Mathematische Methoden für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12557
(Wintersemester 2015/16: 1 SWS V + 2 SWS Ü)

V: Montag 8.00 bis 8.45 Uhr, HS I Physik, A.-Einstein-Str. 24
Ü-Ch: Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, HS III Physik, A.-Einstein-Str. 24
Übungsleiterin: Dr. Christine Bräuning
Ü-Ph: Mittwoch 7.15 bis 8.45 Uhr, SR 1, A.-Einstein-Str. 24
Übungsleiter: MSc. Sebastian Rosmej
Tutorium (Nachhilfe) durch Christian Ewert(2): Do, 17.15 Uhr, SR 2

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung für alle am Montag, d. 12.10.2015, 8.00 bis 8.45 Uhr im Hörsaal II des Instituts für Physik in der Albert-Einstein-Str. 24.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Mathematische Grundlagen für LA-Studium Physik
2. Ch. B. Lang & N. Pucker: Mathematische Methoden in der Physik (Heidelberg, 1998, 2. Aufl. 2005)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 1: Mathematische Hilfsmittel (Berlin, 1974)

Lehramt an Gymnasien - Chemie
Lehramt an Regionalen Schulen - Chemie

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Gymnasien (RPO-LA)

Mathematische Methoden für das Lehramt
Pflichtmodul
3 Leistungspunkte (LP)
unbenotet
1. Semester

Wurde als 2. Studienfach Mathematik bzw. Physik gewählt, ist ein Alternativmodul im Umfang von 3 LP zu wählen.

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Regionalen Schulen

Mathematische Methoden für Lehramt
Pflichtmodul
3 Leistungspunkte (LP)
unbenotet
1. Semester

Wurde als 2. Studienfach Mathematik bzw. Physik gewählt, ist ein Alternativmodul im Umfang von 3 LP zu wählen.

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **4**

1.1 Schul-Mathematik an der Universität 4

2 Komplexe Zahlen **6**

2.1 Einführung in die komplexen Zahlen 6

2.2 Darstellungen der komplexen Zahlen 7

2.3 Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene 9

2.4 Zusammenfassung: Komplexe Zahlen 10

3 Differenzen- und Differentialrechnung **11**

3.1 Differenzenverfahren 11

3.2 Differentialquotient und Taylor-Entwicklung 12

3.3 Differentialrechnung und Integration 13

4 Integralrechnung **13**

4.1 Integration 13

4.2 Mehrfachintegration 14

5 Vektoralgebra und Vektoranalysis **15**

5.1 Vektoren und ihre Verknüpfungen 15

5.2 Skalar– und Vektorfelder:
Gradient, Divergenz, Rotation 15

6 Matrizen und lineare Gleichungssysteme **16**

6.1 Matrixschreibweise und Lösung von linearen Gleichungssyste-
men 16

1 Einführung

1.1 Schul-Mathematik an der Universität

1. *Vorlesung am 12.10.2015* (R. Mahnke)

- Kurvendiskussion $y = f(x)$: Funktionen qualitativ diskutieren

Ein Beispiel aus der Wachstumskinetik (Fressrate) oder Verkehrsdynamik

$$v(\Delta x) = v_{max} \frac{(\Delta x)^2}{D^2 + (\Delta x)^2}$$

Unabhängige Variable $\Delta x \geq 0$ mit Bedeutung: Abstand zum Vordermann;
Funktion $v = v(\Delta x)$: Autogeschwindigkeit in Anhängigkeit vom Abstand zum vorausfahrenden Auto;
Zwei Kontrollparameter (Koeffizient, Parameter, Konstante):
z. B. $D > 0$ mit Maßeinheit Meter (m);
in der Schule steht hier eine Zahl (i. d. R.) ohne Maßeinheit, z. B. $D = 10$, jetzt bei der qualitativen Kurvendiskussion eine beliebige positive Zahl;

Hinweis: dimensionslose Größen mittels Transformationen einführen

Mit $u = v/v_{max}$ und $\Delta y = \Delta x/D$ folgt

$$u(\Delta y) = \frac{(\Delta y)^2}{1 + (\Delta y)^2}$$

Wichtig: Unterschied zwischen Variablen und Kontrollparametern

Typische Aufgabenstellung (aus alter Klausur):
Die relle Funktion (b und c sind positive Konstanten)

$$f(x) = \frac{b}{\sqrt{1 - x^2/c^2}}$$

ist für alle $|x| \leq c$ zu skizzieren. Danach ist die erste Ableitung $f'(x)$ zu berechnen und ebenfalls im gleichen Definitionsbereich zu zeichnen.

