dt}} \quad ; \quad p(x, t)dx = Q(\xi)d\xi \quad (21)$$

angewendet auf (12).

Nach Anwendung von (21) folgt aus (12) eine transformierte neue Diffusionsgleichung

$$\frac{d^2 Q(\xi)}{d\xi^2} + \xi \frac{dQ(\xi)}{d\xi} + Q(\xi) = 0. \quad (22)$$

mit der Lösung (Normalverteilung)

$$Q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (23)$$

Nach Rücktransformation folgt die bekannte Lösung (14).

- (c) Es ist zu zeigen, wie die Lösung (14) der Diffusionsgleichung (12) mittels Fourier-Entwicklung zu erhalten ist. Dazu wird die gesuchte Funktion transformiert vom Ortsraum in den inversen Wellenzahlraum zu  $\tilde{p}(k, t)$ . Die Fourier-Transformation ist definiert als

$$\tilde{p}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} p(x, t) dx, \quad (24)$$

$$p(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{p}(k, t) dk, \quad (25)$$

wobei  $k$  Wellenzahl ist.

- (d) Berechnung der ersten drei Momente ( $k = 0, 1, 2$ ) der Wahrscheinlichkeitsdichte der Drift-Diffusions-Bewegung. Zur Vereinfachung setze Startposition  $x_0 = 0$ .

Einige Fragen:

- Wie lautet die Drift-Diffusions-Gleichung in kontinuierlicher Formulierung? Was ist gegeben? Was ist zu bestimmen?
- Schreiben Sie die Gleichung zur Berechnung des ersten Momentes (Mittelwert) für den Fall diskreter (reiner) Diffusion auf.
- Erläutern Sie die beiden Kontrollparameter 'Diffusionskonstante' und 'Driftgeschwindigkeit'. Gegen Sie auch die Maßeinheiten an.

#### 7. Aufgaben zur Drift-Diffusion (zu bearbeiten bis 43. KW)

- Diskrete Drift-Diffusion:  
Symmetrischer Zufallswanderer, Münzwurf bzw. 'drunken sailor', Galton-Brett, Binominal-Wahrscheinlichkeitsverteilung, diskrete Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung, Pascalsches Dreieck
- Kontinuierliche Drift-Diffusion:  
Drift-Diffusionsgleichung als kontinuierliche Bewegungsgleichung und deren Lösung (Normalverteilung), zeitliche Entwicklung des Dichteprofiles, Mittelwert und Schwankung

Aufgaben:

- (a) Zusammenfassung zum Thema *Diffusion* anfertigen, und zwar in einer Tabelle diskrete und kontinuierliche Ergebnisse gegenüberstellen: Bewegungsgleichung mit Anfangsbedingung; Lösungsfunktion; 0., 1., 2. Moment und Varianz.  
4 Punkte
- (b) Original-Arbeit von Albert Einstein aus 1905 lesen und seine Herleitung der Diffusionsgleichung (ab S. 556) nachvollziehen.  
Link zu Annalen der Physik  
2 Punkte
- (c) Empirische Herleitung der Diffusionsgleichung mittels Fickscher Gesetze präsentieren. Kontinuitätsgleichung verwenden.  
2 Punkte

- (d) Machen Sie ein diskretes Diffusionsexperiment mittels Münzwurf. Ermitteln Sie bei 10 Würfeln (bzw. bei 10 Schritten) und bei 20 und anschliessend bei 50 Realisierungen den Mittelwert und die Varianz. Vergleichen Sie die erhaltenen Resultate mit der Theorie des Zufallswanderers.

4 Punkte

- (e) Berechnung der ersten drei Momente (bis  $\langle m^2 \rangle(n)$ ) der symmetrischen Binominalverteilung (in Analogie bis zu  $\langle x^2 \rangle(t)$ ).

3 Punkte

- (f) Betrachten Sie die Diffusion in einem endlichen Intervall der Länge  $L$  mit zwei reflektierenden Rändern (RR) und berechnen für dieses Anfangs- und Randwertproblem die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p_{RR}(x, t)$ .

Das Problem ist durch den folgenden Satz von Gleichungen beschrieben:

- i. Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}, \quad (26)$$

- ii. Anfangsbedingung (Delta-Funktion)

$$p(x, t = 0) = \delta(x - x_0) \quad \text{with} \quad x_0 = 0, \quad (27)$$

- iii. Bedingung für reflektierenden Rand bei  $x = a = -L/2$  (linke Begrenzung)

$$\left. \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0, \quad (28)$$

- iv. Bedingung für absorbierenden Rand bei  $x = b = +L/2$  (rechte Begrenzung)

$$p(x = b, t) = 0. \quad (29)$$

Welches Ergebnis erhalten Sie im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$ ?

