
Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

(Lehramt an Gymnasien &
Lehramt an Regionalen Schulen)

Priv.-Doz. Dr. Reinhard Mahnke
Institut für Physik

Lehrveranstaltung Nr. 12558
(Wintersemester 2015/16: 2 SWS V + 1 SWS Ü)

V: Dienstag 9.15 bis 10.45 Uhr, SR 1, Einstein-Str. 24

Ü: Freitag 11.15 bis 12.45 Uhr, SR 1, Einstein-Str. 24
gerade Woche, erstmalig am 16.10.2015

Die Lehrveranstaltung begann als Einführungsvorlesung für alle am Dienstag, d. 13.10.2015, 9.15 bis 10.45 Uhr im Seminarraum 1 des Instituts für Physik in der Albert-Einstein-Str. 24.

Literaturhinweise:

1. Franz Embacher: Elemente der theoretischen Physik, Band 1: Klassische Mechanik, LA-Studium Physik
2. Achim Feldmeier: Theoretische Mechanik (Springer, 2013)
3. Studienbücherei Physik für Lehrer, Bd. 2: Einführung in die Physik. Mechanik (Berlin, 1980)

Studiengangsspezifischen Prüfungs- und Studienordnung für den Studiengang Lehramt an Gymnasien bzw. an Regionalen Schulen (RPO-LA)

Aus der Anlage 4.14: Fachanhang Physik einschließlich Atronomie

Grundlagen der Theoretischen Mechanik für das Lehramt

Pflichtmodul

3 Leistungspunkte (LP)

jedes Wintersemester

3. Semester

Teilnahmevoraussetzung: Modul Mathematische Methoden für das Lehramt

Als zusätzliche Prüfungsvorleistung kann außer den in der RPO-LA genannten das erfolgreiche Lösen von Übungsaufgaben verlangt werden. Das Lösen von Übungsaufgaben dient der Überprüfung des Leistungsstandes der/des Studierenden auch während der Vorlesungszeit und erfolgt in der Regel ohne Aufsicht.

Prüfungsterminplanung:

Abschlussklausur am 18. Februar 2016 (Do), 13.30 – 15.00 Uhr, Großer Hörsaal Physik (HS I), Albert-Einstein-Str. 24

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung	5
3	Klassifikation dynamischer Systeme	9
4	Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme	17
5	Zwei Beispiele für oszillatorische dynamische Systeme	19
6	Theoretische Mechanik: Newton'sche Formulierung	22
7	Theoretische Mechanik: Lagrange'sche Formulierung	42
8	Theoretische Mechanik: Hamilton'sche Formulierung	43
9	Einführung in die Straßenverkehrsphysik	43
10	Hinweis auf stochastische Dynamik	44

1 Einleitung

1. Überblick (13.10.2015, R. Mahnke)

Klassische Mechanik beschreibt deterministische Bewegungen mittels

- Newtonscher Bewegungsgleichung: Kraft gegeben, Bahnkurve gesucht
- Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange II): Lagrange-Funktion geg.
- Hamiltonsche Gleichungen: Hamilton-Funktion geg.
- Liouville-Gleichung im Phasenraum: Phasenraumdynamik, z. B. des mathematischen Pendels

Zwei klassische lösbare Probleme der Mechanik sind

- harmonischer Oszillator (lineare rücktreibende Kraft)
- Kepler-Problem (Zentralkraftbewegung)

2. Deterministisches Chaos (13.10.2015, R. Mahnke)

Aber es gibt mehr: die *Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme*, beinhaltet die klassische Mechanik. Neben den regulären Bahnkurven existieren auch irreguläre deterministische Bewegungen, genannt deterministisches Chaos mit seiner sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

Beispiel: Logistische Abbildung

$$x(n+1) = rx(n)(1-x(n))$$

3. Der Zufall: Stochastische Prozesse (16.10.2015, R. Mahnke)

Physik stochastischer Prozesse (gehört im engeren Sinne nicht zur klassischen Mechanik) liefert Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Beispiel D: Diskreter Zufallswanderer (Galton-Brett)

$$P(m, n+1) = pP(m-1, n) + qP(m+1, n) ; P(m, n=0) = \delta_{m, m_0=0}$$

Das Ergebnis (die Lösung) ist eine Wahrscheinlichkeit $P(m, n) = \dots$, die eine Binominalverteilung ist.

Beispiel K: Kontinuierlicher Zufallswanderer (Diffusion)

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} ; p(x, t=0) = \delta(x-x_0)$$

Das Ergebnis (die Lösung) ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x, t) = \dots$, die eine Gaußsche Normalverteilung ist.

2. Nichtlineare dynamische Systeme und Chaos (20.10.2015, R. Mahnke)

Folgendes aus:

R. Mahnke, J. Schmelzer, G. Röpke: *Nichtlineare Phänomene und Selbstorganisation*, Teubner Studienbücher Physik, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1992 und

R. Mahnke: *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner Studienbücher Physik, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1994.

Die Abbildungen wurden bewusst weggelassen.

2 Nichtlineare Dynamik und Chaosforschung

Nichtlineare Phänomene und die aus Nichtlinearitäten resultierenden Möglichkeiten und Formen der Strukturbildung, der Selbstorganisation und der kooperativen Effekte sind in den letzten 20 – 30 Jahren verstärkt in den Blickpunkt der wissenschaftlichen Analyse gerückt. Die Resultate dieser Analyse sind vielfältig, zum Teil ungewohnt und beeinflussen praktisch alle Wissensbereiche in einem Maße, dass sie darüber hinaus in der breiten Öffentlichkeit auf zunehmendes Interesse stossen. Als einige Stichwörter in diesem Zusammenhang seien solche Begriffe wie *dissipative Strukturen*, *Synergetik*, *Bifurkationstheorie*, *Chaos in deterministischen Systemen*, *Fraktale*, *Spingläser* und *Mustererkennung* genannt.

Bei der Analyse hat sich herausgestellt, dass zum Teil unabhängig von den Spezifika der untersuchten Systeme – ob in der Physik, Chemie, Biologie oder auch im Bereich der Soziologie – bei Existenz bestimmter Bedingungen qualitativ gleichartige Phänomene zu beobachten sind. Dies gibt die Möglichkeit, ausgehend von relativ einfachen Modellsystemen allgemeine Verhaltensweisen nichtlinearer Systeme zu studieren. Die Resultate können dann zumindest als Denkmöglichkeiten zur Untersuchung komplexer Systeme herangezogen werden und die bisher weitgehend an Verhaltensweisen linearer Systeme geschulte Intuition erweitern.

Die faszinierenden Effekte und Eigenschaften nichtlinearer dynamischer Systeme werden zumeist an einfachen Modellbeispielen studiert und sich darauf aufbauend den realen Systemen in der Natur und Technik genähert.

Das bekannteste Modellbeispiel der nichtlinearen Dynamik ist ein diskreter

Rückkopplungsmechanismus vom Typ $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Diese sogenannte logistische Gleichung (eine Iteration mit einem Kontrollparameter r) wurde erstmalig 1845 vom belgischen Biomathematiker P. F. Verhulst in einer Arbeit zur Populationsdynamik eingeführt. Die Resultate der Analyse dieses einfachen Systems wurde 1978 durch M. Feigenbaum veröffentlicht und zeigen den Übergang von der geordneten Bewegung in das Chaos.

Weitere Beispiele für den Übergang von stabilen zu instabilen Situationen bei Variation eines oder mehrerer Kontrollparameter sowohl in konservativen als auch dissipativen Systemen sind das angeregte Pendel, das 3-Körper-Problem, nichtlineare Wellen, strömende Flüssigkeiten und Gase, chemische Reaktionen, Teilchenbeschleuniger, biologische Modelle der Populationsdynamik wie z. B. das Räuber-Beute-System, astrophysikalische Objekte. So zeigen Ringe des Planeten Saturn mit der Cassini-Lücke die Struktur von stabilen und instabilen Orbits.

Viele Fragen berühren die Zeitreihenanalyse. Kann aus der Kenntnis einer Datenfolge (experimentelle Werte) auf die inneren nichtlinearen dynamischen Gesetzmäßigkeiten (chaotische Dynamik) geschlossen werden?

Physikalische Gesetzmäßigkeiten werden durch mathematische Gleichungen ausgedrückt. Insbesondere wird die zeitliche Entwicklung dynamischer Systeme durch nichtlineare Bewegungsgleichungen festgelegt. Die Aussagekraft physikalischer Theorien hat sich sowohl im makroskopischen Bereich außerordentlich bewährt – es sei als klassisches Beispiel auf die Vorhersagbarkeit der Bewegung der Planeten verwiesen –, sie geben aber auch das Verhalten im mikroskopischen Bereich präzise wieder – hier kann auf die Erfolge bei der Beschreibung der Eigenschaften von Molekülen und Festkörpern, der Atomkerne und Elementarteilchen verwiesen werden. Es ergibt sich die Frage, ob sich das Verhalten komplizierter Systeme, einschließlich der belebten Natur, auf der Grundlage der uns bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten vorhersagen läßt.