- <u>Differenzieren</u> = erste Ableitung $f'(x)$ bilden

Was bedeutet die in der Schule verwendete Abkürzung $f'(x)$?

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Differentialquotient:

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

- Einsatz des Rechners (Computer ist nicht nur zum Spielen da)

Neben der (reinen, analytischen) Mathematik existieren elektronische Werkzeuge.

Beachte: Computeralgebra-Systeme (CAS) sind nicht unfehlbar, können aber hilfreich sein.

Programmpakete: Mathematika, Maple, Maxima, ...

Ein gratis erhältliches Open-Source-CAS: Maxima

Hinweis:

Um ein mögliches Missverständnis auszuräumen, sei zu Beginn betont, dass die im folgenden behandelte Mathematik – sowohl in ihrer Breite als auch in ihrer Tiefe – weit über das hinausgeht, was Sie in Ihrer künftigen Berufspraxis an Ihre Schülerinnen weitergeben können. Es geht darum, die Naturwissenschaften mit ihrer Mathematik so gut zu kennen, dass Sie Ihren Unterricht souverän und mit Verständnis planen und durchführen können.

<u>Prüfungsterminplanung:</u> Abschlussklausur am 18. Februar 2016 (Do), 9.30 – 11.00 Uhr, Großer Hörsaal Physik (HS I), A.-Einstein-Str. 24

2 Komplexe Zahlen

2.1 Einführung in die komplexen Zahlen

2. *Vorlesung am 19.10.2015* (R. Mahnke)

   Quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (Variable x, Parameter p, q) zur Nullstellenberechnung, Schulformel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

   Nutze wegen $0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\, x_2$
   Satz von Vieta: $x_1 + x_2 = -p$; $x_1\, x_2 = q \quad ,$

   Einschränkung im Raum der rellen Zahlen,

   Einführung und Definition der komplexen Zahlen $z = x + iy$ und ihre Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene,

   Imaginäre Einheit i mit $i^2 = -1$,

   Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation) wie üblich,

   bei Division Erweiterung mit der zu z konjugiert komplexen Zahl
   $z^* \equiv \overline{z} = x - iy$.

   Im Bereich der komplexen Zahlen ist jede quadratische Gleichung lösbar.
   Beispiel: $z^2 - 2i = 0$ mit Lösung $z_1 = -z_2 = 1 + i$.

   Ein Beispiel, berechnet mit Maxima:

$$solve(z^2 - 2 * z + 4 = 0, z); \quad \rightarrow \quad z = 1 - sqrt(3) * i, z = 1 + sqrt(3) * i$$

   wobei

$$z = x + i\, y \quad \text{mit der imaginären Einheit} \quad i^2 = -1 \; .$$

2.2 Darstellungen der komplexen Zahlen

3. *Vorlesung am 26.10.2015* (ERASMUS-Dozent Dr. Jevgenijs Kaupužs, Liepaja & Riga/Lettland, auf Einladung von R. Mahnke)

   Polardarstellung einer komplexen Zahl z mit Hilfe trigonometrischer Funktionen $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

   Hin– und Rücktransformation zwischen kartesischen (x, y) und polaren Koordinaten (r, α)

   $$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \qquad &;\quad r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ y &= r\sin\alpha \qquad &;\quad \alpha &= \arctan(y/x) \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

   Die komplexe Zahl z hat verschiedene Darstellungsarten. Wir zeigen mittels Potenz–Reihendarstellung, dass folgendes, genannt Euler–Formel, gilt:

   $$\exp(i\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \; .$$

   Neue (dritte) Darstellung einer komplexen Zahl z mittels Euler–Formel, z. B. $z = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$,
   einfache Berechnung von Multiplikation und Division

   $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)) = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)} \end{aligned}$$

   sowie von Potenzen z^n durch Euler–Darstellung:

   $$z^n = r^n e^{in\alpha}$$

   2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion (analog zu den trigonometrischen Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$).