Optional

Zusatz: 5 Punkte

Zwei Fragen:

- Warum hat die Diffusionsgleichung eine so große Bedeutung in den Naturwissenschaften? Was beschreibt diese Bewegungsgleichung?
- Motivieren Sie die Diffusionsgleichung. Geben Sie eine einfache Herleitung an.

### 3 Theoretische Mechanik: Newton'sche Formulierung

Deterministische Dynamik: Newtonsche Bewegungsgleichung(en) plus Anfangsbedingungen.

#### 8. Newtonsche Dynamik I (44. KW, R. Mahnke)

Wiederholung Ortsvektor  $\vec{r}$ , Geschwindigkeit  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  und Beschleunigung  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ .

Beispiel: Gleichförmige Kreisbewegung (Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn)  $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$ .

Beispiel: Harmonischer Oszillator (eindimensionaler Federschwinger), Bahnkurve  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  ist Lösung der Gleichung  $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ .

Kraft  $\vec{F}$  ist Ursache der Bewegung:  $\ddot{\vec{r}} \sim \vec{F}$ .

Die klassische (Newtonsche) Mechanik handelt von Newtons II. Axiom  $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ . Gesucht ist die Bahn (Trajektorie)  $\vec{r}(t)$  einer Masse  $m$  bei einer Frafteinwirkung  $\vec{F}$  unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Die Kinematik behandelt den einfachen Fall einer kräftefreien Bewegung  $m\ddot{\vec{r}} = 0$ .

Beispiele für Kräfte: Gravitationskraft, Coulombkraft, Schwerkraft, Kraft im äußeren elektrischen bzw. magnetischem Feld (Lorentzkraft), Mehrteilchenkräfte (Zweikörperproblem), harmonische Kraft  $F(x) = -kx$ , Reibungskraft, äußere (periodische) Anregung, etc

Zusammenfassung: Grundgleichung der Newtonschen Mechanik

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 .$$

Lehrveranstaltung am 05.11.2013 (45. KW) entfällt wegen StuRa-Vollversammlung (Rektor-Mail).

Beispiel zur Behandlung in der Übung: **Harmonischer Oszillator**

Modell des Federschwingers (lineares Modell), Hook'sches Gesetz, Federkraft, Newton'sche Bewegungsgleichung, Anfangsbedingungen, dynamisches System aus zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen, verschiedene Lösungsmethoden (exp-Ansatz, Eigenvektoren, Energieerhaltung). Ermittlung der zeitabhängigen Lösungen  $x = x(t)$  (Ort über Zeit) und  $v = v(t)$  (Geschwindigkeit über Zeit) des Federschwingers. Eventuell zuerst lineare Transformation der Ortskoordinate zur Verschiebung des Koordinatenursprungs. Verschiedene Lösungsmethoden:

- 1.) Anwendung der Energieerhaltung
- 2.) Anwendung des Ansatzes  $\exp(\lambda t)$
- 3.) Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Die mathematische Form der Lösungen ist unterschiedlich. Sie können aber ineinander überführt werden. Es gibt nur eine physikalische Lösung des Federschwingers, aber verschiedene mathematische Schreibweisen.

*Übungsaufgaben Serie 2*

(Lösungsweg(e) in 2. Übung am 08.11.2013 schriftlich abgeben)

- (2a) Wie lauten die (beiden) Newtonschen Bewegungsgleichungen für das Zwei-Teilchen-Problem?  
3 Punkte
- (2b) Behandeln Sie die eindimensionale kräftefreie Bewegung  $x(t)$  einer Masse  $m$ . Visualisieren Sie das Ergebnis in einer  $v$ -über- $x$ -Ebene.  
3 Punkte
- (2c) Behandeln Sie die Bewegung in einem zeitunabhängigen homogenen Kraftfeld, genannt Schwerfeld, der Form  $\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, -mg)$ .  
3 Punkte
- (2d) Geben Sie ein numerisches Verfahren zur iterativen Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung an.  
3 Punkte

## 9. Newtonsche Dynamik II (46. KW, R. Mahnke)

Mehrteilchensystem aus  $N$  (Punkt-)Teilchen:  $3N$  gekoppelte Newton-Differentialgleichungen sind zusammen mit Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit als Anfangswertproblem zu lösen. Aber wie? Analytisch bzw. Computeralgebra, numerisch (Euler-Cauchy, ..., Runge-Kutta) oder mittels Simulation.