Systeme aus vielen Teilchen mit vorgegebenen Wechselwirkungen wurden in letzter Zeit intensiv untersucht. Hierbei wurden eine Reihe neuer, hochinteressanter Ergebnisse erhalten. Für die beachtlichen Erfolge dieser Forschung zur Theorie nichtlinearer, komplexer Systeme war die moderne Rechentechnik von besonderer Bedeutung. Durch die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen eines Systems aus vielen Teilchen konnten die Bahnkurven der Teilchen berechnet werden (Molekulardynamik). Neue Begriffe wurden eingeführt, um das Verhalten solcher nichtlinearer Systeme zu analysieren und zu beschreiben. Es wurden teilweise auch völlig unerwartete Ergebnisse ge-

funden, die sowohl die experimentelle physikalische Forschung, aber auch ganz andere Wissenschaftsdisziplinen befruchtet haben.

Ein System zeigt dann ein lineares Verhalten, wenn durch kleine äußere Einwirkungen auch nur kleine Änderungen in den physikalischen Eigenschaften resultieren, wenn Ursache und Wirkung einander proportional sind (starke Kausalität). Wenn die äußere Einwirkung (Kontrollparameter) einen Schwellwert übersteigt, kann das System „umkippen“, es verläßt seinen ursprünglichen Zustand und geht in ein neues Regime über. Diese Nichtlinearität äußert sich in dem Auftreten völlig neuer Lösungstypen. Beispielsweise werden für eine Kette gekoppelter, anharmonischer Oszillatoren für kleine Auslenkungen normale Schwingungsmoden erhalten. Neue Lösungstypen (Solitonen) treten bei großen Auslenkungen (Überschlag der Pendelkette) auf; sie werden durch eine spezielle topologische Struktur beschrieben.

Besonders anschaulich ist die Herausbildung von (zeitlichen und räumlichen) Strukturen. So zeigt die Belousov–Zhabotinsky–Reaktion, eine Redox–Reaktion, einen periodischen Farbwechsel und eine räumliche Strukturierung mit Führungszentren und Spiralwellen. Spezielle Lichtquellen (Laser) emittieren, wenn die Anregungsleistung einen Schwellwert übersteigt, anstelle einer inkohärenten Strahlung kohärentes Licht. Räumliche Strukturen unterschiedlicher Symmetrie können entstehen, wenn eine Flüssigkeitsschicht von unten genügend stark erhitzt wird (Benard–Zellen). Bei strömenden Flüssigkeiten kann der Übergang von der laminaren Bewegung zur turbulenten Strömung beobachtet werden, wenn bestimmte Grenzwerte überschritten werden. Strukturbildung läßt sich bei Reaktions–Diffusions–Systemen in der Chemie sowie in biologischen Systemen beobachten, auch in der Medizin (als Beispiel sei der Herzrhythmus genannt) werden selbsterregte, nichtlineare Stoffwechselsysteme untersucht. Sie werden durch einfache nichtlineare, gekoppelte Differentialgleichungen modelliert, die auch zur Beschreibung der Selbstorganisation in verschiedenen anderen Bereichen der Natur eingesetzt werden können.

Kleine Änderungen der Anfangslagen in einem System aus vielen Teilchen führen zu Änderungen der Bahnkurven bei der Bewegung dieser Teilchen. Bleiben die Bahnkurven in der Nähe der ursprünglichen, ist das System dynamisch stabil. Entfernen sie sich in einem gewissen Gebiet exponentiell, ist es dynamisch instabil und besitzt einen chaotischen Attraktor. Das unterschiedliche Verhalten der Bahnkurven kann anhand von Poincaré–Abbildungen (Durchstoßpunkte der Trajektorie durch eine spezielle Ebene) dargestellt werden. In Abhängigkeit von Parametern kann zwischen einem periodischen, regulären und einem irregulären, chaotischen Verhalten unterschieden wer-

den.

Bereits für einfache Systeme dreier gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen (Lorenz-Modell, Rössler-System u.a.) läßt sich der Übergang von einer regulären, periodischen Lösung zu einem irregulären, chaotischem Verhalten bei Änderung vorgegebener Parameter studieren (Feigenbaum-Szenario). Für einfache Systeme harter Scheiben (zweidimensionales Sinai-Billard) konnte streng bewiesen werden, dass chaotische Bewegungsformen vorliegen. Die Nichtvorhersagbarkeit einer Trajektorie über einen großen Zeitabschnitt ist eine Folge des deterministischen Chaos. Die entsprechenden Modelle wurden ursprünglich eingeführt, um das Verhalten der Atmosphäre zu beschreiben. Somit ist auch die Wetterentwicklung – damit auch die Wettervorhersage – ein typisches Beispiel für chaotisches Verhalten. Unter bestimmten Bedingungen der Instabilität kann bereits eine kleine Störung im Lokalen eine große Auswirkung im Globalen nach sich ziehen. Es ist die berühmte Bewegung eines Schmetterlings in Südamerika, das Schlagen seiner Flügel, dass Auswirkungen auf die Wetterentwicklung in Nordeuropa hat.

Im Gegensatz zu klassischen Systemen läßt sich für Quantensysteme die chaotische Bewegung nur schwer definieren. Gegenwärtige Untersuchungen stellen das Quantenchaos in Beziehung zur Verteilung der Energieniveaus eines Quantensystems.

Ein besonders interessantes Gebiet gegenwärtiger Forschung sind die mesoskopischen Systeme und Cluster. Die Untersuchungen von kleinen Systemen, bestehend aus wenigen Teilchen, zeigen den Übergang von einem komplexen, gebundenen Zustand zu einem makroskopischen kondensierten System mit kollektiven Bewegungsmoden. Hierbei kann es sich bei den gebildeten Aggregaten um Fullerene (Kohlenstoff-Cluster mit bemerkenswerten Eigenschaften), Molekülcluster, metallische Cluster, aber auch um Atomkerne handeln. Das Anregungsspektrum solcher komplexen Systeme kann chaotisches Verhalten zeigen. Insbesondere die Dämpfung von solchen Anregungen zeigt überraschende Effekte. Als Beispiel sei auf die Verteilung der Energie auf verschiedene Freiheitsgrade in komplexen Systemen verwiesen. So ist die Frage von Energietransfer und Energiekonzentration (Aktivierungsenergie) für die Wirkung biologischer Enzyme oder der Photosynthese von entscheidender Bedeutung.

Ein weiteres interessantes Problem ist das Wachstum von Clustern im Nichtgleichgewicht, einschließlich der Herausbildung von fraktalen Strukturen. Die Entwicklung sozialer Erscheinungen (Meinungsbildung, Stadtentwicklung, Migration) kann auch als ein Clusterbildungs- und Wachstumsprozeß interpretiert

tiert werden. Das Verhalten solcher komplexer Systeme, die in Wechselwirkung mit der Umgebung stehen, läßt sich durch einen stochastischen Prozeß simulieren. Fluktuationen und Dissipation werden durch einen Zufallsprozeß, einen Rauschterm, erfaßt. Hochangeregte Atome in der Paul-Falle, die elektrische Leitfähigkeit in mesoskopischen Systemen und weitere Fragen sind interessante Forschungsobjekte zum Studium chaotischen Verhaltens in Quantensystemen. Die Dynamik komplexer Systeme ist insbesondere dann von großem theoretischen und experimentellen Interesse, wenn sich starke Korrelationen zwischen den Teilchen herausbilden. Eigenschaften solcher Systeme stehen im Mittelpunkt theoretischer Grundlagenforschung sowohl der subatomaren Physik, als auch der Plasmaphysik und Festkörperphysik. Zu den zahlreichen, zur Zeit noch ungeklärten Fragen auf diesem Gebiet stark korrelierter Systeme gehören u. a. die Hochtemperatursupraleitung und die Lokalisation.

Ein weiteres Beispiel für nichtlineare komplexe Systeme sind die neuronalen Netzwerke. Dieses Forschungsgebiet führt Erkenntnisse der Physik, der Informatik, der Mathematik bis hin zur neuronalen Medizin zusammen. Es ist zu erkennen, dass es für die Computerentwicklung, die Kommunikationstechnik und Informationsverarbeitung, aber auch für die Biologie und Medizin von großer Bedeutung ist.

3 Klassifikation dynamischer Systeme

Entwicklungsprozesse, bei denen der gesamte Ablauf in Vergangenheit und Zukunft eindeutig durch den Zustand zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestimmt ist, scheinen einfach und keinerlei Besonderheiten in sich zu bergen. Diese Aussagen, seit Newton und Leibniz in Form der klassischen Mechanik vollendet, wurden Anfang dieses Jahrhunderts durch Poincaré revidiert. Er nahm vorweg, was heute, bei der massenhaften Verbreitung von Computern, bis ins Bewußtsein nicht nur von Spezialisten, sondern auch einer breiten Öffentlichkeit dringt: die Resultate der *Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme*. Beim Studium nichtlinearer Vorgänge treten das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare als Einheit hervor, bekannt sind diese Erscheinungen unter dem Begriff „Deterministisches Chaos“.