4. *Vorlesung am 02.11.2015* (R. Mahnke)

Zusammenfassung der drei Darstellungsarten einer komplexen Zahl z:

$$z = x + iy \text{ — kartesische Koordinaten ,}$$
$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ — Polarkoordinaten ,}$$
$$z = r\exp{(i\alpha)} \text{ — komplexe Exponentialfunktion .}$$

Beweis der Euler–Formel mittels Reihendarstellung

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ .$$

Aus

$$(\exp(i\alpha))^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$$

und

$$\exp(in\alpha) = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

folgt Satz von Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \ .$$

Periodizität der komplexen e-Funktion $e^{\pm i2\pi k} = 1$ beachten.
2π–Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$e^{i\alpha} = e^{i(\alpha \pm 2\pi k)} \text{ mit } k = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Als Beispiel aus der Physik:
Komplexe Exponentialfunktion $F(z(t)) = A\exp{(i\alpha)}$ mit $\alpha = \omega t$.

Wichtig ist die Nullstellenberechnung $F(z) = 0$.
Ausblick auf die Gleichung $F(z) = z^n - 1 = 0$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$.

2.3 Nullstellenberechnung in der komplexen Ebene

5. *Vorlesung am 09.11.2015* (R. Mahnke)

   Merke: Für jedes $z \neq 0$ gibt es genau n komplexe Zahlen, deren n-te Potenz z ist.

$$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \; .$$

   Nullstellen der Funktion $F(z) = z^n - 1$ liegen auf dem Einheitskreis $(r = 1)$ und lauten

$$z_k = e^{i2\pi k/n} \qquad \text{mit} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \; .$$

   • Nullstellenberechnung analytisch oder mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen (z. B. mit WxMaxima)

```
solve(z^3-1=0,z);
polarform(%);
rectform(%);
```

   • Nullstellenberechnung numerisch mit Newton–Iterationsverfahren
   Die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung komplexer Funktionen $F(z) = 0$ (bekannt als Newton–Verfahren) lautet analog zur Differenzengleichung im Reellen

$$z_{m+1} = N(z_m) \quad \text{mit} \quad N(z) = z - \frac{F(z)}{F'(z)} \; .$$

   Ein Beispiel: Für $F(z) = z^3 - 1$ sind die Nullstellen bekannt.
   Welcher Startwert $z_{start} \equiv z_0$ führt auf welche Nullstelle z_k^{null}? Wie sieht das Einzugsgebiet der Nullstellen aus? Es hat fraktale Ränder. Warum? Der Koordinatenursprung ist ein divergenter Punkt; er gehört zur Julia-Menge.

2.4 Zusammenfassung: Komplexe Zahlen

Bitte selbst ergänzen:

- Imaginäre Einheit, komplexe Ebene
- Kartesische Darstellung (algebraische Form)
- Polardarstellung (trigonometrische Form)
- Exponentialdarstellung (komplexe Exp-Funktion)
- Eulerformel
- Satz von Moivre
- Grundrechenarten, Potenzieren und Wurzelziehen
- Nullstellenberechnung
- Merke: Für jedes $z \neq 0$ gibt es genau n komplexe Zahlen, deren $n-$te Potenz z ist.

  $$z = re^{i\alpha} = re^{i(\alpha+2\pi k)} = \left(\sqrt[n]{r}\, e^{i(\alpha+2\pi k)/n}\right)^n \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$

- Der *schönste mathematische Ausdruck der Welt*

  $$e^{i\pi} + 1 = 0$$

  folgt aus der Eulerformel. Warum?

3 Differenzen- und Differentialrechnung

3.1 Differenzenverfahren

6. *Vorlesung am 16.11.2015* (R. Mahnke)

   Schrittweise Berechnung von x_{m+1} aus x_m mittels einer Iterations- bzw. Differenzengleichung

   $$x_{m+1} = f(x_m) \quad \text{mit} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

   Aus dem gegebenen Startwert x_0 folgt der erste Folgewert x_1, daraus x_2 usw.