Bekanntestes Beispiel: Harmonischer Oszillator (Federschwinger)

$$m\ddot{x} = -kx$$

Weiteres Beispiel: Freier Fall mit Reibung

$$m\ddot{x} = -mg - r\dot{x}$$

Definition von Impuls  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ , Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , kinetischer  $T = (m/2)(\dot{\vec{r}})^2$  und potentieller Energie  $V(x) = -\int F(x)dx$ .

Dynamik eindimensionaler Bewegung mit beliebiger ortabhängiger Kraft:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \text{ und } \dot{x}(t=0) = v_0$$

Allgemeine Lösung  $t = t(x)$  mittels Energieerhaltungssatz  $T + V = E$ .

## 10. Schwingungen (47. KW, R. Mahnke)

Bekannt ist der harmonische Oszillator. Erweiterung durch Reibungskraft und äußere eingeprägte Kraft. Wirkt zusätzlich zur (harmonischen bzw. linearen) rücktreibenden Kraft eine geschwindigkeitsabhängige Dämpfung und eine zeitabhängige periodische aufgeprägte Kraft, so lautet die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{ext} \sin(\Omega t) .$$

Diskussion von Spezialfällen. Falls die externe Kraft fehlt ( $F_{ext} = 0$ ), so kann das homogene Problem (die freie Schwingung) relativ einfach mittels Transformation gelöst werden.

## 11. Mathematisches Pendel (47. KW, R. Mahnke)

Die nichtlineare Physik fängt beim mathematischen Pendel an. Da die rücktreibende Kraft nichtlinear ist, kann das Bewegungsproblem

$$ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha$$

nicht mehr analytisch gelöst werden. Näherungslösungen entstehen mittels Reihenentwicklungen. Wichtig ist die Zustandsraumdarstellung in Abhängigkeit von der Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2}l^2(\dot{\alpha})^2 + mgl(1 - \cos \alpha) .$$

*Übungsaufgaben Serie 3*

(Lösungsweg(e) in 3. Übung am 22.11.2013 schriftlich abgeben)

- (3a) Betrachten Sie nochmals den harmonischen Oszillator. Die Lösungen der Gleichung  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  kann man in (drei) verschiedenen Formen aufschreiben, und zwar

- i) komplexe Schreibweise, mathematisch vorteilhaft

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

- ii) reelle Schreibweise, physikalisch vorteilhaft mit trigonometrischen Funktionen

$$x(t) = a_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(\omega_0 t)$$

- iii) reelle Schreibweise, physikalisch vorteilhaft mit Amplitude und Phase

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ermitteln Sie die Integrationskonstanten  $C_1, C_2, a_1, a_2$  und  $A, \varphi$  jeweils aus den bekannten Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0, v(t=0) = v_0$ .

3 Punkte

- (3b) Diskutieren Sie den freien Fall mit Reibung  $\ddot{x} + (r/m)\dot{x} + g = 0$  (Was bedeuten die Terme?) und bestimmen die Lösungen  $x = x(t)$  und  $v = v(t)$  unter Beachtung der üblichen Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0, v(t=0) = v_0$ . Visualisieren Sie Lösungen grafisch im Zustandsraum.

3 Punkte

- (3c) Separieren Sie das Zwei-Körper-Problem in Schwerpunkts- (bzw. Massenmittelpunkts-) und Relativbewegung.

4 Punkte

## 12. Zentralkraftbewegung (48. KW, R. Mahnke)

Aus der Newton-Gleichung folgen drei Bilanzgleichungen, und zwar für den Impuls, die Energie und den Drehimpuls. Erhaltungssätze erfordern spezielle Bedingungen.

Bei der Zentralkraftbewegung (die bekannte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft) existieren Drehimpuls- und Energieerhaltung. Somit ist die Planetenbewegung exakt lösbar und führt auf die bekannten Kepler-Gesetze.

Die Diskussion der Bewegungstypen (offene und geschlossene Bahnkurven) erfolgt anhand des effektiven Potentials, das sich additiv aus dem Gravitationspotential (negativ, anziehend) und dem Drehimpulsanteil (positiv, anziehend) zusammensetzt.

### *Übungsaufgaben Serie 4*

(Lösungsweg(e) in 4. Übung am 06.12.2013 schriftlich abgeben)

Änderung: Univ. wurde am 6.12.13 wegen Unwetter geschlossen, deshalb Abgabe eine Woche später am 13.12.2013.