Einige Meilensteine auf dem Weg dorthin seien an dieser Stelle nochmals genannt:

1. Eduard Lorenz zeigt, dass sein einfaches Modell aus drei gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen zu irregulären Trajektorien fähig ist (Lorenz, 1963).
2. Das berühmte Henon–Heiles–Modell entwickelt sich zu einem viel diskutierten Beispiel für numerische und theoretische Studien dynamischer Systeme (Henon, Heiles, 1964).
3. Neben den klassischen Attraktoren (Fixpunkte, Grenzzyklen, . . .) wird die Existenz von seltsamen Attraktoren (strange attractor) nachgewiesen (Ruelle, Takens, 1971).
4. Nichtlineare dynamische Systeme mit vielen Variablen werden zur Modellierung in der Ökologie, Soziologie, den Wirtschaftswissenschaften und weiteren Gebieten eingesetzt, beispielsweise sei die Dynamik von Populationen angeführt (May, 1976).
5. Periodenverdopplungen und Bifurkationen werden in diskreten dynamischen Systemen untersucht. Die logistische Abbildung liefert das berühmte Feigenbaum–Diagramm (Feigenbaum, 1978); im Jahre 1980 folgt Benoit Mandelbrot mit den „Apfelmännchen“ und zeigt dessen fraktale Strukturen auf (Mandelbrot, 1982).

Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung spielen eine fundamentale Rolle bei der Beschreibung von dynamischen Prozessen. Die mathematische Theorie zur Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen ist seit dem vorigen Jahrhundert gut ausgearbeitet; ihre Eckpfeiler sind die Existenz– und Eindeutigkeitssätze. Sie sichern, dass die Lösung eines Differentialgleichungssystems existiert und eindeutig bestimmt ist, falls die Werte der unabhängigen Variablen zu einem beliebig vorgegebenen Zeitpunkt bekannt sind. Neben der mathematischen Literatur zur Theorie dynamischer Systeme sind besonders für den Physiker die von Vladimir Arnold zu diesem Thema verfaßten Monographien und Lehrbücher, beispielsweise die deutsche Übersetzung (Arnold, 1979), hervorzuheben.

Die unerwartet stürmische Entwicklung zur klassischen Dynamik relativ einfacher Systeme mit wenigen Freiheitsgraden ist in einer kaum überschaubaren großen Anzahl von Artikeln in Fachzeitschriften und Monographien dargestellt. Einen guten Überblick und Einstieg in die Theorie konservativer und dissipativer nichtlinearer dynamischer Systeme geben u. a. (Anishchenko, 1987; Arnold, 1980; Ebeling, Feistel, 1982; Ebeling, Engel, Feistel, 1990;

Guckenheimer, Holmes, 1983; Jetschke, 1989; Kunik, Steeb, 1986; Lichtenberg, Lieberman, 1983; Schuster, 1984; Steeb, 1994). Zur Theorie der schwingungsfähigen Systeme verweisen wir zusätzlich auf den „aktuellen Klassiker“ (Andronov, Witt, Chaikin, 1965, 1969). Neue Lehrbücher zur theoretischen Mechanik, die das dynamische System in den Mittelpunkt stellen und darauf aufbauend nicht nur die wenigen integrierbaren Beispiele untersuchen, fehlen in der Regel noch. Eine bemerkenswerte Ausnahme ist das Lehrbuch von Scheck (1988) mit dem Untertitel „Von der Newtonschen Mechanik zum deterministischen Chaos“ einschließlich der Aufgaben und Lösungen (Scheck, Schöpf, 1989).

Im folgenden wollen wir kurz den Begriff des dynamischen Systems einführen und eine Klassifikation dynamischer Systeme nach unterschiedlichen Kriterien vorstellen. Anschließend werden allgemeine Resultate zur Evolution in Hamiltonschen Systemen zusammengefaßt.

Ein (physikalisches) System sei durch einen Satz von unabhängigen Variablen x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bestimmt. Diese Größen x_i spannen einen Zustandsraum X auf. Der Zustand des Systems ist zu jedem Zeitpunkt t durch die Angabe der Werte der Variablen $x_i(t)$ eindeutig bestimmt

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad \text{Zustandsvektor} \quad (1)$$

und repräsentiert einen Punkt im Zustandsraum.

Die Bewegung des Zustandes wird mittels einer Evolutionsgleichung festgelegt, insbesondere gilt für ein dynamisches System, dass das Bewegungsgesetz durch einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung definiert ist.

Sei $x(t)$ ein n -dimensionaler Zustandsvektor, so ist ein dynamisches System gegeben durch Bewegungsgleichungen vom Typ gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung der Art

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] \quad \text{Bewegungsgleichungen} . \quad (2)$$

Das dynamische System ist somit eine Abbildung vom Zustand $x_0 \equiv x(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 (Anfangswert) in den Zustand $x(t)$ zum Zeitpunkt t , d.h. eine Abbildung $x(t) = T^t x_0$. Die Bewegung im Zustandsraum heißt Bahnkurve, Orbit oder Trajektorie und ist durch die rechten Seiten der Bewegungsgleichungen, d. h. durch den Geschwindigkeitsvektor $v(x)$, eindeutig bestimmt. Lösung des dynamischen Systems bestimmen heißt also, die Menge aller Trajektorien

$$x(t) = F(t; t_0, x_0) \quad \text{Trajektorie} \quad (3)$$

für alle möglichen Anfangszustände x_0 zu jedem Zeitpunkt t zu kennen. Dabei interessiert es nicht so sehr, eine spezielle Trajektorie (gehörig zum Anfangswert x_0) zu kennen, sondern das qualitative und möglichst auch das quantitative Verhalten aller Trajektorien, d.h. den Fluss im Zustandsraum vollständig zu analysieren. Die Topologie der Zustandsraums studieren heißt also, auf die folgenden Fragen einzugehen:

- Existieren ausgezeichnete Punkte (singuläre Zustände, Fixpunkte) im Zustandsraum?
- Wie verhält sich der Fluss in der Nähe dieser Punkte?
- Ist der Fluss kontrahierend bzw. expandierend oder nicht?

Die Klassifikation dynamischer Systeme kann nach verschiedenen Kriterien erfolgen. Wir schlagen nun die folgende Variante vor, wobei die fett markierten Eigenschaften in den nachfolgenden Kapiteln im Mittelpunkt stehen werden.

a) Lineare / **nichtlineare** dynamische Systeme

Ist die Geschwindigkeit $v(x)$ eine lineare Funktion in x , d.h.

$$\dot{x} = Ax \quad ; \quad x(t = t_0) = x_0 , \quad (4)$$

so ist die allgemeine Lösung bekannt und lautet

$$x(t) = x_0 \exp(At) . \quad (5)$$

Es gilt das Superpositionsprinzip. Zu beachten ist aber, dass schon die einfachsten realen Systeme (man denke beispielsweise an das mathematische Pendel) nichtlinear sind.

b) **Endlich-** / **unendlich-dimensionale** dynamische Systeme

Ist der Zustandsraum endlich-dimensional ($n < \infty$), so sind die Dynamiken mit $n = 1$ und $n = 2$ bekannt und im Prinzip stets analytisch lösbar, interessant wird es für die Situationen mit $n \geq 3$.

Falls die Zahl der unabhängigen Variablen sehr groß ($n \rightarrow \infty$) wird, so verliert das dynamische System in der Definition (1, 2) seinen Sinn und es sind dann andere Evolutionsgleichungen (partielle Differentialgleichungen) zu verwenden. Für Reaktions-Diffusions-Systeme ist die

Abb. 1: Eindeutige Bahnkurven einer deterministischen Beschreibung bei starker Kausalität (links) und schwacher Kausalität (rechts).

Abb. 2: Mehrdeutige Bahnkurven einer stochastischen Beschreibung mit der zeitlichen Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$.

dynamische Bewegungsgleichung für die orts- und zeitabhängige Konzentration $c(r, t)$ vom Typ

$$\frac{\partial c}{\partial t} = f [c(r, t)] + \frac{\partial^2 c}{\partial^2 r} . \quad (6)$$

c) **Deterministische / stochastische** dynamische Systeme

Wirken auf das System keine äußeren Einflüsse, die ein Schwanken der Kontrollparameter veranlassen könnten, und ist auch keine innere Rauschquelle im System vorhanden, so existiert bei dieser deterministischen Beschreibung eine eindeutige reguläre oder chaotische Bahn (siehe Abb. 1).