   Beispiel: Lineare Funktion $f(x) = R\,x$ (unbegrenztes Wachstum).
   Aus $x_0 = 1$ folgt $x_1 = f(x_0) = R\,x_0 = R$. Danach gilt $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = R^2$. Für die $m-$Iteration gilt $x_m = R^m$ (Potenzfunktion). Falls die Wachstumsrate R größer Eins, dann wächst die Population über alle Grenzen (divergiert gegen unendlich).

   Wachstumsmodelle von Populationen mit Dämpfung. Berücksichtigung einer Kapazitätsgrenze führt auf eine nichtlineare Iteration, genannt logistische Gleichung

   $$x_{m+1} = r x_m (1 - x_m) \ .$$

   Startwert aus $0 < x_0 < 1$. Parameter aus $0 < r \leq 4$. Viele interessante Resultate: Fixpunkte, periodische Lösungen, deterministisches Chaos, Feigenbaum–Diagramm, Ljapunov–Exponenten, ...

   Wir erinnern uns an die Newton–Iteration zur Nullstellenberechnung reeller Funktionen

   $$x_{m+1} = N(x_m) = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} \ .$$

   Sie folgt aus

   $$f'(x_m) \equiv \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_m} \approx \frac{f(x_{m+1}) - f(x_m)}{x_{m+1} - x_m} = \frac{0 - f(x_m)}{x_{m+1} - x_m} \ .$$

   Die Nullstellen x_{null} (aus $f(x_{null}) = 0$) sind die Fixpunkte $N(x_{null}) = x_{null}$ der Newton-Iteration.

3.2 Differentialquotient und Taylor-Entwicklung

6. *Vorlesung am 23.11.2015* (R. Mahnke)

   Definition der ersten Ableitung $f'(x)$ als Differentialquotienten $df(x)/dx$ und Vergleich mit dem Differenzenquotienten $\Delta f(x)/\Delta x$. Berechnung der ersten Ableitung am Beispiel $f(x) = x^2$. Zweite und höhere Ableitungen $f^{(n)}(x)$.

   Beispiele aus den Naturwissenschaften (Momentangeschwindigkeit und –beschleunigung):

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad ; \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

   Gewöhnliche Ableitungen werden zu partiellen (∂) Ableitungen bei Funktionen mehrerer Variablen, z. B. $f(x_1, x_2, x_3)$. Partielle Ableitungen (z. B. $\partial f(x_1, x_2, x_3)/\partial x_1$) und Ableitungen höherer Ordnung; Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen prüfen (Satz von Schwarz) Beispiel: $f(x_1, x_2) = x_1^3 \, x_2 - e^{x_1 x_2}$.

   Aus der Taylor-Entwicklung

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)$$

   folgt als Näherung in 1. Ordnung

$$f'(x)\Delta x \approx \Delta f(x)$$

   ein Zusammenhang zwischen dem Differential– und dem Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \ .$$

   Die Taylor-Formel lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \ .$$

   Eine äquivalente Formulierung lautet

$$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n \ .$$

3.3 Differentialrechnung und Integration

6. *Vorlesung am 30.11.2015* (R. Mahnke)

   Vergleich zwischen Differenz und Differential am Beispiel des Kugelvolumens $V(r) = (4\pi/3)r^3$, Differenz $\Delta V(r) = V(r + \Delta r) - V(r)$, Differential $dV(r) = (dV(r)/dr)dr$.
   Totales Differential einführen

   $$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \; .$$

   Lösung einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung durch Integration.
   Beispiel: Lineare Differentialgleichung

   $$\frac{dx}{dt} = \lambda\, x$$

   wird mittels Trennung der Variablen integriert. Lösung lautet

   $$x(t) = Ce^{\lambda t} \; .$$

   Richtigkeit durch Probe (Einsetzen der Lösung in geg. Gleichung) überprüfen.

   Definition des Integrals im Riemannschen Sinne als Grenzwert; Eigenschaften des bestimmten Integrals; geometrische (als Fläche stets positiv, somit Betrag des Integrals) und physikalische Bedeutung (mit Vorzeichen) des Integrals; Mittelwertsatz der Integralrechnung; unbestimmte Integration mit additiver Integrationskonstante; Integrationsregeln (Summe, Differenz) und partielle Integration, Substitutionsmethode; Verweis auf Integrationstabellen und numerischer Integration.