#### (4a) Aufgabe zum *Mathematisches Pendel*

Modell des mathematischen Pendels (nichtlineares Modell). Dynamik einer Masse an einem Faden unter Einfluss der Schwerkraft. Newton-Formalismus, Tangentialkraft, dynamisches System. Energieerhaltung. Diskussion des Zustandsraumporträts (Ruhelage, Schwingungsregime, Separatrix (Grenzkurve  $s_x$ ), Rotationsregime). Integration der Bewegungsgleichung unter Verwendung der Energieerhaltung zur Bestimmung von  $\alpha = \alpha(t)$ . Es gibt eine spezielle integrable Situation: die Bewegung auf der Separatrix  $\alpha_{sx}(t)$ .

Berechnen Sie das Winkel-Zeit-Gesetz  $\alpha_{sx}(t)$  aus der Bewegungsdynamik auf der Grenzkurve zwischen Schwingungs- und Rotationsregime.

5 Punkte

#### (4b) Aufgabe zum *Kettenkarussell*

Das Kettenkarussell: Untersuchen Sie die Dynamik einer Masse unter Einfluss von Schwerkraft und Rotation. Siehe Abb. 1.

Bestimmung der resultierenden Kraft aus Komponenten der Schwerkraft und Rotationskraft. Ermittlung der potentiellen Energie (Potential) aus der Gesamtkraft einschliesslich Normierung. Diskussion des Potentials (Doppelmulde, Einfachmulde, Gleichgewichtszustände, Stabilität), siehe Grafiken in Abb. 2.

5 Punkte

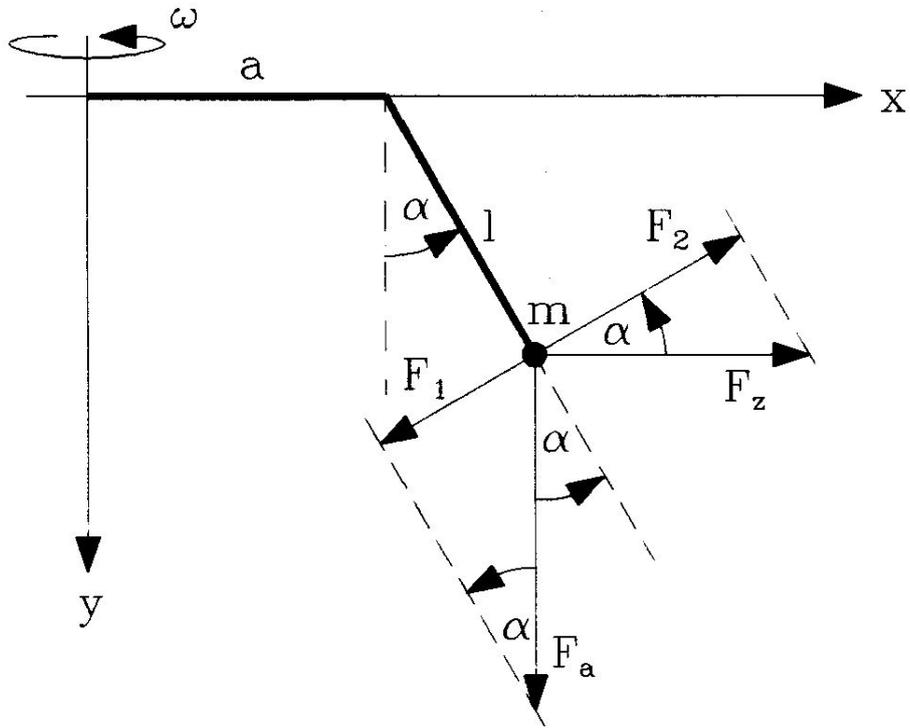


Abb. 1: Modell eines Kettenkarussells mit Schwerkraft und Rotationskraft.

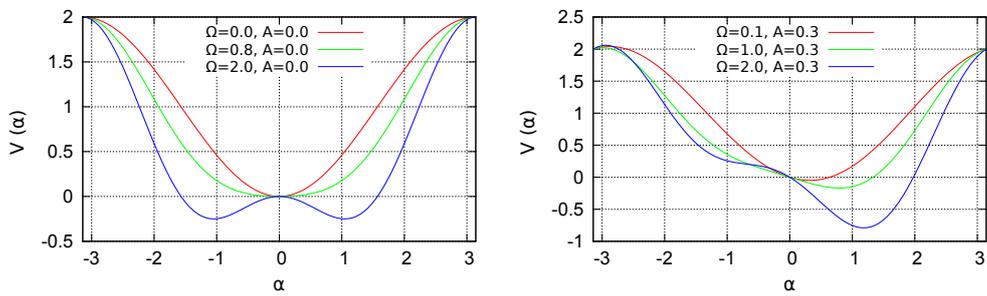


Abb. 2: Potential des Kettenkarussells ohne (links) und mit Ausleger.