Ist andernfalls Rauschen von Bedeutung, so führt dies zu einer stochastischen Beschreibung von dynamischen Systemen (Röpke, 1987; Malchow, Schimansky–Geier, 1985). Die Abbildung 2 zeigt als Skizze mehrere Realisierungen desselben dynamischen Prozesses mit einer sich herausbildenden Verteilung $p(x, t)$.

Stochastische dynamische Systeme werden entweder durch Evolutionsgleichungen vom Langevin–Typ mit einer stochastischen Kraft oder Rauschquelle $\Gamma(t)$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t)] + \Gamma(t) \quad (7)$$

oder durch eine Bilanzgleichung im Wahrscheinlichkeitsraum, die Mastergleichung

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \sum_{x'} [w(x, x')p(x', t) - w(x', x)p(x, t)] \quad (8)$$

beschrieben. $w(x', x)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand x nach x' .

d) **Autonome** / nichtautonome dynamische Systeme

Liegt noch zusätzlich eine explizite Zeitabhängigkeit (neben der üblichen impliziten) vor, so handelt es sich um ein nichtautonomes dynamisches System

$$\frac{d}{dt}x(t) = v [x(t) , t] . \quad (9)$$

Die Autonomie läßt sich aber wieder herstellen, in dem der Zustandsraum um eine Dimension ($x_{n+1} = t$) erweitert und eine neue Zeit u eingeführt wird

$$\frac{dx_i}{du} = v_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n+1 . \quad (10)$$

Damit ist die Rückführung auf ein autonomes dynamisches System gegeben. In kompakter Schreibweise entspricht (10) den Bewegungsgleichungen (2).

e) **Kontinuierliche** / **diskrete** dynamische Systeme

Aus den gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung werden Differenzgleichungen, wenn die Zeit diskretisiert wird, u. z.

$$t \rightarrow t_0, t_1, \dots, t_i, \dots \quad ; \quad t_i = t_0 + i\Delta t \quad (11)$$

$$\dot{x} = v(x) \rightarrow x(t + \Delta t) = x(t) + v(x(t))\Delta t + O(\Delta t^2) . \quad (12)$$

Fixieren wir den Zeitschritt zu eins ($\Delta t = 1$), so folgt aus (12) die Iterationsgleichung

$$x(t + 1) = x(t) + v(x(t)) \equiv \tilde{v}(x(t)) . \quad (13)$$

Wir erhalten somit als Evolutionsgleichung für das diskrete dynamische System eine Abbildung \tilde{v} der Art

$$x_{t+1} = f(x_t) . \quad (14)$$

Bekanntestes Beispiel ist die logistische Abbildung mit einer quadratischen Nichtlinearität

im Reellen:	$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i)$	P. F. Verhulst (1845) Feigenbaum-Diagramm
im Komplexen:	$z_{i+1} = z_i^2 + c$	B. Mandelbrot (1980) Apfelmännchen-Bild

Abb. 3: Elliptischer (links) und hyperbolischer Fixpunkt (rechts) in konservativer Systemen.

Zu diesen Abbildungen und weiteren nichtlinearen Modellen ein- und mehrdimensionaler diskreter dynamischer Systeme existiert umfangreiche Literatur (Schuster, 1984). Diese Iterationen dienen häufig als Prototypen für das Studium des deterministischen Chaos und der Selbstähnlichkeit.

f) **Konservative / dissipative** dynamische Systeme

Diese Unterscheidung ist von großem inhaltlichen Interesse, da die unterschiedlichen (physikalischen) Systeme in zwei große Gruppen zerlegt werden können. Eine verbale Formulierung lautet wie folgt.

Gibt es im Zustandsraum einen kontrahierenden oder expandierenden Fluss, dann handelt es sich um ein dissipatives dynamisches System. In solchen Systemen existieren Attraktoren (anziehende singuläre Punkte, stabile Grenzzyklen, höherdimensionale anziehende Tori, seltsame Attraktoren) und Repeller (abstoßende singuläre Punkte, instabile Grenzzyklen, höherdimensionale instabile Mannigfaltigkeiten).

Herrscht dagegen im Zustandsraum eine konstante Zustandsraumdichte, dann handelt es sich um ein konservatives System. Damit ist das Auftreten von Quellen (Repellern) und Senken (Attraktoren) unmöglich, es gibt höchstens elliptische und hyperbolische Fixpunkte (Wirbel, Sattel, siehe Abb. 3) und semistabile Grenzzyklen bzw. Tori.

Eine wichtige Klasse der konservativen dynamischen Systeme sind die Hamiltonschen Systeme. Der Zustandsraum heißt in diesem Fall Phasenraum $x = (q, p)$, gebildet aus den generalisierten Orten q und den Impulsen p . Er hat die Dimension $n = 2f$, wobei f die Zahl der Freiheitsgrade des Systems ist. Die Evolutionsgleichungen des dynamischen Systems (2) sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{15}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{16}$$

mit der nichtlinearen Hamilton–Funktion

$$H = H(q, p) \equiv H(q_1, q_2, \dots, q_f, p_1, p_2, \dots, p_f) . \quad (17)$$

Die Gleichungen (15, 16) repräsentieren $2f$ gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es gilt das Liouville–Theorem über den inkompressiblen Fluss im Phasenraum (Arnold, 1980; Landau, Lifschitz, 1981; Scheck, 1988)

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} (\dot{q}, \dot{p}) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0 . \quad (18)$$

Hiermit schließen wir unsere Klassifikation ab und stellen abschließend die Frage: Gibt es eine konstruktive Methode, so dass ein dynamisches System mit beliebigen Differentialgleichungen 1. Ordnung in Hamiltonscher Form geschrieben werden kann? Mit anderen Worten: Unter welchen Voraussetzungen lassen sich die allgemeinen Evolutionsgleichungen (2) in die kanonische Form (15, 16) überführen?

Unter Verwendung der Poisson–Klammern $\{\cdot, \cdot\}$ lautet die Fragestellung, unter welchen Bedingungen

$$\dot{x} = v(x) = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ \partial H / \partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{H, q\} \\ \{H, p\} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \{H, x\} \quad (19)$$

bzw. in Komponentenschreibweise

$$\dot{x}_i = v_i(x_1, \dots, x_n) \stackrel{?}{=} \{H(x_1, \dots, x_n), x_i\} = \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (20)$$

möglich ist. Dabei wird die Poisson–Klammer wie üblich als ein linearer antisymmetrischer Operator mit der Eigenschaft der Jacobi–Identität (Lie–Gruppen­eigenschaft) verstanden. Es gilt

$$\{A, B\} = \sum_i \sum_j \{x_i, x_j\} \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (21)$$

mit $P_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \{x_i, x_j\}$ als Poisson–Tensor.

Die Aufgabenstellung lautet somit, ob ein gegebenes Vektorfeld $v(x)$ als

$$v_i(x) = \sum_j P_{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (22)$$

geschrieben werden kann. In (Abarbanel, Rouhi, 1987) wird eine konstruktive Methode beschrieben, die es gestattet, für lokale Bereiche des Zustandsraumes die Hamilton–Funktion $H(x)$ des Feldes $v(x)$ zu konstruieren, beispielsweise für den gedämpften harmonischen Oszillator.

4 Stabilitätsanalyse dynamischer Systeme

Zum besseren Verständnis der Methoden zur Behandlung nichtlinearer dynamischer Systeme wird zunächst die Untersuchung einfacher Modellsysteme empfohlen. Diese Modelle spielen bei der Diskussion zu Problemen der Strukturbildung eine große Rolle. Die gelernten Methoden lassen dann auch auf komplexe Systeme übertragen.

Die folgenden Aufgaben behandeln spezielle zwei- bzw. dreidimensionale kontinuierliche dynamische Systeme, deren Zustandsraumdynamik zu analysieren ist. Analytisch sind Fixpunkte und periodische Lösungen (z.B. Grenzzyklen) zu bestimmen. Anschließend ist die Stabilitätsanalyse durchzuführen, um die stabilen Lösungen zu erhalten. Kritische Werte der Kontrollparameter, bei denen sich das Stabilitätsverhalten stationärer Zustände ändert, sind anzugeben. Numerisch sind einzelne Trajektorien zu berechnen, um so einen Überblick über den Fluß im Zustandsraum zu erhalten.

Da im allgemeinen das dynamische System (siehe Kapitel 3, Gleichung 2)

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(x(t)) \quad ; \quad x_0 = x(t_0) \quad (23)$$

zu kompliziert ist, um den Fluß (Menge aller Trajektorien, Gleichung 3) vollständig zu bestimmen, beschränkt man sich häufig auf die Ermittlung der stationären Zustände, auch Fixpunkte oder singuläre Punkte genannt. Die stationären Lösungen ($dx/dt \equiv \dot{x} = 0$) folgen aus einem System algebraischer Gleichungen

$$v(x) = 0 \implies x_{st} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \quad \text{Fixpunkte} \quad (24)$$

und entsprechen physikalisch den Gleichgewichtszuständen. Es erhebt sich nun folgende wichtige Frage: Welche Zustände werden bevorzugt angelauften, wenn das System bei festen Parametern mehrere Gleichgewichtslagen besitzt? Die Antwort gibt die Stabilitätsanalyse der Fixpunkte (Fixpunktanalyse).