4 Integralrechnung

4.1 Integration

7. Vorlesung am 07.12.2015 (R. Mahnke)

   Zur Berechnung von unbestimmten und bestimmten Integralen; Lösung mittels Substitution und/oder partieller Integration; Beispiele sind

   $$\int xe^x \, dx \; , \; \int \cos^2 x \, dx \; , \; \int \ln x \, dx \; .$$

Einführung des Begriffs des Kurvenintegrals und Vorbereitungen zur Berechnung von Kurvenintegralen an Beispielen, z. B. Bogenlänge. Berechnung der Bogenlänge eines Viertelkreises ist in kartesischen Koordinaten schwierig; Berechnung nach Transformation in Polarkoordinaten

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_0^{\pi/2} R\, d\alpha = R\frac{\pi}{2}$$

einfach. Verwendete Transformation: $x = R\cos\alpha$; $y = R\sin\alpha$.

4.2 Mehrfachintegration

9. Vorlesung am 14.12.2015 (R. Mahnke)

Erweiterung des Integralbegriffs auf mehrdimensionale Integrale. Verwendung von zweidimensionalen Integralen zur Massenberechnung bei inhomogener Dichteverteilung $\rho(x, y)$

$$M = \int_{\text{Fläche}} \rho(x, y)\, dx\, dy \ .$$

Berechnung von Volumen mittels dreidimensionaler Integration; Beispiel: Volumen einer Kugel (Radius R) mittels dreidimensionaler Integration

$$V = \int_{\text{Kugel}} dx\, dy\, dz \ .$$

Rechnung in kartesischen Koordinaten sehr kompliziert; nach Transformation in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung der Jakobi-Determinante wird Rechnung viel einfacher; sinnvoll bei radialsymmetrischen Körpern.

Was ist eine Jacobi-Determinante?

Differentialformen in mehreren Dimensionen werden mit Hilfe der Jacobi-Determinate J transformiert. In der Ebene (zwei Dimensionen) gilt unter Verwendung der Polarkoordinaten

$$x = r\cos\alpha \qquad\qquad y = r\sin\alpha$$

die Transformation

$$A = \int_F dA = \int_{(x,y)\in F} dx\, dy = \int_{(r,\alpha)\in F} r\, dr\, d\alpha \ .$$

Somit gilt für die Jacobi-Determinante $J = r$.
Im dreidimensionalen Fall (Kugelkoordinaten) gilt $J = r^2 \sin\vartheta$, somit $dV = dx\, dy\, dz = J\, dr\, d\vartheta\, d\alpha$.

5 Vektoralgebra und Vektoranalysis

5.1 Vektoren und ihre Verknüpfungen

10. Vorlesung am 04.01.2016 (R. Mahnke)

    Naturwissenschaftliche Größen sind entweder Skalare oder Vektoren, z. B. Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ in Komponentendarstellung. Elementare Rechenregeln der Addition und Subtraktion von Vektoren. Speziell: Einheitsvektor und Nullvektor.

    Verknüpfung von Vektoren:
    (a) Skalarprodukt (inneres Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = s$) und
    (b) Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$).

    Basisvektoren sind linear unabhängig. Verweis auf vektorwertige Funktionen, z. B. zeitlich veränderlicher Ortsvektor als Raumkurve $\vec{r}(t)$.

5.2 Skalar– und Vektorfelder: Gradient, Divergenz, Rotation

11. Vorlesung am 04. und 11.01.2016 (R. Mahnke)

    Begriff des Gradienten $\operatorname{grad} \varphi$: Man ordnet einer vorgegeben Skalarfunktion (Skalarfeld) eine Vektorfunktion (Vektorfeld) zu, genannt Richtungsableitung. Der Gradientenvektor steht senkrecht auf der Tangentialebene $\varphi(x, y, z) = \text{const}$. Beispiele sind Potential (potentielle Energie $V(\vec{r})$ und Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} V$.
    Begriff der Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine skalare Funktion zu, genannt Quellstärke oder Quelldichte. Einfaches Beispiel: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$.
    Verweis auf den Vektoroperator Nabla $\vec{\nabla}$ (in kartesischen Koordinaten).
    Begriff der Rotation $\operatorname{rot} \vec{F}$: Man ordnet einem Vektorfeld eine neue Vektorfunktion zu, genannt Rotation, Wirbelstärke oder Wirbeldichte.
    Zwei wichtige Formeln:
    $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi \equiv \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

    Weitere wichtige Integralformeln: Stoke'scher Satz und Gauß'scher Satz (siehe F. Embacher, Lehrbuch Kap. 14, S. 219/220).