## 4 Theoretische Mechanik: Lagrange'sche Formulierung

### 13. Lagrange-Formalismus (49. KW, R. Mahnke)

Massenpunkte mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit (wie beim mathematischen Pendel) können entweder durch Zwangskräfte (Lagrange I) oder durch generalisierte Koordinaten  $q_i$  und generalisierte Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  beschrieben werden. Dieser Lagrange-Formalismus verwendet eine Lagrange-Funktion  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  als Differenz aus kinetischer  $T$  und potentieller Energie  $V$ .

Die Bewegungsgleichung für die Lagrange-Funktion  $L = T - V$  folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip (Extremalprinzip für die Wirkung  $S = \int L dt$ ) und lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Der generalisierte Impuls  $p = \partial L / \partial \dot{q}_i$  ist eine Erhaltungsgröße, falls  $q_i$  eine zyklische Koordinate ist, d. h.  $L$  nicht von dieser Koordinate abhängt.

### 14. Kepler-Problem im Lagrange-Formalismus (50. KW, R. Mahnke)

Anwendung des Lagrange-Formalismus auf das (bekannte) Zentralkörperproblem; Beschreibung der Kepler-Bewegung in Kugelkoordinaten. Potentielle Energie (Gravitationspotential) ist radialsymmetrisch. Neben Erhaltung der Gesamtenergie gilt der Drehimpuserhaltungssatz  $p_\varphi(t) = L_z$ , da  $\partial L / \partial \varphi = 0$ , der auf eine ebene Bewegung führt. Somit Dynamik auf Ellipsenbahnen  $r = r(\varphi)$  in einer  $x - y$ -Ebene, die senkrecht zu  $L_z$  steht.

## 5 Theoretische Mechanik: Hamilton'sche Formulierung

### 15. Hamilton-Formalismus (51. KW, R. Mahnke)

Alternative zum Lagrange-Formalismus. Die Hamilton-Funktion  $H = H(q_i, p_i, t)$  'lebt' im Phasenraum, der durch generalisierte Koordinaten  $q$  und generalisierte Impulse  $p$  aufgespannt wird. Die Dynamik des Systems wird durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (kanonische Gleichungen) beschrieben, ergibt die Phasenraumdynamik mit dem Fluss im Phasenraum. Beispiel: Phasenraumportrait des harmonischen Oszillators. Diskussion der Liouville-Gleichung. Nach Einführung der Poisson-Klammern erhalten die Bewegungsgleichungen eine Form, die später in der Quantenphysik Verwendung finden.

### 16. Kettenkarussell II: Hausaufgabe (*Übungsaufgabe Serie 5*) zum 20.12.2013

Ermitteln Sie die Phasenraumporträts des konservativen Kettenkarussells ohne Ausleger ( $A = 0$ ) und mit einem Auslegerarm der Länge  $A = 0.3$ . Wählen Sie unterschiedliche Anfangsbedingungen. Führen Sie eigene Rechnungen durch vergleichen Sie Ihre numerischen Resultate mit den u. g. Grafiken.

10 Punkte

Die kinetische und potentielle Energien lauten (bekanntermaßen) beim Kettenkarussell

$$T = ml^2\omega_0^2 \frac{1}{2} \frac{p_\alpha^2}{m^2l^4\omega_0^2}, \quad (30)$$

$$V = ml^2\omega_0^2 \left[ (1 - \cos \alpha) - \Omega \left( A + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \sin \alpha \right]. \quad (31)$$

In dimensionsloser Schreibweise gilt analog

$$\frac{T}{ml^2\omega_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_\alpha}{ml^2\omega_0} \right)^2, \quad (32)$$

$$\frac{V}{ml^2\omega_0^2} = \left[ (1 - \cos \alpha) - \Omega \left( A + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \sin \alpha \right]. \quad (33)$$