Ein stationärer Zustand x_{st} heißt stabil (andernfalls instabil), wenn eine kleine Schwankung δx

$$x(t) = x_{st} + \delta x \quad (25)$$

im Laufe der Zeit abklingt

$$|\delta x| = |x(t) - x_{st}| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \rightarrow \infty, \quad (26)$$

(andernfalls sich aufschaukelt und der stationäre Zustand dabei verlassen wird).

Eine Trajektorie, die nicht von einem singulären Punkt startet, kann einen stabilen Fixpunkt nur asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ erreichen. Die Frage nach der Stabilität bzw. Instabilität stationärer Lösungen kann mit der Methode der kleinen Störungen entschieden werden. Dazu wird in der Umgebung von x_{st} eine Taylorentwicklung durchgeführt, u. z.

$$\delta x = x(t) - x_{st} \equiv y \quad (27)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x_{st}) + \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_{st}} y + \dots \quad (28)$$

$$= py \quad \text{mit} \quad p = v'(x_{st}) \quad (29)$$

mit der Lösung

$$y(t) = y(0) \exp(pt) . \quad (30)$$

3. Fortsetzung: Nichtlineare dynamische Systeme und Chaos
(27.10.2015, Ch. Bräuning)

5 Zwei Beispiele für oszillatorische dynamische Systeme

Untersuchen wir zuerst das elementare zweidimensionale dynamische System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y.\end{aligned}$$

Anschließend ist der Fluß im Zustandsraum für ein erweitertes Modellsystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + y - y(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

zu analysieren, das in Beziehung zum van der Pol-Oszillator steht.

Das folgende in einem zweidimensionalen x - y -Zustandsraum „lebende“ lineare dynamische System

$$\dot{x} = -x + y \tag{31}$$

$$\dot{y} = -x - y. \tag{32}$$

ist auf Grund der Kopplung der beiden Gleichungen in kartesischen Koordinaten recht schwierig zu lösen. Deshalb führen wir eine Transformation auf Polarkoordinaten durch. Das Ziel besteht in der Entkopplung der beiden Gleichungen.

Unter Verwendung der Transformationsbeziehungen

$$x = r \cos \alpha \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{33}$$

$$y = r \sin \alpha \quad ; \quad \alpha = \arctan(y/x) \tag{34}$$

erhalten wir aus (31, 32) mittels

$$\dot{r} = \frac{\dot{x}x + \dot{y}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (35)$$

$$= \frac{-x^2 + xy - xy - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (36)$$

$$= -\sqrt{x^2 + y^2} = -r \quad (37)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{y}x^{-1} - \dot{x}yx^{-2}}{1 + y^2x^{-2}} \quad (38)$$

$$= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2 + y^2} \quad (39)$$

$$= \frac{-x^2 - xy + xy - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \quad (40)$$

das entkoppelte Gleichungssystem

$$\dot{r} = -r \quad (41)$$

$$\dot{\alpha} = -1 . \quad (42)$$

Eine vollständige Lösung mittels elementarer Integration ist möglich. Die zum Anfangszustand ($r_0 = r(t_0)$; $\alpha_0 = \alpha(t_0)$) gehörende Trajektorie lautet

$$r(t) = r_0 \exp(-t) \quad (43)$$

$$\alpha(t) = -t + \alpha_0 \quad (44)$$

bzw.

$$r(\alpha) = r_0 \exp(\alpha - \alpha_0) . \quad (45)$$

Der Fluß im Zustandsraum (Abb. 4) zeigt das Einstrudeln aller Trajektorien zum Koordinatenursprung (0,0). Die Gleichung (45) beschreibt logarithmische Spiralen in Richtung auf den Ursprung. Das dynamische System (31, 32) entspricht physikalisch einem Pendel mit schwacher Reibung, wobei die Gleichgewichtslage ($x_{st} = 0$, $y_{st} = 0$) ein stabiler Strudelpunkt ist.

Das erweiterte Modellsystem

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \quad (46)$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \quad (47)$$

entkoppeln wir wiederum, indem wir die Transformation auf Polarkoordinaten durchführen. Wir erhalten nach analoger Rechnung

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (48)$$

$$\dot{\alpha} = 1 . \quad (49)$$

Abb. 4: Fluss im Zustandsraum für das einfache System (links) und das erweiterte System (rechts) (Nobach, Mahnke, 1994).

Aus der Gleichung (48) folgen zwei Fixpunkte, u.z.

$$r_{st}^{(0)} = 0 \quad (50)$$

$$r_{st}^{(1)} = 1. \quad (51)$$

Die Integration der einfachen Bewegungsgleichungen (48, 49) ist elementar möglich. Nach Trennung der Variablen, Benutzung des Integrals

$$\int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (52)$$

mit $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, somit

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2}{1-r^2}, \quad (53)$$

folgt nach Inversion die allgemeine Lösung (globaler Fluss)

$$r(t) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2} \quad (54)$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + t \quad (55)$$

bzw. als Trajektorie (Abb. 4)

$$r(\alpha) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2(\alpha-\alpha_0)} \right]^{-1/2}. \quad (56)$$

Die Analyse zeigt, dass jede Trajektorie ($r_0 \neq 1$) für $t \rightarrow \infty$ dem Zustand $r_{st}^{(1)} = 1$ (51) zustrebt. Da der Winkel linear mit der Zeit anwächst (55), rotiert das System für lange Zeiten auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$. Somit ist der Koordinatenursprung als Fixpunkt (50) ein instabiler Strudel, während die stabile Lösung (51) einen Grenzyklus mit konstantem Radius (periodische Lösung) darstellt. Diese Situation beschreibt das Modell eines selbsterregten Schwingkreises, wie ihn der van der Pol-Oszillator darstellt.

6 Theoretische Mechanik: Newton'sche Formulierung

Deterministische Dynamik: Newtonsche Bewegungsgleichung(en) plus Anfangsbedingungen.

4. Newtonsche Dynamik I (03.11.2015, R. Mahnke)

Wiederholung Ortsvektor \vec{r} , Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ und Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$.

Beispiel: Gleichförmige Kreisbewegung (Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn) $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 \vec{r}$.

Beispiel: Harmonischer Oszillator (eindimensionaler Federschwinger), Bahnkurve $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ist Lösung der Gleichung $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$.

Kraft \vec{F} ist Ursache der Bewegung: $\ddot{\vec{r}} \sim \vec{F}$.

Die klassische (Newtonsche) Mechanik handelt von Newtons II. Axiom $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Gesucht ist die Bahn (Trajektorie) $\vec{r}(t)$ einer Masse m bei einer Frafteinwirkung \vec{F} unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

Die Kinematik behandelt den einfachen Fall einer kräftefreien Bewegung $m\ddot{\vec{r}} = 0$.

Beispiele für Kräfte: Gravitationskraft, Coulombkraft, Schwerkraft, Kraft im äußeren elektrischen bzw. magnetischem Feld (Lorentzkraft), Mehrteilchenkräfte (Zweikörperproblem), harmonische Kraft $F(x) = -kx$, Reibungskraft, äußere (periodische) Anregung, etc

Zusammenfassung: Grundgleichung der Newtonschen Mechanik

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \quad ; \quad \dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0 .$$

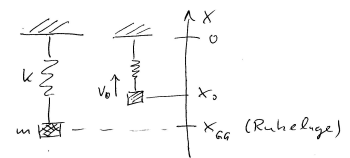
5. Harmonischer Oszillator (10.11.2015, R. Mahnke)

Modell des Federschwingers (lineares Modell), Hook'sches Gesetz, Federkraft, Newton'sche Bewegungsgleichung, Anfangsbedingungen, dynamisches System aus zwei gekoppelten Bewegungsgleichungen, verschiedene Lösungsmethoden (exp-Ansatz, Eigenvektoren, Energieerhaltung). Ermittlung der zeitabhängigen Lösungen $x = x(t)$ (Ort über Zeit) und $v = v(t)$ (Geschwindigkeit über Zeit) des Federschwingers. Eventuell zuerst lineare Transformation der Ortskoordinate zur Verschiebung des Koordinatenursprungs. Verschiedene Lösungsmethoden:

- 1.) Anwendung der Energieerhaltung
- 2.) Anwendung des Ansatzes $\exp(\lambda t)$
- 3.) Berechnung von Eigenwerten und Eigenfunktionen

Die mathematische Form der Lösungen ist unterschiedlich. Sie können aber ineinander überführt werden. Es gibt nur eine physikalische Lösung des Federschwingers, aber verschiedene mathematische Schreibweisen.