6 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

6.1 Matrixschreibweise und Lösung von linearen Gleichungssystemen

12. Vorlesung am 18.01.2016 (R. Mahnke)

    Eine Matrix A ist beispielsweise die folgende 2 x 2 Anordnung in Zeilen und Spalten
    $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$
    Addition und Multiplikation von Matrizen. Was ist ein Kommutator? Die Inverse A^{-1} (inverse Matrix) folgt aus $A^{-1}A = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

    Algebraische lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise $Y = AX$ mittels Invertierung $X = A^{-1}Y$ lösen.

    Eindimensionale lineare Differentialgleichung $dx/dt = \lambda\, x$ mit Anfangsbedingung $x(t = 0) = x_0$ besitzt die Lösung $x(t) = x_0 \exp{(\lambda t)}$. Erweiterung auf mehrdimensionale lineare Gleichungssysteme $dX/dt = M\, X$. Superpositionslösung (unter Verwendung von Eigenwerten λ aus $\det(M - \lambda E) = 0$ und Eigenvektoren U aus $(M\, U = \lambda E\, U)$ lautet
    $$X(t) = \sum_i c_i\, U_i\, e^{\lambda_i t} .$$
    Die Koeffizienten c_i sind aus den Anfangsbedingungen $X(t = 0) = X_0$ zu ermitteln.

    Eine typische Aufgabe lautet beispielsweise:
    Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem
    $$\frac{dx}{dt} = -y\,, \qquad x(t=0) = x_0\,,$$
    $$\frac{dy}{dt} = x\,, \qquad y(t=0) = y_0$$
    unter Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangswerte.

13. Vorlesung am 25.01.2016 (R. Mahnke)

Qualitative Theorie von Differentialgleichungssystemen und Diskussion der Lösung als Bahnkurve im Zustandsraumdiagramm. Dynamisches System, Fixpunkte und ihre Stabilität.

Ein Beipiel: Diskussion eines Systems von zwei gekoppelten Differentialgleichungen (in Matrixschreibweise) am Beispiel

$$\frac{dx}{dt} = -x + y \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \; ;$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - y \quad ; \quad y(t=0) = y_0 \; .$$

Die algebraische Lösungsmethode erfordert die Kenntnis der Begriffe Matrix, Determinante, Eigenwert, Eigenvektor.

Die Lösung der Eigenwertgleichungen und die Anwendung der Superpositionsmethode liefern als Resultat der o. g. linearen Differentialgleichungen die Funktionen

$$x(t) = e^{-t} \left(x_0 \cos t + y_0 \sin t \right) \; ;$$
$$y(t) = e^{-t} \left(y_0 \cos t - x_0 \sin t \right) \; .$$

Wiederholung zur Transformation zwischen kartesischen und Polarkoordinaten; Berechnung der Transformation der Geschwindigkeiten; Lösung des o. g. dynamischen Systems in Polardarstellung; die resultierende Bahnkurve ist eine logarithmische Spirale; grafische Darstellung in der $x - y$–Zustandsebene.

Das transformierte Gleichungsystem ist entkoppelt

$$\frac{dr}{dt} = -r \quad ; \quad r(t=0) = r_0 \; ;$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = -1 \quad ; \quad \alpha(t=0) = \alpha_0 \; .$$

und die Lösung ist mittels elementarer Integration möglich

$$r(t) = r_0 \exp\left(-t\right) \; ;$$
$$\alpha(t) = -\, t + \alpha_0$$

und lautet als Bahnkurve

$$r(\alpha) = r_0 \exp\left(\alpha - \alpha_0\right) \; .$$

Die Rücktransformation liefert die bekannten Resultate $x = x(t)$ und $y = y(t)$.