Unter Verwendung des Energieerhaltungssatzes (konservatives System

$H = T + V = E$ ) folgt die Phasenraumtrajektorie  $p_\alpha = p_\alpha(\alpha; E)$  als

$$\frac{p_\alpha}{ml^2\omega_0} = \pm \sqrt{2 \left\{ \frac{E}{ml^2\omega_0^2} - \left[ (1 - \cos \alpha) - \Omega \left( A + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \sin \alpha \right] \right\}} \quad (34)$$

mit Gesamtenergie  $E$  aus den Anfangsbedingungen  $\alpha(t=0); p_\alpha(t=0)$  mittels

$$\frac{E}{ml^2\omega_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p_\alpha(0)}{ml^2\omega_0} \right)^2 + \left[ (1 - \cos \alpha(0)) - \Omega \left( A + \frac{1}{2} \sin \alpha(0) \right) \sin \alpha(0) \right]. \quad (35)$$

Die folgenden Abbildungen zeigen Phasenraumporträts des konservativen Kettenkarussells bei ausgewählten Kontrollparametern, siehe Abbildungen 3 und 4.

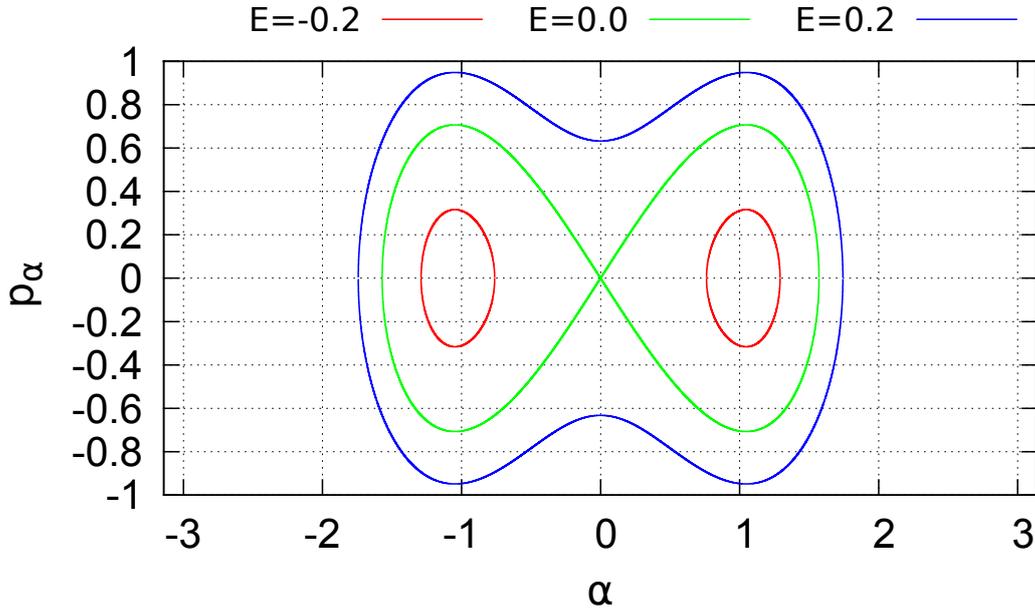


Abb. 3: Phasenraumporträt des Kettenkarussells ohne Ausleger ( $A = 0$ ) und  $\Omega = 2$ .