Federschwinger / R. Mahnke / ①
SS 2010



$F(x) = -kx$
Federkraft

$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{00})$ Bewegungsgleichung

+
Anfangsbed. $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$

$\{x(t), v(t)\}$: Variable
 $\{k, m, x_0, v_0, x_{00}\}$: Parameter

dynamisches System

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = -k(x - x_{00}) \end{cases}$ gekoppelte Diffgl. system

Abb. 5: Harmonische Bewegung einer Masse bei linearer rücktreibender Kraft.

① Transformieren: ②

$$y = x - x_{GS} \Leftrightarrow x = y + x_{GS}$$

↑ neue
Ortsvariable

↑ alte
Ortsvariable

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(y + x_{GS}) = \frac{dy}{dt}$$

$$\Downarrow \boxed{m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky} \quad \text{Standardform der Bewegungsgl.}$$

$$y(t=0) = y_0 = x_0 - x_{GS}$$

$$v(t=0) = v_0$$

l. u. m.

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = -ky \end{array}}$$

Def: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$: Eigenfrequenz²

löse das Problem in

$\{y(t), v(t)\}$, dann Rücktransformation

Abb. 6: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

③ Löse mit Hilfe Energieerhaltung ③

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 \quad ; \quad E_{\text{pot}} = + \frac{k}{2} y^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = -ky \quad | \cdot v$$

$$m v \frac{dv}{dt} = -ky v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) = -ky v \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \quad | \cdot ky$$

$$ky \frac{dy}{dt} = ky v$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{k}{2} y^2 \right) = ky v \quad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} y^2 \right] = -ky v + ky v = 0$$

Integration bezüglich der Zeit t

$$\boxed{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0} \quad \text{mit}$$

$$E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2$$

Abb. 7: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Berechne Trajektorie

(4)

$$\frac{m}{2} v^2 + \frac{k}{2} y^2 = E_0 \quad | \cdot \frac{2}{m}$$

$$v^2 = \frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2$$

$$v(y) = \pm \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m} y^2}$$

$e^2 = \frac{2E_0}{m\omega_0^2} \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$| v(y) = \pm \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2} |$$

Berechne Weg-Zeit-Gesetz $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = v = \pm \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2}$$

Trennung der Variablen

$$\pm \omega_0 \int dt = \int \frac{dy}{\sqrt{e^2 - y^2}} \quad \text{Grundintegral}$$

$$\pm \omega_0 t(x) = \arcsin\left(\frac{y}{e}\right) + C$$

Bestimme Konstante C aus Anfangsbedingung
 $y(t=0) = y_0$

$$0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right) + C$$

$$\Rightarrow C = -\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$$

Abb. 8: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

$$\pm \omega_0 t(x) = \arcsin\left(\frac{y}{e}\right) - \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right) \quad (5)$$

Invertierung (Umkehrung) durchführen

$$\arcsin\left(\frac{y}{e}\right) = \underbrace{\pm \omega_0 t}_{\substack{t \geq 0 \\ \text{"+" Zeichen}}} + \underbrace{\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)}_{\alpha_0}$$

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{y}{e}\right)\right) = \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

inverse Fktn

$$\boxed{y(t) = e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)}$$

Weg-Zeit-Gesetz

$$\text{mit } e = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2}} \quad ; \quad E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$$

Rücktransformieren:

$$\boxed{x(t) = x_{GG} + e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)}$$

$$\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{x_0 - x_{GG}}{e}\right)$$

$$E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} (x_0 - x_{GG})^2$$

Abb. 9: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Berechne $v = v(t)$: Geschwindigkeit (6)

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e \sin(\omega_0 t + \alpha_0))$$

$$v(t) = e \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$$

oder aus Trajektorie:

$$\begin{aligned} v &= \omega_0 \sqrt{e^2 - y^2} = \omega_0 \sqrt{e^2 - e^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)} \\ &= \omega_0 e \sqrt{1 - \sin^2(\omega_0 t + \alpha_0)} = e \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \end{aligned}$$

Prüfe Anfangsbedingung: $v(t=0) = v_0$

$$v(t=0) = e \omega_0 \cos \alpha_0 = e \omega_0 \cos\left(\arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)\right)$$

Benutze: $\cos(\arcsin u) = \sqrt{1 - u^2}$

$$\begin{aligned} v(t=0) &= e \omega_0 \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{e^2}} = \omega_0 \sqrt{e^2 - y_0^2} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} y_0^2} = \sqrt{\frac{2}{m} E_0 - \omega_0^2 y_0^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} y_0^2 \right) - \omega_0^2 y_0^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} y_0^2 - \frac{k}{m} y_0^2} = \sqrt{v_0^2} = v_0 \end{aligned}$$

Abb. 10: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Zeige, dass folgendes gilt: ⑦

$$y(t) = e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Benutze: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\alpha \rightarrow \omega_0 t$; $\beta \rightarrow \alpha_0 = \arcsin\left(\frac{y_0}{e}\right)$

$$y(t) = e \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

$$= e \left[\sin(\omega_0 t) \cos \alpha_0 + \cos(\omega_0 t) \sin \alpha_0 \right]$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0} \quad \quad \quad \uparrow \frac{y_0}{e}$$

$$= e \left[\sin(\omega_0 t) \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{e^2}} + \cos(\omega_0 t) \frac{y_0}{e} \right]$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{e^2 - y_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega_0^2} - y_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2} + \frac{K y_0^2 - y_0^2}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t)$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t)$$

$$= y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Abb. 11: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

③ Löse mittels Ansatz "exp(λt)" ⑧

Ansatz: $y(t) = C e^{\lambda t}$

in Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = C \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = C \lambda^2 e^{\lambda t} \end{array} \right.$$

$$\Downarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i \omega_0$$

imaginäre Lösung

Superpositionslösung (Komplexe Fkt):

$$y(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

$$v(t) = C_1 i\omega_0 e^{i\omega_0 t} - C_2 i\omega_0 e^{-i\omega_0 t}$$

$$y(t=0) = C_1 + C_2 = y_0$$

$$v(t=0) = i\omega_0 (C_1 - C_2) = v_0$$

$$\Downarrow C_1 = \frac{1}{2} \left(y_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right); C_2 = \frac{1}{2} \left(y_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left(y_0 - i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(y_0 + i \frac{v_0}{\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t}$$

Komplexe Lösung, die aber reell ist!

Abb. 12: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Nutze: $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ (9)

Euler-Formel

$$\begin{aligned}y(t) &= C_1 [\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)] \\ &\quad + C_2 [\cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)] \\ &= (C_1 + C_2) \cos(\omega_0 t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega_0 t) \\ &= y_0 \cos(\omega_0 t) + i \frac{v_0}{i \omega_0} \sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

reine reelle Lösung (Schwingung)

Abb. 13: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

④ Löse mittels linearer Algebra, (10)
 Bestimme Eigenwerte & Eigenfunktionen

Definiere Vektor $\vec{A}(t)$ & Matrix M (2x2)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \vec{A} = M \vec{A}} ; \vec{A}(t=0) = \vec{A}_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\omega_0^2 y \end{aligned}} ; \boxed{\begin{aligned} y(t=0) &= y_0 \\ v(t=0) &= v_0 \end{aligned}}$$

• Bestimme Eigenwerte λ von Matrix M ,

$$\det(M - \lambda E) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - (-\omega_0^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \sqrt{-\omega_0^2} = \pm i \omega_0 ;$$

Konjugierte rein imaginäre EW

Abb. 14: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

- Bestimme die zu λ_i (EW) $\textcircled{11}$ gehörenden Eigenvektoren \vec{B}_i (EV)

$$\boxed{M \vec{B}_i = \lambda_i \vec{B}_i} \quad \text{Eigenwertgleichung}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \end{pmatrix} \quad ; \lambda_1 = i\omega_0$$

$$0 \cdot b_{11} + 1 \cdot b_{12} = i\omega_0 b_{11} \rightarrow b_{12} = i\omega_0 b_{11}$$

$$-\omega_0^2 b_{11} + 0 \cdot b_{12} = i\omega_0 b_{12} \rightarrow -\omega_0^2 b_{11} = i\omega_0 b_{12}$$

2 identische Gleichungen

$$b_{12} = i\omega_0 b_{11} \quad ; \quad -i \cdot i b_{12} = +i\omega_0 b_{11}$$

Setze : $b_{11} = 1 \quad \leadsto \quad b_{12} = i\omega_0$

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \quad ; \text{ noch nicht normiert}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix} \quad ; \lambda_2 = -i\omega_0$$

$$b_{22} = -i\omega_0 b_{21} \quad / \cdot i\omega_0^{-1} \rightarrow b_{21} = i\omega_0^{-1} b_{22}$$

$$-\omega_0^2 b_{21} = -i\omega_0 b_{22} \rightarrow b_{21} = i\omega_0^{-1} b_{22}$$