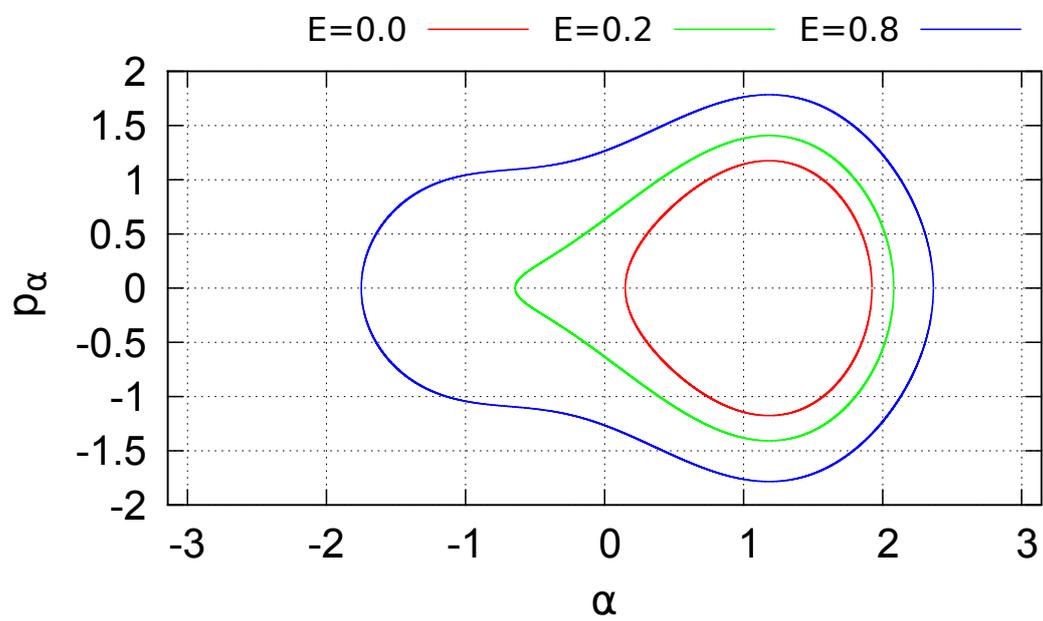


Abb. 4: Phasenraumporträt des Kettenkarussells mit Ausleger  $A = 0.3$  und  $\Omega = 2$ .

## 6 Theorie dynamisches Systeme

### 17. Nichtlineare dynamische Systeme in Physik und Nicht-Physik (2. KW, R. Mahnke)

Wiederholung klassischer Newtonscher Mechanik. Newtonsche Bewegungsgleichung als dynamisches System inklusive Anfangsbedingungen. Die symmetrische Wechselwirkung 'Actio = Reactio' gilt nur bei passiven Teilchen. Die Dynamik für aktive, motorisierte, gepumpte Teilchen beinhaltet asymmetrische Wechselwirkungen. Ein typischer Ansatz, Hinweis auf Automobildynamik, lautet

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(v_i) + \sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, v_i | x_j, v_j)$$

mit Relaxationskraft als Vergleich zwischen Soll (Wunsch, Optimum) und Ist (Realität, Tatsache)

$$f_i(v_i) = \frac{1}{\tau_i} (v_i^{opt} - v_i) .$$

### 18. Analyse dynamischer Systeme: Hausaufgabe zum 17.01.2014

#### Übungsaufgaben Serie 6

- (6a) Gegeben ist die Hamilton-Funktion  $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 q$ .  
Ermitteln Sie das dynamische System von Bewegungsgleichungen (kanonische Gleichungen), integrieren diese unter Benutzung der Anfangsbedingungen  $p(t=0) = p_0 > 0$ ,  $q(t=0) = q_0 \gtrless 0$  und analysieren Sie das Phasenraumportrait.

5 Punkte

- (6b) Das nichtlineare dynamische System, bestehend aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen, genannt der *van der Pol-Oszillator*,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y - x(x^2 + y^2) & ; & \quad x(t=0) = x_0 ; \\ \frac{dy}{dt} &= x + y - y(x^2 + y^2) & ; & \quad y(t=0) = y_0 . \end{aligned}$$

ist unter Verwendung der Transformationsmethode (Polarkoordinaten) zu lösen. Erläutern Sie das Zustandsraumportrait und geben den Fluss in der  $x - y$ -Ebene mittels einiger Trajektorien an. Existiert, analog zur Automobildynamik, ein Grenzzyklus?

5 Punkte

### 19. Straßenverkehrsphysik (3. KW, R. Mahnke)

Die  $N$ -dimensionale Automobildynamik sei modelliert durch ein System von  $N$  Auto-Teilchen auf einem Kreis der Länge  $L$ , d. h. es gelte  $x_i \in [0, L)$ ,  $i = 1, \dots, N$  für ihre Orte. Die Bewegungsgleichungen seien dann gegeben durch

$$\begin{aligned} m \frac{dv_i}{dt} &= F_{\text{kons}}(\Delta x_i) + F_{\text{diss}}(v_i), \\ \frac{dx_i}{dt} &= v_i, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{\text{kons}}(\Delta x_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{opt}}(\Delta x_i) - v_{\text{max}}) \leq 0 \\ &\text{mit } v_{\text{opt}}(\Delta x_i) = v_{\text{max}} \frac{(\Delta x_i)^2}{D^2 + (\Delta x_i)^2}, \\ F_{\text{diss}}(v_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{max}} - v_i) \geq 0 \end{aligned}$$

und die Abstände  $\Delta x_i$  zwischen den Autos zyklisch gegeben sind durch  $\forall i = 1, \dots, N-1 : \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$  und  $\Delta x_N = x_1 - x_N$ .

Die deterministische Bewegung wird durch Schwankungen (Fluktuationen) gestört. Überwiegen die zufälligen Ereignisse wird die Bewegung stochastisch (Physik stochastischer Prozesse).

### 20. Klassifikation dynamischer Systeme (3. KW, R. Mahnke)

Ein (physikalisches) System sei durch einen Satz von unabhängigen Variablen  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) bestimmt. Diese Größen  $x_i$  spannen einen Zustandsraum  $X$  auf. Der Zustand des Systems ist zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch die Angabe der Werte der Variablen  $x_i(t)$  eindeutig bestimmt und repräsentiert einen Punkt im Zustandsraum.

Die Bewegung des Zustandes wird mittels einer Evolutionsgleichung festgelegt, insbesondere gilt für ein dynamisches System, daß das Bewegungsgesetz durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung definiert ist.

Die Klassifikation dynamischer Systeme kann nach verschiedenen Kriterien erfolgen, z. B. konservative / dissipative dynamische Systeme.

## 21. Analyse dynamischer Systeme: Hausaufgabe zum 31.01.2014

### Übungsaufgaben Serie 7

- (7a) 1-dim Wachstumskinetik  $dP/dt = F(P)$ :  
Lösen Sie die Verhulst-Gleichung

$$\frac{dP}{dt} = F(P) \quad \text{mit} \quad F(P) = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad (36)$$

unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $P(t=0) = P_0$ .  
Hinweis: Verwenden Sie dimensionslose Größen  $x = P/K$  und  $\tau = r t$ .

Berechnen Sie zuerst die Lösung  $x = x(\tau)$  und machen danach die Rücktransformation.

Diskutieren Sie anschliessend die Bewegung im Potential-Gebirge  $V(P) = -\int F(P) dP$  bei Variation der Kontrollparameter.

5 Punkte

- (7b) Räuber-Beute-System (2dim)

$$\frac{dx}{dt} = k_1 Ax - k_{12} xy \quad (37)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_{21} xy - k_2 y \quad (38)$$

Analyse der Dynamik mittels Zustandsraumtopologie.

5 Punkte

## 22. Stationarität und Stabilität in dynamischen Systemen (4. KW, R. Mahnke)

Gibt es im Zustandsraum einen kontrahierenden oder expandierenden Fluss, dann handelt es sich um ein dissipatives dynamisches System. In solchen Systemen existieren Attraktoren (anziehende stationäre Zustände) bzw. Repeller (abstoßende stationäre Zustände). Herrscht dagegen im Zustandsraum eine konstante Zustandsraumdichte, dann handelt es sich um ein konservatives System. Damit ist das Auftreten von Quellen (Repellern) und Senken (Attraktoren) unmöglich, es gibt höchstens elliptische und hyperbolische Fixpunkte (Wirbel, Sattel, siehe mathematisches Pendel als Beispiel).

Die wichtigste Klasse der konservativen dynamischen Systeme sind

die Hamiltonschen Systeme. Die Analyse erfolgt im aus generalisierten Orten  $q$  und generalisierten Impulsen  $p$  gebildeten Phasenraum. Das Liouville-Theorem über den inkompressiblen Fluss  $v = (\dot{q}, \dot{p})$  im Phasenraum lautet  $\operatorname{div} v = 0$ .

**23. Logistische Abbildung als Beispiel für eine diskrete nichtlineare Dynamik** (5. KW, Ch. Bräuning)

Die logistische Gleichung als ein Modell zur Beschreibung von Wachstumsphänomenen führt unter Berücksichtigung von gedämpftem Zuwachs (mit Kapazitätsgrenze) auf die bekannte nichtlineare Iteration

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) .$$

Eine typische Aufgabenstellung zur Analyse dieser Gleichung lautet: Der Startwert heißt  $x_0$  mit  $0 < x_0 < 1$ . Wählen Sie  $x_0 = 0.1$ . Berechnen und diskutieren Sie die Iterationsergebnisse  $x_n$  über  $n$  in Abhängigkeit vom Kontrollparameter  $0 < r \leq 4$ . Betrachten Sie dazu die folgenden Werte von  $r$ , und zwar  $r_1 = 1.2$ ,  $r_2 = 3.2$  und  $r_3 = 4.0$ . Nun erstellen Sie drei Tabellen oder Grafiken  $x_n$  über  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 14, 15$ ) und kommentieren die Ergebnisse.

Die Zusammenfassung der Resultate erfolgt im Feigenbaum-Diagramm  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  über  $r$ , welches die Heugabel-Bifurkationen und den Übergang ins deterministische Chaos deutlich zeigt.

Die Fixpunkte  $x_{st}$  folgen aus  $x = rx(1 - x)$  und sind die stationären Lösungen der logistischen Gleichung. Die Stabilität der Fixpunkte hängt vom Kontrollparameter  $r$  ab.