Setze : $b_{22} = 1 \quad \leadsto \quad b_{21} = i/\omega_0$

$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{B}_1 \text{ und } \vec{B}_2 \text{ müssen lin. unabhängig sein.}$$

Abb. 15: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Normierung der Eigenvektore (12)

$$\text{normierter Vektor: } |\vec{B}| = \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}^*} = 1$$

Bestimme Betrag \uparrow \swarrow konjugiert komplex

$$|\vec{B}_1| = \sqrt{\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_1^*} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (i\omega_0)(-i\omega_0) = 1 + \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 \text{ normiert} = \frac{1}{1 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix}}$$

$$|\vec{B}_2| = \sqrt{\vec{B}_2 \cdot \vec{B}_2^*} = \begin{pmatrix} i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2 + 1}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 \text{ normiert} = \frac{\omega_0^2}{1 + \omega_0^2} \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Beide EV sind linear unabhängig

$$\mu_1 \vec{B}_1 + \mu_2 \vec{B}_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$$

Abb. 16: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Bilde Superposition der EV

(13)

$$\vec{A}(t) = \sum_{i=1}^2 c_i \vec{B}_i' \exp(\lambda_i t)$$

\swarrow Vorfaktoren (Parameter) \uparrow normierte Eigenvektoren \swarrow e-Funktion mit Eigenwerten
 \uparrow aus Anfangsbedingungen \downarrow ausgerechnet
 $c_1, c_2 \Leftrightarrow \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{A}(t) = c_1 \vec{B}_1' \exp(i\omega_0 t) + c_2 \vec{B}_2' \exp(-i\omega_0 t)$$

Koeffizienten aus Anfangsbed. ermitteln

$$\vec{A}(t=0) = c_1 \vec{B}_1' + c_2 \vec{B}_2' = \vec{A}_0$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} \frac{1}{1+\omega_0^2} + c_2 \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{1+\omega_0^2} = \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_0 \end{pmatrix} + c_2 \omega_0^2 \begin{pmatrix} i\omega_0^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = (1+\omega_0^2) \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow c_1 + i\omega_0 c_2 = (1+\omega_0^2) y_0$$

$$\Leftrightarrow i\omega_0 c_1 + \omega_0^2 c_2 = (1+\omega_0^2) v_0$$

Gleichungssystem nach c_1 und c_2 auflösen

Abb. 17: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

Koeffizienten C_1, C_2 sind komplex 14

$$C_1 = (1 + \omega_0^2) y_0 - i \omega_0 C_2$$

$$i \omega_0 (1 + \omega_0^2) y_0 - (i \omega_0)(i \omega_0) C_2 + \omega_0^2 C_2 = (1 + \omega_0^2) V_0$$

$$(\omega_0^2 + \omega_0^2) C_2 = (1 + \omega_0^2) V_0 - i \omega_0 (1 + \omega_0^2) y_0$$

$$C_2 = \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0^2} V_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} y_0$$

$$C_1 = (1 + \omega_0^2) y_0 - i \omega_0 \left(\frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0^2} V_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} y_0 \right)$$

$$= \left(1 + \omega_0^2 - \frac{1 + \omega_0^2}{2} \right) y_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} V_0$$

$$C_1 = \frac{1 + \omega_0^2}{2} y_0 - i \frac{1 + \omega_0^2}{2 \omega_0} V_0$$

Lösung vollständig bekannt!

Abb. 18: Lösung der Bewegung eines Federschwingers.

6. Dynamische Systeme in Beispielen (17.11.2015, R. Mahnke)

1.

$$\dot{x} = x \quad (57)$$

$$\dot{y} = y^2 \quad (58)$$

2.

$$\dot{x} = y \quad (59)$$

$$\dot{y} = x \quad (60)$$

3.

$$\dot{x} = y \quad (61)$$

$$\dot{y} = -x \quad (62)$$

4.

$$\dot{x} = y \quad (63)$$

$$\dot{y} = -\sin x \quad (64)$$

5.

$$\dot{x} = ax - bxy \quad (65)$$

$$\dot{y} = bxy - cy \quad (66)$$

6.

$$\dot{x} = y \quad (67)$$

$$\dot{y} = -x + \mu(1 - x^2)y \quad (68)$$

7.

$$\dot{x} = y \quad (69)$$

$$\dot{y} = -x + x^2/2 \quad (70)$$

8.

$$\dot{x} = y \quad (71)$$

$$\dot{y} = x - x^3 \quad (72)$$

9.

$$\dot{x} = -x \quad (73)$$

$$\dot{y} = 1 - x^2 - y^2 \quad (74)$$

10.

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \quad (75)$$

$$\dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \quad (76)$$

11.

$$\dot{r} = r(1 - r^2) \quad (77)$$

$$\dot{\alpha} = 1 \quad (78)$$

12.

$$\dot{r} = r(1 - r) \quad (79)$$

$$\dot{\alpha} = \sin^2 \alpha + (1 - r)^3 \quad (80)$$

13.

$$\dot{x} = y \quad (81)$$

$$\dot{y} = -x + \mu(1 - y^2)y \quad (82)$$

14.

$$\dot{x} = Ax \quad \text{mit Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad (83)$$

15.

$$\dot{r} = r(1 - r) \quad (84)$$

$$\dot{\alpha} = \sin^2(\alpha/2) \quad (85)$$

16.

$$\dot{x} = Ax \quad \text{mit Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad (86)$$

17.

$$\dot{x} = v \quad (87)$$

$$m\dot{v} = F(x, v) \quad \text{mit} \quad F = -mg - rv \quad (88)$$

18.

$$\dot{x} = v \quad (89)$$

$$m\dot{v} = F(x, v) \quad \text{mit} \quad F = -kx - \gamma v \quad (90)$$

7. Newtonsche Dynamik II (24.11.2015, R. Mahnke)

Mehrteilchensystem aus N (Punkt-)Teilchen: $3N$ gekoppelte Newton-Differentialgleichungen sind zusammen mit Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit als Anfangswertproblem zu lösen. Aber wie? Analytisch bzw. Computeralgebra, numerisch (Euler-Cauchy, ..., Runge-Kutta) oder mittels Simulation.

Bekanntestes Beispiel: Harmonischer Oszillator (Federschwinger)

$$m\ddot{x} = -kx$$

Weiteres Beispiel: Freier Fall mit Reibung

$$m\ddot{x} = -mg - r\dot{x}$$

Definition von Impuls $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, kinetischer $T = (m/2)(\dot{\vec{r}})^2$ und potentieller Energie $V(x) = -\int F(x)dx$.

Dynamik eindimensionaler Bewegung mit beliebiger ortabhängiger Kraft:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad ; \quad x(t=0) = x_0 \text{ und } \dot{x}(t=0) = v_0$$

Allgemeine Lösung $t = t(x)$ mittels Energieerhaltungssatz $T + V = E$.

8. Schwingungen (01.12.2015, R. Mahnke)

Bekannt ist der *harmonische Oszillator*. Erweiterung durch Reibungskraft und äußere eingeprägte Kraft. Wirkt zusätzlich zur (harmonischen bzw. linearen) rücktreibenden Kraft eine geschwindigkeitsabhängige Dämpfung und eine zeitabhängige periodische aufgeprägte Kraft, so lautet die Schwingungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_{ext} \sin(\Omega t) .$$

Diskussion von Spezialfällen. Falls die externe Kraft fehlt ($F_{ext} = 0$), so kann das homogene Problem (die freie Schwingung) relativ einfach mittels Transformation gelöst werden.

Weiterhin wird das Standardbeispiel für nichtlineare Dynamik, das *mathematische Pendel* bei beliebigen Auslenkungen, untersucht. Dieses mechanische System ist durch einen Freiheitsgrad (Winkel α) charakterisiert und wird durch die Bewegungsgleichung

$$ml \ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha$$

beschrieben.

Die nichtlineare Physik fängt beim mathematischen Pendel an. Da die rücktreibende Kraft nichtlinear ist, kann das Bewegungsproblem nicht mehr analytisch gelöst werden. Näherungslösungen entstehen mittels Reihenentwicklungen.

Wichtig ist die Zustandsraumdarstellung in Abhängigkeit von der Gesamtenergie

$$E = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\alpha})^2 + mgl(1 - \cos \alpha) .$$

9. Zentralkraftbewegung (08.12.2015, R. Mahnke)

Aus der Newton-Gleichung folgen drei Bilanzgleichungen, und zwar für den Impuls, die Energie und den Drehimpuls. Erhaltungssätze erfordern spezielle Bedingungen.

Bei der Zentralkraftbewegung (die bekannte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft) existieren Drehimpuls- und Energieerhaltung. Somit ist die Planetenbewegung exakt lösbar und führt auf die bekannten Kepler-Gesetze.

Die Diskussion der Bewegungstypen (offene und geschlossene Bahnkurven) erfolgt anhand des effektiven Potentials, das sich additiv aus dem Gravitationspotential (negativ, anziehend) und dem Drehimpulsanteil (positiv, abstoßend) zusammensetzt. Er gibt, in Abhängigkeit von der Gesamtenergie, Bindungszustände (Kreis- und Ellipsenbahnen) oder Streuzustände (Parabel- und Hyperbelbahnen).

Zwei entgegengesetzte Kräfte: Gravitationskraft und Zentrifugalkraft.

$$F_G = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \quad ; \quad F_Z = m\dot{\alpha}^2 r$$

Drehimpuserhaltungssatz: $L_z = mr^2\dot{\alpha}$

$$F_G = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \quad ; \quad F_Z = \frac{L_z^2}{mr^3}$$

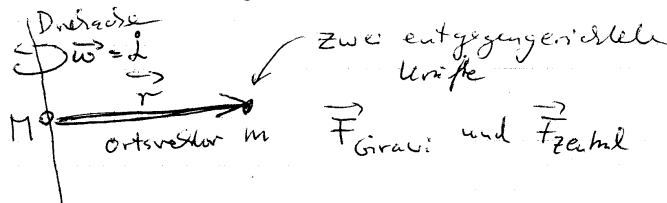
Bilde Potentiale $V(r) = -\int F(r)dr$

$$V_G = -\gamma \frac{Mm}{r} \quad ; \quad V_Z = \frac{L_z^2}{2mr^2}$$

Siehe detaillierte Erläuterungen auf folgender Seite.

R. Mahake 09.12.2015

Planetenbewegung - Kepler-Problem

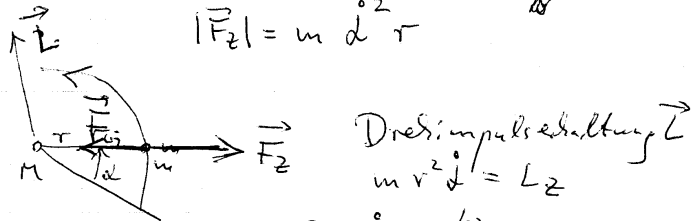


Gravitationskraft: $\vec{F}_G = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$|\vec{F}_G| = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{|\vec{r}|}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2}$

Zentrifugalkraft: $\vec{F}_Z = m \vec{\omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ $|\vec{\omega}| = \dot{\varphi}$

$|\vec{F}_Z| = m \dot{\varphi}^2 r$



$\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi}$

Einsetzen in Zentrifugalkraft: $|\vec{F}_Z| = m r \frac{L^2}{m^2 r^4}$
 $= \frac{L^2}{m r^3}$

Bilde Potentiale:

$V_G(r) = - \int \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = - \int |\vec{F}_G| dr$
 $= +\gamma m M \int \frac{dr}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{r}$

$V_Z(r) = - \int \vec{F}_Z \cdot d\vec{r} = - \int |\vec{F}_Z| dr$
 $= - \frac{L^2}{m} \int \frac{dr}{r^3} = \frac{L^2}{2m r^2}$

Addition der Kräfte & Potentiale: $V_{\text{eff}}(r) = V_G(r) + V_Z(r)$

Abb. 19: Einfache Erklärungen zur Zentralbewegung.

7 Theoretische Mechanik: Lagrange'sche Formulierung

10. Lagrange-Formalismus (15.12.2015, R. Mahnke)

Massenpunkte mit eingeschränkter Bewegungsfreiheit (wie beim mathematischen Pendel) können entweder durch Zwangskräfte (Lagrange I) oder durch generalisierte Koordinaten q_i und generalisierte Geschwindigkeiten \dot{q}_i beschrieben werden. Dieser Lagrange-Formalismus verwendet eine Lagrange-Funktion $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ als Differenz aus kinetischer T und potentieller Energie V .

Die Bewegungsgleichung für die Lagrange-Funktion $L = T - V$ folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip (Extremalprinzip für die Wirkung $S = \int L dt$) und lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Der generalisierte Impuls $p = \partial L / \partial \dot{q}_i$ ist eine Erhaltungsgröße, falls q_i eine zyklische Koordinate ist, d. h. L nicht von dieser Koordinate abhängt.

11. Kepler-Problem im Lagrange-Formalismus (15.12.2015, R. Mahnke)

Anwendung des Lagrange-Formalismus auf das (bekannte) Zentralkörperproblem; Beschreibung der Kepler-Bewegung in Kugelkoordinaten. Potentielle Energie (Gravitationspotential) ist radialsymmetrisch. Neben Erhaltung der Gesamtenergie gilt der Drehimpuserhaltungssatz $p_\alpha(t) = L_z$, da $\partial L / \partial \alpha = 0$, der auf eine ebene Bewegung führt. Somit Dynamik auf Ellipsenbahnen $r = r(\alpha)$ in einer $x - y$ -Ebene, die senkrecht zu L_z steht.

8 Theoretische Mechanik: Hamilton'sche Formulierung

12. Kepler-Problem im Hamilton-Formalismus

(05.+12.01.2016, R. Mahnke)

Alternative zum Lagrange-Formalismus. Die Hamilton-Funktion $H = H(q_i, p_i, t)$ 'lebt' im Phasenraum, der durch generalisierte Koordinaten q und generalisierte Impulse p aufgespannt wird. Die Dynamik des Systems wird durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (kanonische Gleichungen) beschrieben, ergibt die Phasenraumdynamik mit dem Fluss im Phasenraum. Beispiel: Phasenraumportrait des harmonischen Oszillators. Diskussion der Liouville-Gleichung. Nach Einführung der Poisson-Klammern erhalten die Bewegungsgleichungen eine Form, die später in der Quantenphysik Verwendung finden.

Ausgehend von der Lagrange-Funktion $L = T - V$ des Kepler-Problems

$$L(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, r, \theta, \alpha) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\alpha}^2 \right) \right) + \gamma \frac{Mm}{r}$$

wird die Hamilton-Funktion $H = T + V$ ermittelt. Sie lautet

$$H(p_r, p_\theta, p_\alpha, r, \theta, \alpha) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + r^{-2} \left(p_\theta^2 + \sin^{-2} \theta p_\alpha^2 \right) \right) - \gamma \frac{Mm}{r} .$$

Verweis auf zyklische Koordinaten.

Wiederholung Mathematisches Pendel im Newton-, Lagrange- und Hamilton-Formalismus.

9 Einführung in die Straßenverkehrsphysik

14. Nichtlineare dynamische Systeme in Physik und Nicht-Physik

(19.01.2016, R. Mahnke)

Wiederholung klassischer Newtonscher Mechanik. Newtonsche Bewegungsgleichung als dynamisches System inklusive Anfangsbedingungen. Die symmetrische Wechselwirkung 'Actio = Reactio' gilt nur bei passiven Teilchen. Die Dynamik für aktive, motorisierte, gepumpte Teilchen beinhaltet asymmetrische Wechselwirkungen. Ein typischer An-

satz, Hinweis auf Automobildynamik, lautet

$$\frac{dv_i}{dt} = f_i(v_i) + \sum_{j \neq i} f_{ij}(x_i, v_i | x_j, v_j)$$

mit Relaxationskraft als Vergleich zwischen Soll (Wunsch, Optimum) und Ist (Realität, Tatsache)

$$f_i(v_i) = \frac{1}{\tau_i} (v_i^{opt} - v_i) .$$

Die N -dimensionale Automobildynamik sei modelliert durch ein System von N Auto-Teilchen auf einem Kreis der Länge L , d. h. es gelte $x_i \in [0, L)$, $i = 1, \dots, N$ für ihre Orte. Die Bewegungsgleichungen seien dann gegeben durch

$$\begin{aligned} m \frac{dv_i}{dt} &= F_{\text{kons}}(\Delta x_i) + F_{\text{diss}}(v_i), \\ \frac{dx_i}{dt} &= v_i, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{\text{kons}}(\Delta x_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{opt}}(\Delta x_i) - v_{\text{max}}) \leq 0 \\ &\text{mit } v_{\text{opt}}(\Delta x_i) = v_{\text{max}} \frac{(\Delta x_i)^2}{D^2 + (\Delta x_i)^2}, \\ F_{\text{diss}}(v_i) &= \frac{m}{\tau} (v_{\text{max}} - v_i) \geq 0 \end{aligned}$$

und die Abstände Δx_i zwischen den Autos zyklisch gegeben sind durch $\forall i = 1, \dots, N-1 : \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ und $\Delta x_N = x_1 - x_N$.

10 Hinweis auf stochastische Dynamik

15. Zufallswanderer und Drift-Diffusion (27.01.2016, R. Mahnke)

Die deterministische Bewegung wird durch Schwankungen (Fluktuationen) gestört. Überwiegen die zufälligen Ereignisse wird die Bewegung stochastisch (Physik stochastischer Prozesse) genannt. Diffusion ist ein einfacher zufälliger Prozess.